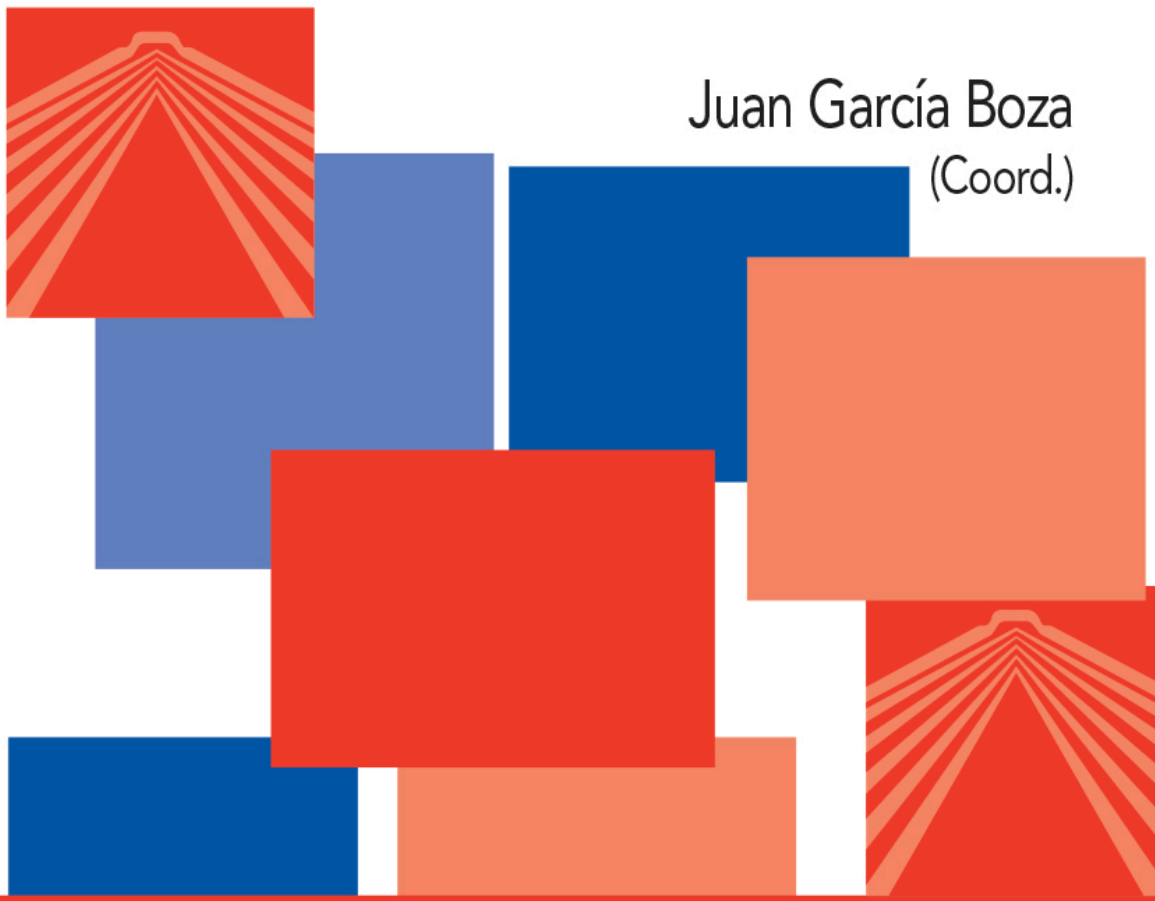
Matemáticas financieras

Juan García Boza
(Coord.)



PIRÁMIDE

Matemáticas financieras

Coordinador
JUAN GARCÍA BOZA
CATEDRÁTICO DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ALICIA DÉNIZ TADEO
LOURDES JORDÁN SALES
PROFESORAS TITULARES DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ROSA MARÍA CÁCERES APOLINARIO
OCTAVIO MAROTO SANTANA
YAIZA GARCÍA PADRÓN
PROFESORES DOCTORES DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Matemáticas financieras

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «ECONOMÍA Y EMPRESA»

Director:
Miguel Santesmases Mestre
Catedrático de la Universidad de Alcalá

Edición en versión digital

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro electrónico, su transmisión, su descarga, su descompilación, su tratamiento informático, su almacenamiento o introducción en cualquier sistema de repositorio y recuperación, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, conocido o por inventar, sin el permiso expreso escrito de los titulares del copyright.

© Juan García Boza (Coord.), 2016
© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2016
Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-3554-0

Índice

Prólogo 15

PARTE PRIMERA
Fundamentos

1. Conceptos básicos (I) 21

1.1. Capital financiero 22
1.2. Comparación y equivalencia de capitales financieros 26
1.3. Leyes financieras: concepto y propiedades 31
1.4. Suma financiera 32
1.5. Ejercicios y problemas resueltos 36
1.6. Ejercicios y problemas propuestos .....

2. Conceptos básicos (II) 39

2.1. Operaciones financieras: concepto y características 40
2.2. Clasificación de las operaciones financieras 43
2.3. Postulado de equivalencia financiera 44
2.4. Saldo financiero 46
2.5. Ejercicios y problemas resueltos 53
2.6. Ejercicios y problemas propuestos 58

3. Magnitudes financieras 61

3.1. Introducción 62
3.2. Factores, réditos y tantos en leyes de capitalización 62

© Ediciones Pirámide

3.3. Factores, réditos y tantos en leyes de descuento 70
3.4. El precio financiero 74
3.5. Ejercicios y problemas resueltos 80
3.6. Ejercicios y problemas propuestos 84

4. Sistemas financieros clásicos de capitalización y de descuento 85

4.1. Introducción 86
4.2. Sistema financiero de capitalización simple 87
4.2.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera 87
4.2.2. Magnitudes derivadas 89
4.2.3. Tantos equivalentes 91
4.2.4. Capitalización con intereses anticipados 93
4.3. Sistema financiero de capitalización compuesta 94
4.3.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera 94
4.3.2. Magnitudes derivadas 98
4.3.3. Tantos equivalentes 100
4.3.4. Capitalización fraccionada y capitalización continua 104
4.3.5. Capitalización con intereses anticipados 107
4.4. Sistema financiero de descuento simple comercial 108
4.4.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera 108
4.4.2. Magnitudes derivadas 111
4.4.3. Tantos equivalentes 112
4.5. Ejercicios y problemas resueltos 113
4.6. Ejercicios y problemas propuestos 117

PARTE SEGUNDA
Rentas financieras

5. Rentas financieras 123

5.1. Concepto 124
5.2. Valor capital o financiero de una renta 125
5.3. Clasificación de las rentas financieras 128
5.4. Ejercicios y problemas resueltos 130
5.5. Ejercicios y problemas propuestos 133

6. Valoración de rentas financieras (I) 135

6.1. Valoración de las rentas inmediatas temporales 136
6.1.1. Renta temporal, inmediata y pospagable 136
6.1.2. Renta temporal, inmediata y prepagable 138
6.2. Valoración de las rentas constantes inmediatas 141
6.2.1. Renta constante, inmediata, temporal y pospagable 141
6.2.2. Renta constante, inmediata, temporal y prepagable 144
6.2.3. Renta constante, inmediata, perpetua y pospagable 147
6.2.4. Renta constante, inmediata, perpetua y prepagable 148

© Ediciones Pirámide

6.3. Valoración de las rentas constantes diferidas 148
6.3.1. Renta constante, diferida, temporal y pospagable 149
6.3.2. Renta constante, diferida, temporal y prepagable 151
6.4. Valoración de las rentas constantes anticipadas 153
6.4.1. Renta constante, anticipada, temporal y pospagable 153
6.4.2. Renta constante, anticipada, temporal y prepagable 155
6.5. Ejercicios y problemas resueltos 156
6.6. Ejercicios y problemas propuestos 166

7. Valoración de rentas financieras (II) 169

7.1. Concepto y valoración de las rentas variables 170
7.2. Rentas de términos variables en progresión aritmética 174
7.2.1. Renta temporal, inmediata y pospagable 174
7.2.2. Renta temporal, inmediata y prepagable 177
7.2.3. Renta perpetua, inmediata y pospagable 178
7.2.4. Renta perpetua, inmediata y prepagable 180
7.3. Rentas de términos variables en progresión geométrica 180
7.3.1. Renta temporal, inmediata y pospagable 181
7.3.2. Renta temporal, inmediata y prepagable 183
7.3.3. Renta perpetua, inmediata y pospagable 184
7.3.4. Renta perpetua, inmediata y prepagable 185
7.4. Ejercicios y problemas resueltos 186
7.5. Ejercicios y problemas propuestos 190

8. Valoración de rentas financieras (III) 193

8.1. Introducción 194
8.2. Rentas fraccionadas 194
8.2.1. Renta fraccionada, inmediata, temporal y pospagable 195
8.2.2. Renta fraccionada, inmediata, temporal y prepagable 197
8.2.3. Casos particulares 198
8.3. Rentas continuas 205
8.3.1. Renta continua pospagable 205
8.3.2. Renta continua prepagable 206
8.4. Rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo 207
8.5. Ejercicios y problemas resueltos 208
8.6. Ejercicios y problemas propuestos 215

PARTE TERCERA
Operaciones de constitución

9. Operaciones de constitución 219

9.1. Concepto y modalidades 220
9.2. Planteamiento general de las operaciones con imposiciones prepagables . 220

© Ediciones Pirámide

9.3. Casos particulares 227
9.3.1. Términos constitutivos constantes 227
9.3.2. Cuotas de constitución constantes 230
9.4. Cuadro de constitución 232
9.5. Ejercicios y problemas resueltos 234
9.6. Ejercicios y problemas propuestos 241

PARTE CUARTA
Operaciones de amortización

10. Operaciones de amortización de préstamos 245

10.1. Concepto 246
10.2. Modalidades 247
10.2.1. Préstamos elementales o simples 247
10.2.2. Préstamos de contraprestación múltiple 249
10.3. Estudio general de las operaciones de amortización de préstamos con contraprestación múltiple e intereses vencidos 250
10.4. Cuadro de amortización 259
10.5. Ejercicios y problemas resueltos 261
10.6. Ejercicios y problemas propuestos 265

11. Métodos clásicos de amortización de préstamos 267

11.1. Introducción 268
11.2. Método francés 268
11.3. Método americano 275
11.3.1. Método americano simple 275
11.3.2. Método americano con fondo 276
11.4. Método de cuota de amortización constante 279
11.5. Ejercicios y problemas resueltos 282
11.6. Ejercicios y problemas propuestos 285

12. Otros métodos de amortización de préstamos 287

12.1. Introducción 288
12.2. Amortización con términos variables en progresión geométrica 288
12.3. Amortización con términos variables en progresión aritmética 293
12.4. Amortización con intereses fraccionados 297
12.4.1. Planteamiento general 297
12.4.2. Casos particulares 304
12.5. Amortización con períodos de carencia y de diferimiento 308
12.5.1. Préstamo con períodos de carencia 308
12.5.2. Préstamo con períodos de diferimiento 309

© Ediciones Pirámide

12.6. Amortización con intereses anticipados 311
12.6.1. Planteamiento general 311
12.6.2. Método alemán 321
12.7. Ejercicios y problemas resueltos 327
12.8. Ejercicios y problemas propuestos 335

13. Préstamos amortizables con tipos de interés referenciados o indiciados 337

13.1. Clasificación de las operaciones de amortización en función del tipo de interés 338
13.2. Problemática del tipo de interés referenciado 340
13.3. Métodos de amortización de préstamos referenciados 341
13.3.1. Metodología de amortización con términos predeterminados. 342
13.3.2. Metodología de amortización con términos posdeterminados. 344
13.4. Ejercicios y problemas resueltos 348
13.5. Ejercicios y problemas propuestos 358

14. Valor financiero del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad 361

14.1. Conceptos básicos 362
14.2. Fórmula de Achard 364
14.2.1. Planteamiento general 364
14.2.2. Préstamo con intereses fraccionados 367
14.3. Valoración en métodos particulares de amortización 369
14.3.1. Método francés 369
14.3.2. Método americano 371
14.3.3. Método de cuotas de amortización constantes 372
14.4. Ejercicios y problemas resueltos 373
14.5. Ejercicios y problemas propuestos 381

15. Coste y rendimiento de las operaciones financieras 383

15.1. Operaciones financieras puras y con características comerciales 384
15.2. Los tantos efectivos de coste y de rendimiento 386
15.3. El TAE en las operaciones financieras 393
15.3.1. Cálculo del TAE en las operaciones de préstamo 395
15.3.2. Cálculo del TAE en las operaciones de préstamo con tipos de interés referenciados 398
15.4. Los costes efectivos en situaciones especiales 404
15.4.1. Amortización anticipada y reembolso parcial 404
15.4.2. Novación y subrogación 411
15.5. Distribución temporal de ingresos financieros y de costes de financiación 415
15.5.1. Préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses pospagables 416

© Ediciones Pirámide

15.5.2. Préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses prepagables 434
15.5.3. Préstamos amortizables con contraprestación única 441
15.6. Ejercicios y problemas resueltos 445
15.7. Ejercicios y problemas propuestos 469

PARTE QUINTA
Operaciones bancarias a corto plazo

16. Operaciones bancarias a corto plazo (I) 473

16.1. Introducción 474
16.2. Cuentas corrientes 475
16.2.1. Concepto y características 475
16.2.2. Métodos de liquidación 476
16.3. Cuentas corrientes bancarias 484
16.4. Cuentas de crédito 487
16.5. Cálculo de los tantos efectivos 493
16.5.1. Cálculo de los tantos efectivos activo y pasivo 493
16.5.2. Cálculo del TAE 497
16.6. Ejercicios y problemas resueltos 502
16.7. Ejercicios y problemas propuestos 512

17. Operaciones bancarias a corto plazo (II) 517

17.1. Imposiciones a plazo fijo 518
17.2. Descuento comercial 525
17.3. Descuento financiero 528
17.4. Cálculo de los tantos efectivos en las operaciones de descuento 531
17.4.1. Cálculo de los tipos efectivos para el cliente y para la entidad financiera 531
17.4.2. Cálculo del TAE 535
17.5. Ejercicios y problemas resueltos 538
17.6. Ejercicios y problemas propuestos 550

PARTE SEXTA
Empréstitos

18. Estudio general de los empréstitos 555

18.1. Concepto 556
18.2. Modalidades 558
18.3. Empréstitos normales sin cancelación escalonada 559
18.4. Empréstitos normales amortizables por sorteo y pago periódico de intereses pospagables 564

© Ediciones Pirámide

18.5. Empréstitos normales amortizables por sorteo y pago de intereses acumulados 575
18.6. Ejercicios y problemas resueltos 583
18.7. Ejercicios y problemas propuestos 593

19. Empréstitos con características comerciales (I) 595

19.1. Modalidades de características comerciales 596
19.2. Estructura del término amortizativo con características comerciales ... 598
19.3. Metodología de normalización de un empréstito amortizable por sorteo y con cupón periódico 599
19.4. Empréstitos con intereses periódicos pospagables, amortizables por sorteo y con características comerciales 601
19.5. Ejercicios y problemas resueltos 610
19.6. Ejercicios y problemas propuestos 623

20. Empréstitos con características comerciales (II) 625

20.1. Empréstitos con intereses acumulados, amortizables por sorteo y con características comerciales 626
20.2. Empréstitos amortizables por sorteo y con cupón fraccionado 634
20.3. Tantos efectivos 636
20.4. Empréstitos amortizables por sorteo a tanto de rendimiento constante 644
20.5. Empréstitos sin cancelación escalonada y con características comerciales 648
20.6. Distribución temporal de costes de financiación y de ingresos financieros 651
20.6.1. Empréstitos sin cancelación escalonada 651
20.6.2. Empréstitos con cancelación escalonada 660
20.7. Ejercicios y problemas resueltos 667
20.8. Ejercicios y problemas propuestos 679

21. Valor financiero, usufructo y nuda propiedad de un empréstito 683

21.1. Valor financiero de un empréstito puro 684
21.1.1. Empréstitos normales sin cancelación escalonada 685
21.1.2. Empréstitos normales amortizables por sorteo 688
21.2. Valor financiero de un empréstito con características comerciales 692
21.3. Ejercicios y problemas resueltos 704
21.4. Ejercicios y problemas propuestos 713

Soluciones de los ejercicios y problemas propuestos 715

Bibliografía 725

© Ediciones Pirámide

Prólogo

En el presente texto de *Matemáticas Financieras* intentamos plasmar una concepción de la disciplina que, si bien se denomina Matemáticas, queda encuadrada en el campo general de las Finanzas. Para ello, hacemos hincapié en explicar la significación y las aplicaciones financieras de los diversos conceptos que utilizamos. Además, procuramos, en la medida de lo posible, alejarnos de la abstracción inherente a algunos conceptos matemáticos, aunque sin olvidar el rigor que a todo razonamiento, en esta materia, debe caracterizar.

Nuestra concepción se fundamenta en todas las aportaciones realizadas por los importantes autores que antes que nosotros han publicado excelentes textos de la disciplina, gracias a los cuales hemos podido profundizar en el conocimiento de las distintas partes que conforman las Matemáticas Financieras.

Esta obra es una introducción a la temática mencionada en su título, y deseamos que sirva de ayuda a todos los interesados en la disciplina, de forma especial a los estudiantes de los diversos grados universitarios en los que la misma se cursa. Se ha enfocado este trabajo de tal manera que contenga los fundamentos precisos para abordar con garantías de éxito la resolución práctica de la amplia problemática vinculada al análisis y valoración de las operaciones financieras, estando al alcance de todos los estudiantes con conocimientos básicos de álgebra, ya que los desarrollos matemáticos, si bien rigurosos, se exponen en un lenguaje sencillo y de fácil comprensión.

Nuestro texto es un libro de teoría y de práctica, pues en cada una de las lecciones se incluyen diversos ejemplos de aplicación inmediata de los conceptos estudiados, así como ejercicios y problemas, tanto resueltos como propuestos. Consta de 236 ejemplos resueltos, expuestos a continuación de las explicaciones teóricas correspondientes, 181 supuestos con resolución detallada y 145 ejercicios y problemas propuestos, de los cuales, al final de la obra, se ofrecen los resultados procedentes. En total se incluyen 562 ejercicios y problemas.

La obra está estructurada en veintiuna lecciones en las que abordamos los seis bloques que consideramos constituyen los fundamentos de las Matemáticas Fi-

© Ediciones Pirámide

nancieras: fundamentos, rentas financieras, operaciones de constitución, operaciones de amortización, operaciones bancarias a corto plazo y empréstitos.

En las cuatro primeras lecciones, *Fundamentos,* estudiamos un conjunto de conceptos básicos que permiten dar fundamento y rigor a la disciplina. Para ello se parte del concepto de capital financiero y se introduce la necesidad de comparar capitales, lo que nos lleva a que sea preciso disponer de criterios de valoración y comparación de distintos capitales financieros (leyes financieras). A continuación estudiamos las operaciones con capitales financieros, el concepto y cálculo del saldo financiero, para introducir a continuación las magnitudes financieras fundamentales. Todo lo anterior nos posibilita concluir el bloque con el análisis de los sistemas financieros clásicos de capitalización y de descuento, introduciéndolos a través de su significación financiera, y analizando las ecuaciones de equivalencia y diversas magnitudes inherentes a cada uno de ellos.

En la segunda parte, *Rentas financieras,* dividida en cuatro lecciones, estudiamos la valoración de las rentas financieras, las cuales constituyen herramientas imprescindibles para abordar los restantes bloques. Así, analizamos los conceptos de las diversas modalidades de rentas, y procedemos a su valoración de acuerdo con la ley financiera de capitalización compuesta, realizando un planteamiento general del cálculo del valor actual y del valor final, para a continuación estudiar con detenimiento las rentas constantes, las rentas variables y las rentas fraccionadas, deduciendo a partir de las mismas las rentas continuas.

La tercera parte corresponde al bloque de *Operaciones de constitución,* en el que estudiamos únicamente las correspondientes a imposiciones prepagables, pues son las de mayor utilización práctica. Realizamos un planteamiento general que nos permite abordar a continuación el estudio de diversos casos particulares.

En el cuarto bloque, *Operaciones de amortización,* realizamos en primer lugar un análisis general, introduciendo los conceptos de términos amortizativos, ecuación dinámica, ecuaciones de equivalencia, saldos, etc. Todo ello nos permite analizar a continuación diversos métodos de amortización, tanto los aplicables para las operaciones pactadas con intereses pospagables como las pactadas con intereses anticipados. Además, estudiamos los problemas vinculados a las operaciones de amortización con intereses referenciados, determinando las sucesivas cuantías de los términos amortizativos y de las demás magnitudes. También analizamos la valoración de los préstamos, deduciendo las expresiones matemáticas que nos permiten cuantificar el valor financiero del usufructo y el de la nuda propiedad. En la última lección de este bloque se estudian el coste y el rendimiento de las operaciones financieras, analizando la cuantificación de los diversos tipos efectivos (tanto efectivo activo, tanto efectivo pasivo y TAE) vinculados a las operaciones financieras. También analizamos los tantos efectivos en las situaciones especiales de reembolso parcial y de cancelación anticipada, y se concluye con un amplio estudio de los problemas derivados de la distribución temporal de los costes e ingresos financieros, analizando diversas situaciones en cuanto a modalidades de operaciones financieras.

© Ediciones Pirámide

El quinto bloque consta de dos lecciones dedicadas al estudio de la problemática financiera vinculada a las *Operaciones bancarias a corto plazo,* analizando las cuentas corrientes, las cuentas de crédito, las operaciones de descuento tanto comercial como financiero y las imposiciones a plazo.

El sexto y último bloque comprende cuatro lecciones en las que analizamos los problemas vinculados con los *Empréstitos.* Para ello, en la lección 18 realizamos un estudio general, deteniéndonos en los empréstitos normales, tanto sin cancelación escalonada de títulos como en los amortizables periódicamente por sorteo, para a continuación, en las dos lecciones siguientes, estudiar diversas modalidades de empréstitos con características comerciales, tanto en los amortizables con pago periódico de cupón como en los amortizables con cupón acumulado. Asimismo, se analiza la problemática del cálculo de los tantos efectivos, la correspondiente a la distribución temporal de costes e ingresos financieros, para concluir con el análisis del valor financiero, del usufructo y de la nuda propiedad en los empréstitos.

Esperamos que nuestro texto contribuya a que los interesados en el estudio de la disciplina aborden el mismo con garantías de éxito, y en cualquier caso les ayude a aprender de manera razonada, meditando y ejercitándose a través de la realización de los diversos ejercicios y problemas, los cuales contribuirán a afianzar los diversos conceptos teóricos.

LOS AUTORES

© Ediciones Pirámide

PARTE PRIMERA
Fundamentos

1 Conceptos básicos (I)

OBJETIVOS

- Entender el concepto de capital financiero e identificar sus componentes.
- Comparar capitales financieros, estableciendo la ordenación o equivalencia entre ellos.
- Entender el concepto de ley financiera y sus propiedades, con especial referencia a su significado financiero.
- Establecer las condiciones que debe verificar una función para ser ley financiera de valoración.
- Utilizar las leyes financieras para valorar capitales.
- Obtener el capital financiero suma de otros varios.
- Comparar conjuntos de capitales financieros.

SUMARIO

1.1. Capital financiero.
1.2. Comparación y equivalencia de capitales financieros.
1.3. Leyes financieras: concepto y propiedades.
1.4. Suma financiera.
1.5. Ejercicios y problemas resueltos.
1.6. Ejercicios y problemas propuestos.

1.1. CAPITAL FINANCIERO

La apreciación que se tenga de los bienes económicos está vinculada no sólo a su valor, expresado en unidades monetarias, sino también al momento de su disponibilidad. Por ello, es posible asociar a cualquier bien económico una magnitud bidimensional, de primer componente el valor del bien en unidades monetarias, y de segundo el vencimiento o momento del tiempo en que dicho bien es disponible.

Podemos señalar que[1] **«se denomina capital financiero a la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad o vencimiento».** Por tanto, a cualquier bien económico le hacemos corresponder la magnitud bidimensional capital financiero (C, t), en la que $C > 0$ indica la cuantía y t el vencimiento. Para su correcta identificación se requiere señalar la unidad monetaria en la que se expresa la cuantía, la unidad de tiempo y el origen de éste. En consecuencia, cuando hablamos de un capital financiero nos estamos refiriendo a una **cuantía de dinero** y a su **vencimiento.** Por ejemplo, 2.000 € con vencimiento dentro de 2 años es el capital financiero (2.000,2).

Gráficamente, podemos representar los capitales financieros como aparece en la figura 1.1, o bien de forma simplificada, que es lo más usual (véanse figuras 1.2 y 1.3).

1.2. COMPARACIÓN Y EQUIVALENCIA DE CAPITALES FINANCIEROS

Si a cada bien económico le hacemos corresponder un capital financiero, los diversos intercambios de bienes económicos realizados por distintos sujetos se traducen en intercambios de los correspondientes capitales financieros a ellos

[1] Gil Peláez (1987: 24).

© Ediciones Pirámide

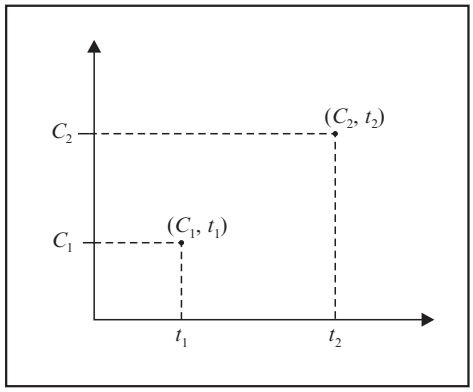


Figura 1.1.

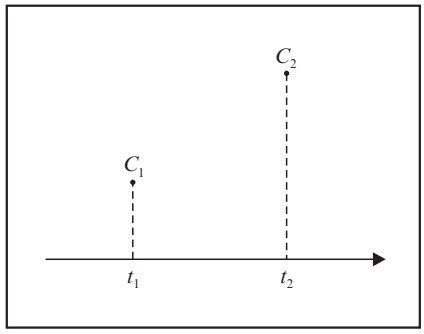


Figura 1.2.

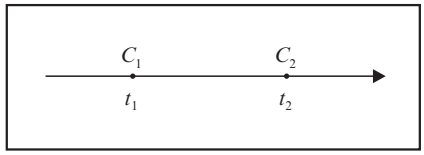


Figura 1.3.

vinculados. Por ello, es preciso proceder a la valoración y comparación de capitales financieros. Así, por ejemplo, si se adquiere un bien de precio 12 € que debe abonarse dentro de 8 meses, y se le propone al vendedor abonarle una cuantía de 10 € dentro de 3 meses, se le está proponiendo un intercambio entre el capital financiero (12,8) y el capital (10,3). El vendedor se plantea inmediatamente la pre-

© Ediciones Pirámide

gunta de si le interesa o no el intercambio, o sea, ¿son indiferentes o equivalentes ambos capitales? Para responder a la pregunta planteada es preciso disponer de criterios financieros objetivos que permitan a cualquier sujeto económico efectuar comparaciones entre capitales financieros. Tales criterios financieros se establecen atendiendo al comportamiento racional de cualquier sujeto en cuanto a su preferencia por la liquidez e introduciendo un postulado de fácil y general aceptación.

Sabemos que, a igualdad de calidad y cantidad, cualquier sujeto económico prefiere los bienes económicos de menor vencimiento, lo que constituye el *principio de preferencia por la liquidez.* Ello permite la comparación directa de capitales financieros en el caso de que sean de la misma cuantía o del mismo vencimiento: a igual cuantía es preferido el de menor vencimiento, y a igual vencimiento se prefiere el de mayor cuantía. Así, por ejemplo, entre los capitales (100,2) y (100,5) cualquier sujeto prefiere el primer capital: $(100,2) \succ (100,5)$. De igual forma, entre los capitales (120,8) y (150,8) es preferido el segundo: $(150,8) \succ (120,8)$.

EJERCICIO 1.1

Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (200,18); (190,18) y (210,17).

Resolución

El capital (210,17) es de mayor cuantía que los otros dos y de menor vencimiento, por lo que es preferido a ambos. Y entre los de vencimiento 18, se prefiere el de mayor cuantía. Por tanto, queda: $(210,17) \succ (200,18) \succ (190,18)$.

Para el caso general de que los capitales sean de distinta cuantía y distinto vencimiento, siempre que el de mayor cuantía también tenga mayor vencimiento, la comparación directa no es posible. Así, no sabemos cuál de los siguientes capitales es preferido: (100.000,7) o (108.000,12). En consecuencia, es preciso disponer de criterios financieros que hagan posible la comparación de capitales de cualquier cuantía y vencimiento. Una forma de disponer de tales criterios es aceptando como postulado[2] que cualquier sujeto económico es capaz de definir un criterio mediante el cual, dado un capital financiero (C, t), le es posible obtener la cuantía V de un capital sustituto o equivalente del mismo, con vencimiento en un punto fijo p. Dicho postulado se denomina *«Principio de sustitución o de proyección financiera en p»,* siendo V la cuantía equivalente o sustituta en p de la cuantía C, por lo que al sujeto económico le resulta indiferente que se trate del capital (C, t)

[2] Gil Peláez (1987: 29).

© Ediciones Pirámide

o del capital (V, p). La relación entre V y C se expresa mediante la igualdad: $V = Proy_p(C, t)$. Gráficamente, tenemos:

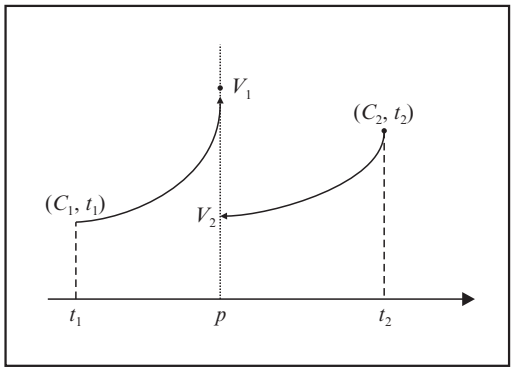


Figura 1.4.

De acuerdo con el postulado formulado, fijado un punto de referencia p es posible encontrar un capital (V, p) sustituto del (C, t), y ello tanto para $t > p$ como para $t < p$. Así, si se ha de elegir entre (100.000,7) y (108.000,12), el sujeto económico no puede aplicar directamente el principio de preferencia por la liquidez, siendo necesario sustituir dichos capitales por otros que considere equivalentes en un mismo vencimiento. Así, si dispone de un criterio que le permite, fijado un punto p por ejemplo en 15, calcular las cuantías equivalentes, ya podrá efectuar la comparación. Supongamos que de acuerdo con dicho criterio obtiene:

$$V_1 = Proy_p(100.000,7) = 130.000$$

$$V_2 = Proy_p(108.000,12) = 145.000$$

Al ser $V_2 > V_1$, el segundo capital es preferido al primero: $(108.000,12) \succ (100.000,7)$.

Cuando decimos que el capital (V, p) es el sustituto del capital (C, t), hemos de interpretar que al sujeto económico que ha de cobrar (o pagar) el capital de cuantía C, le resulta indiferente cobrar (o pagar) la cuantía V en p en lugar de la cuantía C en t.

En general, si dos capitales tienen, de acuerdo con un criterio financiero de sustitución, el mismo sustituto en p, se dice que son **capitales equivalentes** $(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)$, lo que se indica a través de la siguiente **ecuación de equivalencia financiera:**

$$Proy_p(C_1, t_1) = Proy_p(C_2, t_2)$$

© Ediciones Pirámide

1.3. LEYES FINANCIERAS: CONCEPTO Y PROPIEDADES

Tal y como hemos señalado, todo sujeto económico dispone de un criterio de sustitución de cualquier capital (C, t) por otro (V, p) que considera equivalente en un momento del tiempo p de referencia. Dicho criterio ha de plasmarse en una expresión matemática que relacione tanto las dos cuantías como los dos vencimientos. Tal expresión matemática constituye un **criterio financiero de valoración** o una **ley financiera de valoración.**

En general, podemos indicar que[3] **un criterio financiero de valoración o ley financiera de valoración está definida por una expresión matemática que permite, dado un capital financiero, obtener la cuantía de su equivalente en un punto *p* de referencia:**

$$V = Proy_p(C, t) \Leftrightarrow V = F(C, t; p)$$

EJERCICIO 1.2

Considerando que la siguiente expresión constituye una ley financiera de valoración, $F(C, t; p) = C[1 + 0{,}10(p - t)]$; $p = 20$, determinar cuál de los capitales es preferido: (100.000,8) o (120.000,13).

Resolución

Para poder comparar ambos capitales, hemos de calcular el equivalente en p de cada uno de ellos, siendo preferido el capital cuyo sustituto tenga mayor cuantía. El sustituto en $p = 20$ de cada uno de los capitales dados se obtiene sustituyendo en la expresión de la ley financiera los valores correspondientes a C, p y t:

$$V_1 = Proy_p(100.000,8) = 100.000[1 + 0{,}10(20 - 8)] = 220.000$$

$$V_2 = Proy_p(120.000,13) = 120.000[1 + 0{,}10(20 - 13)] = 204.000$$

Como $V_1 > V_2$, por tanto es (100.000,8) $\succ$ (120.000,13).

EJERCICIO 1.3

Supóngase que la siguiente expresión constituye una ley financiera de valoración para $p = 15$: $F(C, t; p) = C[1 + 0{,}04(p - t)]$. Calcular: *a*) cuantía del capital sustituto de (150.000,4), y *b*) capital equivalente en 9 del capital (200.000,7).

[3] Puede verse Gil Peláez (1987: 31).

© Ediciones Pirámide

Resolución

a) El sustituto en $p = 15$ del capital (150.000,4) se obtiene sustituyendo en la expresión de la ley financiera, C, p y t por los valores correspondientes:

$$V = Proy_p(150.000,4) = 150.000[1 + 0,04(15 - 4)] = 216.000$$

b) Sea X la cuantía del capital con vencimiento en 9 y equivalente al capital (200.000,7). Por ser ambos equivalentes se ha de verificar la correspondiente ecuación de equivalencia financiera:

$$Proy_p(200.000,7) = Proy_p(X, 9)$$

Y al sustituir queda:

$$200.000[1 + 0,04(15 - 7)] = X[1 + 0,04(15 - 9)] \Leftrightarrow X = 212.903,23$$

En general, cuando $t < p$, se dice que V es la cuantía en p resultado de la capitalización del capital (C, t). La ley se representa en este caso por $L(C, t; p)$, recibiendo el nombre de **ley financiera de capitalización en *p*,** siendo V el **valor capitalizado o montante.**

En el caso de $t > p$, el valor V es la cuantía en p resultado de la actualización o descuento del capital (C, t). La ley se representa por $A(C, t; p)$, denominándose **ley financiera de descuento en *p*,** siendo V el **valor actual o valor descontado.**

Tenemos:

$$F(C, t; p) = \begin{cases} L(C, t; p) \text{ para } t < p \\ A(C, t; p) \text{ para } t > p \end{cases}$$

Es preciso señalar que una expresión matemática, para poder ser tomada como ley financiera o criterio financiero de valoración, ha de cumplir un conjunto de propiedades lógicas. Dichas **propiedades** son las siguientes:

Primera. Los valores que tome han de ser positivos: $F(C, t; p) > 0$. Ello es así porque la ecuación $V = F(C, t; p)$ representa la cuantía del capital (V, p) sustituto del capital (C, t), y dicha cuantía ha de ser positiva.

Segunda. Fijado un punto de valoración p, la cuantía de un capital y la de su sustituto han de ser proporcionales. Por tanto, al multiplicar (o dividir) la cuantía C de un capital por un cierto número, la cuantía V del capital sustituto debe quedar multiplicada (o dividida) por dicho número. En consecuencia, si $(C, t) \sim (V, p)$, se ha de verificar $(C \times k, t) \sim (V \times k, p)$. Así, por ejemplo, si $V = Proy_p(1.000, t)$, un

© Ediciones Pirámide

capital triple debe tener un sustituto de cuantía también triple: $Proy_p(3.000, t) = 3 \times V = 3 \times Proy_p(1.000, t)$, o expresado de otra forma: si $(1.000, t) \sim (V, p)$, también se verifica $(3.000, t) \sim (3 \times V, p)$.

En general, como la cuantía del capital (C, t) se obtiene al multiplicar por C la cuantía del capital unitario: $(C, t) = C(1, t)$, la cuantía V del capital sustituto de (C, t) también debe obtenerse al multiplicar por C la cuantía del sustituto del capital unitario: $V = Proy_p(C, t) = F(C, t; p) = C \times F(1, t; p)$, siendo $F(1, t; p) = F(t; p)$ la ley financiera unitaria o cuantía del sustituto del capital unitario. Por tanto, siendo $L(1, t; p) = L(t; p)$ la ley financiera unitaria de capitalización, y $A(1, t; p) = A(t; p)$ la ley financiera unitaria de descuento, tenemos:

$$V = Proy_p(C, t) = C \times F(t; p) = \begin{cases} C \times L(t; p) \text{ para } t < p \\ C \times A(t; p) \text{ para } t > p \end{cases}$$

De acuerdo con lo señalado, para $t < p$, como $V > C$, se ha de verificar: $V = C \times L(t; p) > C \Rightarrow L(t; p) > 1$. Asimismo, para la ley unitaria de descuento, al ser $t > p$ y $V < C$, se cumple $V = C \times A(t; p) < C \Rightarrow A(t; p) < 1$. Además, como V ha de tomar valores positivos, se verifica: $0 < A(t; p) < 1$. Los siguientes gráficos ilustran lo expuesto:

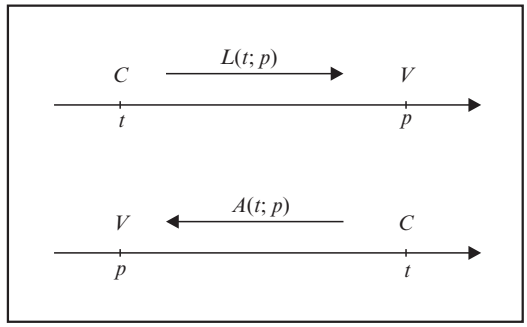


Figura 1.5.

Tercera. Cuando no ha transcurrido tiempo, o sea, cuando sea $t = p$, la función ha de tomar el valor uno: $F(t; t) = F(p; p) = 1$.

Cuarta. La ley ha de ser creciente con p y decreciente con t:

$$\frac{\Delta_p F(t; p)}{\Delta p} > 0; \quad \frac{\Delta_t F(t; p)}{\Delta t} < 0$$

Esta propiedad es consecuencia del principio de preferencia por la liquidez, lo que implica que, al alejarse la disponibilidad de un bien, ha de compensarse con

© Ediciones Pirámide

un aumento de cuantía, así como que el acercamiento supone una disminución de cuantía. Así, por ejemplo, si el equivalente en $p = 10$ del capital (100,2) vale 140, si hallamos el equivalente en $p = 12$, éste ha de ser superior a 140, dado que está más alejado en el tiempo. Puede verse en la figura 1.6.

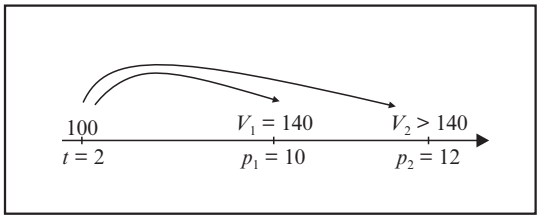


Figura 1.6.

Y con una ley de descuento, si por ejemplo el equivalente en $p = 10$ del capital (100,15) vale 90, si el capital venciese en 20, el equivalente debe ser inferior a 90, por ejemplo 80. Gráficamente queda reflejado en la figura 1.7.

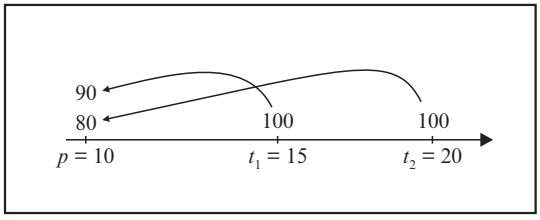


Figura 1.7.

Si la correspondiente expresión matemática de la ley financiera es una función derivable, el crecimiento con p y el decrecimiento con t se expresa:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial p} > 0; \quad \frac{\partial F(t;p)}{\partial t} < 0$$

Quinta. La función ha de ser continua con respecto a t y continua con respecto a p separadamente:

$$\Delta_p F(t;p) \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0$$

$$\Delta_t F(t;p) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

© Ediciones Pirámide

Esta propiedad pone de manifiesto que para incrementos infinitesimales de la variable tiempo, los correspondientes incrementos de la variable cuantía también han de ser infinitesimales. Por otra parte, con tal que $F(t; p)$ sea derivable, se verifica esta propiedad[4].

EJERCICIO 1.4

Indicar las condiciones para que la función $F(t; p) = a - b(t - p)$ sea una ley unitaria de descuento, siendo $t > p > 0$.

Resolución

Se ha de verificar $F(t; t) = F(p; p) = a - b(p - p) = 1$, por lo que $a = 1$, con lo que la función a estudiar es $F(t; p) = 1 - b(t - p)$.

Como ha de ser $0 < A(t; p) < 1$, tenemos: $F(t; p) = 1 - b(t - p) > 0 \Rightarrow b < \dfrac{1}{t - p}$ y $F(t; p) = 1 - b(t - p) < 1 \Rightarrow b > 0$. En consecuencia, el valor de b verifica $0 < b < \dfrac{1}{t - p}$.

Para verificar el crecimiento con p y el decrecimiento con t, calculamos las correspondientes derivadas, obteniéndose: $\dfrac{\partial F(t; p)}{\partial p} = b$; $\dfrac{\partial F(t; p)}{\partial t} = -b$. Como es $b > 0$, efectivamente la función es creciente con p y decreciente con t.

Al tratarse de una función derivable, es continua, por lo que la última propiedad no es preciso verificarla. En conclusión, la función dada es una ley financiera unitaria de descuento, verificándose:

$$A(t; p) = 1 - b(t - p) \text{ con } \begin{cases} 0 < p < t \\ 0 < b < \dfrac{1}{t - p} \end{cases}$$

EJERCICIO 1.5

Señalar las condiciones que debe verificar la expresión $F(t; p) = a + k(p - t)^4$ para ser una ley unitaria de capitalización, con $p > t > 0$.

---

[4] Recordemos que, en una función continua, ante incrementos infinitesimales de la variable independiente, los correspondientes incrementos de la variable dependiente también son infinitesimales. Además, toda función derivable es continua.

© Ediciones Pirámide

Resolución

De $F(t; t) = 1 = a + k(t - t)^4 \Rightarrow a = 1$. Como ha de ser $L(t; p) > 1 \Rightarrow 1 + k(p - t)^4 > 1 \Rightarrow k > 0$, pues $(p - t)^4 > 0$. En cuanto al crecimiento y decrecimiento, ambos se verifican, pues al ser $k > 0$ y $p > t$ por tratarse de una ley de capitalización, las derivadas valen:

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial p} = 4k(p - t)^3 > 0$$

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial t} = -4k(p - t)^3 < 0$$

Y como es una función derivable, también es continua. Por tanto, la expresión dada es una ley financiera de capitalización, cumpliéndose:

$$L(t; p) = 1 + k(p - t)^4 \begin{cases} 0 < t < p \\ k > 0 \end{cases}$$

1.4. SUMA FINANCIERA

Dados dos capitales financieros, podemos calcular las respectivas proyecciones en un punto cualquiera p. Si existe un tercer capital cuya proyección en el mismo punto p sea la suma de las proyecciones de los citados dos capitales, decimos que el tercer capital es la suma financiera de los dos primeros:

$$Proy_p(C_1, t_1) + Proy_p(C_2, t_2) = Proy_p(S, q) \Leftrightarrow (C_1, t_1) + (C_2, t_2) = (S, q)$$

En general, dados n capitales financieros (C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_n, t_n), se dice que el capital (S, q) es su suma financiera, si se verifica que el equivalente en p del capital suma es la suma de los equivalentes en p de los capitales sumandos:

$$(C_1, t_1) + (C_2, t_2) + ... + (C_n, t_n) = (S, q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Proy_p(C_1, t_1) + Proy_p(C_2, t_2) + ... + Proy_p(C_n, t_n) = Proy_p(S, q) = \sum_{s=1}^{n} Proy_p(C_s, t_s)$$

EJERCICIO 1.6

Dados los capitales financieros (100.000,4) y (150.000,6), calcular su suma financiera en 9 sabiendo que la ley financiera a utilizar es $L(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$, siendo 12 su punto de aplicación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

De acuerdo con lo señalado, se ha de verificar:

$$(S, 9) = (100.000,4) + (150.000,6) \quad \Rightarrow \quad S[1 + 0{,}05(12 - 9)] =$$
$$= 100.000[1 + 0{,}05(12 - 4)] + 150.000[1 + 0{,}05(12 - 6)] \quad \Rightarrow \quad S = 291.304{,}35$$

EJERCICIO 1.7

Hallar la suma financiera en cuatro de los capitales (10.000,2), (15.000,5) y (20.000,7), tomando como ley financiera unitaria:

$$F(t; p) = \begin{cases} 1 + 0{,}10(p - t), & t < p = 5 \\ 1 - 0{,}12(t - p), & t > p = 5 \end{cases}$$

Resolución

Teniendo en cuenta el concepto de suma financiera, se verifica:

$$(S, 4) = (10.000,2) + (15.000,5) + (20.000,7) \quad \Rightarrow \quad S[1 + 0{,}10(5 - 4)] =$$
$$= 10.000[1 + 0{,}10(5 - 2)] + 15.000 + 20.000[1 - 0{,}12(7 - 5)] \Rightarrow S = 39.272{,}73$$

Debemos observar que para calcular el equivalente del capital (10.000,2) utilizamos la expresión $1 + 0{,}10(p - t)$, válida para $t < p = 5$, y para el sustituto del capital (20.000,7) la expresión a usar es $1 - 0{,}12(t - p)$, válida para $t > p = 5$. En cuanto al capital (15.000,5), su proyección en $p = 5$, al no transcurrir tiempo, vale 15.000.

1.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (120,30), (110,31) y (130,29).

Resolución

El capital (130,29) es de mayor cuantía que los otros dos y de menor vencimiento, por lo que es preferido a ambos. Y entre los otros dos, es preferido el de mayor cuantía y menor vencimiento. Por tanto, queda: $(130,29) \succ (120,30) \succ (110,31)$.

© Ediciones Pirámide

2. Una persona tiene derecho a cobrar los siguientes capitales financieros: (4.000,6) y (8.000,10). Le proponen pagarle, en sustitución de ambos capitales, el capital único (12.000,12). Justificar razonadamente si le interesa el intercambio.

Resolución

Si consideramos $p = 12$, se ha de verificar: $Proy_p(C, t) = V > C$, por lo que tenemos:

$$Proy_{p=12}(4.000,6) > 4.000$$

$$Proy_{p=12}(8.000,10) > 8.000$$

En consecuencia, $Proy_{p=12}(4.000,6) + Proy_{p=12}(8.000,10) > 12.000$, por lo que no le interesa la sustitución.

3. Calcular el capital equivalente en 20 del capital (800.000,14), siendo la ley financiera unitaria $L(t; p) = 1 + 0{,}12(p^2 - t^2)$, $p = 25$.

Resolución

Se ha de verificar la ecuación de equivalencia financiera entre los capitales (800.000,14) y (X, 20):

$$800.000[1 + 0{,}12(25^2 - 14^2)] = X[1 + 0{,}12(25^2 - 20^2)] \quad \Rightarrow \quad X = 1.499.428{,}57$$

4. Señalar las condiciones que debe verificar la expresión $f(t; p) = e^{kp^2 - ht^2}$ para ser una ley unitaria de capitalización.

Resolución

$f(t; t) = e^{t^2(k-h)} = 1 \Rightarrow t^2(k - h) = 0 \Rightarrow k = h \Rightarrow f(t; p) = e^{k(p^2 - t^2)}$. Al tratarse de una ley de capitalización, ha de tomar un valor mayor que uno, que lo tomará siempre que el exponente de la expresión anterior sea positivo: $f(t; p) = e^{k(p^2 - t^2)} > >1 \Rightarrow k(p^2 - t^2) > 0 \Rightarrow k > 0$, pues $p^2 - t^2 > 0$ al ser $p > t$. En cuanto al crecimiento con p y decrecimiento con t, se verifica con $k > 0$:

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial p} = 2kp \times e^{k(p^2 - t^2)} > 0$$

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial t} = -2kt \times e^{k(p^2 - t^2)} < 0$$

© Ediciones Pirámide

Como se trata de una función exponencial, es continua para t y p. Queda, pues:

$$L(t; p) = e^{k(p^2 - t^2)} \begin{cases} k > 0 \\ 0 < t < p \end{cases}$$

5. Indicar si es posible utilizar la ley de descuento $A(t; p) = 1 - 0{,}10(t - p)$ con $p = 3$ para hallar el equivalente del capital (100,15).

Resolución

El equivalente en $p = 3$ del capital dado vale: $V = 100[1 - 0{,}10(15 - 3)] = -20$, lo cual es absurdo, por ser una cantidad negativa. Para que la cuantía sea una cantidad positiva, $A(t; p)$ ha de ser positivo: $1 - 0{,}10(t - p) > 0 \Rightarrow t < 10 + p$: intervalo de validez de la ley de descuento. Si $t = 15$ y $p = 3$ no se verifica la restricción anterior, por lo que la ley no es aplicable para tales valores de t y p.

6. Determinar el valor de x para que la suma financiera de los capitales (150.000,10) y (250.000, x) sea el capital (440.000, $x - 1$), sabiendo que la ley financiera unitaria es: $A(t; p) = 1 - 0{,}10(t - p)$, $p = 8$.

Resolución

De acuerdo con los datos se verifica:

$$(440.000, x - 1) = (150.000,10) + (250.000, x) \quad \Rightarrow \quad 150.000[1 - 0{,}10(10 - 8)] +$$
$$+ 250.000[1 - 0{,}10(x - 8)] = 440.000[1 - 0{,}10(x - 1 - 8)] \quad \Rightarrow \quad x = 14$$

7. Calcular el valor de x para que los dos conjuntos de capitales financieros siguientes sean equivalentes, de acuerdo con la ley financiera unitaria que se indica:

$$A = \{(10.000,6); (12.000,10)\}$$

$$B = \{(14.000,12); (x, 13)\}$$

$$L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t),\ p = 13$$

Resolución

Sabemos que dos conjuntos de capitales financieros son equivalentes cuando lo son sus correspondientes capitales suma en un mismo punto. Por tanto, calculando la suma en p de los capitales de cada conjunto, tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$(S_A, p = 13) = (10.000,6) + (12.000,10) \quad \Rightarrow \quad S_A = 10.000[1 + 0,10(13 - 6)] +$$
$$+ 12.000[1 + 0,10(13 - 10)] = 32.600$$

$$(S_B, p = 13) = (14.000,12) + (x, 13) \quad \Rightarrow \quad S_B = 14.000[1 + 0,10(13 - 12)] +$$
$$+ x[1 + 0,10(13 - 13)] = 15.400 + x \quad \Rightarrow \quad 32.600 = 15.400 + x \Rightarrow x = 17.200$$

8. Sabemos que los siguientes conjuntos de capitales financieros son equivalentes: $A = \{(100.000,8); (150.000,12)\}$ y $B = \{(x, y - 4); (200.000, y)\}$. Además, también son equivalentes los capitales $(200.000, y)$ y $(160.000,10)$. Si la ley financiera unitaria a aplicar es: $L(t; p) = 1 + 0,10(p - t)$, $p = 20$, calcular x.

Resolución

Por ser equivalentes los capitales $(200.000, y)$ y $(160.000,10)$, se verifica:

$$160.000[1 + 0,10(20 - 10)] + 200.000[1 + 0,10(20 - y)] \Rightarrow y = 14$$

Ahora tenemos que $B = \{(x, 10); (200.000, 14)\}$. Al ser los dos conjuntos equivalentes, podemos calcular la suma financiera correspondiente a los capitales de cada uno e igualar:

$$100.000(1 + 0,10 \times 12) + 150.000(1 + 0,10 \times 8) = x(1 + 0,10 \times 10) +$$
$$+ 200.000(1 + 0,10 \times 6) \Rightarrow x = 85.000$$

9. Dada la ley financiera unitaria $L(t; p) = a + k(p - t)$, $p = 15$, sabemos que la suma financiera de los capitales $(50.000,2)$ y $(75.000,6)$, calculada en el punto 10, vale 195.000. Con la ley indicada, para el capital $(100.000,8)$ su cuantía equivalente en 12 vale: *a*) 240.000; *b*) 150.000; *c*) 160.000; *d*) 170.000.

Resolución

Hemos de hallar la cuantía x tal que $(x, 12) \sim (100.000,8)$. Para ello necesitamos conocer el valor de a y el de k. Por ser $L(t; t) = 1$, se deduce: $a + k(t - t) = 1 \Rightarrow a = 1$, por lo que la ley a utilizar es $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $t < p = 15$. Además, se verifica: $(50.000,2) + (75.000,6) = (195.000,10)$, por lo que podemos plantear la siguiente ecuación:

$$50.000[1 + k(15 - 2)] + 75.000[1 + k(15 - 6)] =$$
$$= 195.000[1 + k(15 - 10)] \Rightarrow k = 0,20$$

© Ediciones Pirámide

De $(x, 12) \sim (100.000,8)$ se deduce la siguiente ecuación de equivalencia financiera: $x[1 + 0{,}2(15 - 12)] = 100.000[1 + 0{,}2(15 - 8)] \Rightarrow x = 150.000$. Por tanto, la solución es la correspondiente a la alternativa *b*.

10. Los capitales (15.000,5) y (20.000,10) son equivalentes de acuerdo con ley financiera unitaria $L(t; p) = h + k(p - t)$, $t < p = 15$. La cuantía x de la suma financiera calculada en el punto 8 de los capitales (2.000,4), (5.000,6) y (8.000,9), es: *a*) $15.580 < x < 15.595$; *b*) $18.390 < x < 18.405$; *c*) $26.480 < x < 26.495$; *d*) $12.467 < < x < 12.473$.

Resolución

Para calcular x necesitamos conocer el valor de h y el de k. Por ser $L(t; t) = 1$, se deduce: $h + k(t - t) = 1 \Rightarrow h = 1$, por lo que la ley a utilizar es $L(t; p) = 1 + + k(p - t)$, $t < p = 15$. Además, se verifica: $(15.000,5) \sim (20.000,10)$, por lo que podemos plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera: $15.000[1 + + k(15 - 5)] = 20.000[1 + k(15 - 10)] \Rightarrow k = 0{,}10$. Además:

$$(x, 8) = (2.000,4) + (5.000,6) + (8.000,9) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x[1 + 0{,}10(15 - 8)] = 2.000[1 + 0{,}10(15 - 4)] + 5.000[1 + 0{,}10(15 - 6)] +$$
$$+ 8.000[1 + 0{,}10(15 - 9)] \Rightarrow x = 15.588{,}24$$

Por tanto, la solución corresponde a la alternativa *a*.

1.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (210,15) y (208,17).

2. Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (300,38), (290,38) y (310,37).

3. Calcular el capital equivalente en 11 del capital con vencimiento en 8 y cuantía 400.000 €. La ley financiera unitaria es: $A(t; p) = a - 0{,}10(t - p)$, $p = 2$.

4. Hemos de pagar los capitales (8.000,10) y (12.000,13). Proponemos a nuestro acreedor abonarle únicamente (20.000,15). ¿Aceptará nuestra propuesta?

5. Establecer las condiciones que debe cumplir la función $f(t; p) = \dfrac{1}{1 + kp + ht}$ para ser una ley financiera unitaria de descuento.

6. Con ley financiera unitaria $L(t; p) = a + b(p - t)$, $t < p = 14$, los capitales (6.000,4) y (10.000,10) son equivalentes. La cuantía x de la suma financiera calcu-

© Ediciones Pirámide

lada en el punto 6 de los capitales (3.000,3), (4.000,5) y (6.000,9) es: *a*) 12.610 < < x < 12.620; *b*) 32.790 < x < 32.810; *c*) 32.775 < x < 32.785; *d*) 12.600 < x < 12.605.

7. Determinar el valor de x para que los dos conjuntos de capitales financieros siguientes sean equivalentes, de acuerdo con la ley financiera unitaria que se indica:

$$A = \{(10.000,8); (400.000,12)\}$$

$$B = \{(200.000,10); (x, 14)\}$$

$$L(t; p) = 1 + 0{,}15(p - t),\ p = 18$$

© Ediciones Pirámide

2 Conceptos básicos (II)

OBJETIVOS

- Entender el concepto y las características de las operaciones financieras.
- Identificar las distintas modalidades de operaciones financieras.
- Comprender y aplicar el postulado de equivalencia financiera como criterio de equilibrio en toda operación financiera.
- Entender el concepto de saldo financiero y su interpretación económica.
- Aprender a determinar el saldo financiero de una operación.

SUMARIO

2.1. Operaciones financieras: concepto y características.
2.2. Clasificación de las operaciones financieras.
2.3. Postulado de equivalencia financiera.
2.4. Saldo financiero.
2.5. Ejercicios y problemas resueltos.
2.6. Ejercicios y problemas propuestos.

2.1. OPERACIONES FINANCIERAS: CONCEPTO Y CARACTERÍSTICAS

Cualquier sujeto económico puede disponer en un determinado momento de recursos financieros y decidir invertirlos para obtener unos rendimientos futuros. De esta forma entrega un cierto capital financiero, que recuperará en el futuro conjuntamente con los rendimientos que el mismo le produzca. Por ejemplo, adquiere un piso por importe de 120.000 €, y lo vende al cabo de 4 años por 145.000 €. Podemos señalar que la operación ha supuesto intercambiar el capital financiero (120.000,0) por el capital (145.000,4). También cualquier sujeto puede solicitar préstamos con el fin de disponer de liquidez para atender sus necesidades de consumo y/o inversión. De esta forma, dicho sujeto percibe un capital financiero que se obliga a devolver en el futuro, además de pagar una determinada cuantía por su utilización. Por ejemplo, le prestan 60.000 €, que se obliga a devolver mediante dos pagos con vencimiento dentro de un año y dentro de dos, por importes respectivos de 35.000 y 31.000 euros. La operación ha supuesto intercambiar el capital financiero (60.000,0) por los capitales (35.000,1) y (31.000,2).

Las dos operaciones anteriores han supuesto intercambiar capitales financieros de distintos vencimientos. En general, en la actividad económica se llevan a cabo intercambios de capitales financieros, cediendo unos en determinados momentos y percibiendo otros en momentos distintos. Tales intercambios de capitales financieros con distintos vencimientos constituyen operaciones financieras.

En general, constituye una operación financiera[1] **«toda acción que intercambia o sustituye unos capitales financieros por otros de distintos vencimientos; o más abreviadamente, todo cambio no simultáneo de capitales».**

[1] Gil Peláez (1987: 25).

© Ediciones Pirámide

Los intercambios de capitales financieros no se realizan de forma arbitraria, sino que es preciso señalar un criterio financiero de valoración de tales capitales. Por ello podemos entender por operación financiera[2] **«todo intercambio de capitales financieros que se realiza de acuerdo con un criterio financiero de valoración».**

En consecuencia, es necesario destacar que en toda operación financiera ha de transcurrir cierto tiempo entre los vencimientos de los capitales financieros que la constituyen, lo que implica la no simultaneidad de los intercambios. Así, por ejemplo, una operación de compraventa al contado no constituye una operación financiera en el sentido aquí expuesto, pues se trata de un intercambio de capitales con idéntico vencimiento. En cambio, constituye una operación financiera la compraventa con pago inicial de una parte del precio y el resto de forma aplazada, ya que se produce un intercambio de capitales financieros con distintos vencimientos.

Teniendo en cuenta el concepto de capital financiero, también podemos señalar que[3] **«en la vida real la operación financiera se presenta como un cambio no simultáneo de bienes económicos, efectuado entre dos personas naturales o jurídicas».**

De acuerdo con lo expuesto, en toda operación financiera intervienen sujetos económicos que intercambian capitales financieros con distintos vencimientos. Por ello, podemos señalar como **características fundamentales** de toda operación financiera las siguientes:

a) **Sujetos económicos** que intervienen en la operación. En toda operación financiera intervienen dos partes (personas físicas o jurídicas), que son los elementos subjetivos. La persona que inicia la operación entregando el primer capital se denomina **acreedor inicial o prestamista.** El otro sujeto, es decir, el que recibe el primer capital, se llama **deudor inicial o prestatario.**

b) **Dos conjuntos de capitales financieros que se intercambian,** denominados **prestación** y **contraprestación,** que constituyen los elementos objetivos. La prestación está formada por todos los capitales que se compromete a entregar la parte que inicia la operación (el acreedor inicial o prestamista). En cambio, la contraprestación la integra el conjunto de capitales que se compromete a entregar el deudor inicial o prestatario. En general:

$$\text{Prestación: } \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_m, t_m)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(C'_1, t'_1), (C'_2, t'_2), ..., (C'_n, t'_n)\}$$

[2] Meneu et al. (1994: 11).
[3] Gil Peláez (1987: 47).

© Ediciones Pirámide

Conforme a lo señalado, como el primer capital pertenece a la prestación, ha de ser $t_1 < t'_1$, mientras que el último capital puede pertenecer a la prestación, siendo $t_m > t'_n$, o bien a la contraprestación, verificándose $t_m < t'_n$.

c) **Duración de la operación.** El vencimiento del primer capital constituye el **origen** de la operación, mientras que el vencimiento del último es el **final** de la misma. El tiempo que transcurre entre el origen y el final se denomina **duración** de la operación. Tal y como hemos señalado, el primer capital forma parte del conjunto prestación, mientras que el último capital pertenecerá a la prestación o a la contraprestación. En la hipótesis de que el último capital pertenezca a la contraprestación, podemos representar gráficamente una operación financiera de la siguiente forma:

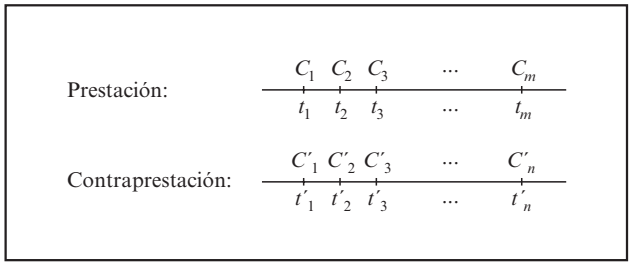


Figura 2.1.

En el gráfico anterior, el origen es el punto t_1, mientras que el final es el t'_n. La duración es la diferencia $t'_n - t_1$.

d) **Ley financiera de valoración.** El acuerdo de intercambio de capitales financieros que realizan los sujetos de la operación debe efectuarse pactando un criterio financiero de valoración.

Según lo expuesto, una operación financiera supone para cada uno de sus sujetos la entrega de un conjunto de capitales financieros o conjunto de pagos, para recibir otro conjunto de capitales o conjunto de cobros. El acreedor inicial o prestamista comienza la operación efectuando un pago, y el conjunto de todos los que realiza, que son cobros para el otro sujeto, constituye la prestación de la operación. En cambio, el deudor inicial recibe el primer cobro, y el conjunto de todos los pagos que se compromete a realizar, que serán cobros para el otro sujeto, se llama contraprestación. Dicho de otro modo, la prestación está formada por el conjunto de capitales financieros en el que está el primer capital que se intercambia, siendo el otro conjunto de capitales la contraprestación.

© Ediciones Pirámide

En consecuencia, dos sujetos económicos llevarán a cabo una operación financiera estableciendo un acuerdo sobre las cuantías y los vencimientos de los capitales a intercambiar, y fijando el criterio financiero mediante el cual se valoran tales capitales. Acordar el criterio financiero de valoración implica definir la ley concreta de valoración, así como el punto p de aplicación de la misma.

2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

De entre los diversos criterios que se pueden utilizar para clasificar las operaciones financieras, vamos a destacar los siguientes:

a) Por el **número de capitales** que intervienen se distingue entre **operaciones elementales o simples** y **operaciones compuestas.** Cuando hay un solo capital tanto en la prestación como en la contraprestación, la operación es simple; por ejemplo, el descuento bancario de una letra, por el que el prestatario recibe una cuantía en un determinado momento, debiendo satisfacer otra con posterioridad.

Cuando hay varios capitales en la prestación y/o en la contraprestación, la operación es compuesta. En estas operaciones se puede distinguir entre operaciones de amortización, operaciones de constitución y operaciones doblemente compuestas.

En las operaciones compuestas de amortización, la prestación está integrada por un solo capital y por varios en la contraprestación. Por ejemplo, un préstamo por el cual el deudor inicial recibe una cuantía de dinero, comprometiéndose a abonar diversas cantidades en el futuro. Si bien la mayoría de las operaciones de amortización son de contraprestación múltiple, también se contratan operaciones de amortización simples. Por ejemplo, un préstamo por el cual el deudor inicial recibe una determinada cantidad de dinero, comprometiéndose a abonar como contraprestación una sola cuantía en una fecha futura.

En las operaciones compuestas de constitución, la prestación está integrada por varios capitales y la contraprestación sólo por uno. Por ejemplo, una cuenta de ahorro vivienda en la cual se van depositando cuantías en una entidad de crédito para disponer de su suma financiera transcurrido un cierto tiempo. Aunque la gran mayoría de operaciones de constitución lo son de prestación múltiple y contraprestación única, también se pueden pactar operaciones con el calificativo de constitución, por las que se entrega un solo capital para recibir en el futuro otro equivalente.

Las operaciones doblemente compuestas están integradas por varios capitales tanto en la prestación como en la contraprestación. Un ejemplo es el de una cuenta bancaria de crédito, por la cual el deudor va disponiendo de cuantías que le

© Ediciones Pirámide

presta una entidad de crédito, y también va realizando aportaciones a dicha cuenta a fin de disminuir su deuda.

En cualquier caso, lo que interesa de una operación financiera, según el número de capitales que la integran, no es el nombre que se le dé (de amortización o de constitución), sino la distribución temporal de los compromisos que las partes contraen.

b) Por la **forma de definición,** se distingue entre operaciones predeterminadas y operaciones posdeterminadas. Cuando desde el momento inicial se conocen las cuantías de todos los capitales y sus vencimientos, la operación es **predeterminada;** por ejemplo, una imposición a plazo fijo, por la que un cliente de una entidad financiera entrega a ésta una cuantía que la misma se compromete a devolver, mediante un capital financiero equivalente, en un vencimiento futuro previamente establecido.

Cuando algunas de las cuantías de los capitales o sus vencimientos sólo pueden conocerse una vez finalice la operación, la misma se denomina **posdeterminada.** Por ejemplo, una operación de préstamo en la que las cuantías que ha de pagar el deudor inicial son desconocidas, fijándose las mismas en función de la evolución de algún índice.

c) Por el **tipo de criterio financiero,** se distingue entre operaciones de descuento, operaciones de capitalización y operaciones mixtas. En las **operaciones de descuento** la ley financiera pactada es una ley de descuento, por lo que el punto p de aplicación de la misma es igual o anterior al primer vencimiento. Si la ley pactada es **de capitalización,** también lo es la operación, siendo el punto p igual o posterior al último vencimiento. Y es **mixta** cuando una parte de la operación se valora con un criterio de capitalización, mientras que la otra parte se valora con un criterio de descuento, por lo que el punto p está situado entre el primer vencimiento y el último.

2.3. POSTULADO DE EQUIVALENCIA FINANCIERA

Supongamos dos sujetos económicos que desean llevar a cabo entre sí una operación financiera, es decir, intercambiarse dos conjuntos de capitales financieros. Una de las cuestiones que se plantearán es la siguiente: ¿cuáles son las condiciones que deben verificar ambos conjuntos para poderlos intercambiar?

Una de las condiciones es que los compromisos de ambos sujetos, plasmados en los capitales financieros que integran los conjuntos a intercambiar, sean financieramente equivalentes; o lo que es lo mismo, ha de existir un equilibrio bilateral entre sus compromisos. Por tanto, una vez acordado el criterio financiero de valoración, lo que entrega una de las partes ha de ser financie-

© Ediciones Pirámide

ramente equivalente a lo que entrega la otra. En consecuencia, los conjuntos prestación y contraprestación han de ser equivalentes, de modo que sus correspondientes capitales suma en un mismo momento del tiempo tendrán idéntico valor.

Todo lo expuesto queda sintetizado en el *postulado* o *principio de equivalencia financiera:* **en toda operación financiera ha de verificarse la equivalencia entre el conjunto de capitales de la prestación y el conjunto de capitales de la contraprestación, de acuerdo con un criterio financiero de valoración.** Por tanto, fijado un criterio financiero de valoración, en cualquier momento del tiempo de duración de la operación la suma financiera de los capitales de la prestación ha de coincidir con la suma financiera de los capitales de la contraprestación: $S = S'$, siendo S la suma financiera en un punto de todos los capitales de la prestación, y S' la suma financiera en el mismo punto de todos los capitales de la contraprestación.

La igualdad de sumas financieras se puede plantear en cualquier momento del tiempo, siendo, no obstante, más sencillo plantearla en el origen de la operación, en el punto p o en el final de la misma, según la operación.

Ejercicio 2.1

Las personas A y B acuerdan realizar la operación financiera definida por los conjuntos siguientes:

A entrega los capitales: {(80.000,0); (50.000,3)}

B entrega los capitales: {(40.000,1); (20.000,4); (X, 7)}

Sabiendo que la ley de valoración pactada es $L(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$, $p = 8$, calcular el valor de X.

Resolución

De acuerdo con el postulado de equivalencia financiera, los dos conjuntos de capitales que definen las obligaciones de las partes han de ser equivalentes; es decir, fijado un momento del tiempo, la suma financiera de los capitales del conjunto prestación, formado por los capitales que entrega A, ha de coincidir con la suma financiera de los capitales del conjunto contraprestación, formado por los capitales que entrega B. Si planteamos la igualdad de sumas, por ejemplo en 8 tenemos:

$$(S, 8) = (80.000,0) + (50.000,3)$$

$$(S', 8) = (40.000,1) + (20.000,4) + (X, 7)$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta el concepto de suma financiera:

$$S[1 + 0{,}05(8 - 8)] = 80.000[1 + 0{,}05(8 - 0)] + 50.000[1 + 0{,}05(8 - 3)]$$

$$S'[1 + 0{,}05(8 - 8)] = 40.000[1 + 0{,}05(8 - 1)] + 20.000[1 + 0{,}05(8 - 4)] + X[1 + \\ + 0{,}05(8 - 7)]$$

Como $S = S'$, queda:

$$80.000[1 + 0{,}05(8 - 0)] + 50.000[1 + 0{,}05(8 - 3)] = 40.000[1 + 0{,}05(8 - 1)] + \\ + 20.000[1 + 0{,}05(8 - 4)] + X[1 + 0{,}05(8 - 7)] \Rightarrow X = 91.904{,}76$$

EJERCICIO 2.2

Una operación financiera se valora con la siguiente ley: $A(t; p) = 1 - 0{,}08(t - p)$, $p = 0$, siendo los capitales de la misma:

Prestación: {(500.000,0)}

Contraprestación: {(100.000,1); (X, 3)}

Determinar la cuantía X.

Resolución

Planteamos la equivalencia financiera en el origen:

$$500.000 = 100.000[1 - 0{,}08(1 - 0)] + X[1 - 0{,}08(3 - 0)] \Rightarrow X = 536.842{,}11$$

2.4. SALDO FINANCIERO

Hemos señalado que en cualquier operación financiera los compromisos de las partes han de ser equivalentes. Si no lo fuesen, los sujetos de la misma no estarían dispuestos a realizarla. Ahora bien, dichos sujetos van entregando y recibiendo capitales a lo largo de la duración de la operación, pero en cualquier momento antes del vencimiento cualquiera de los sujetos habrá entregado, en valor financiero en dicho momento, más de lo recibido, siendo importante determinar el valor de cuánto le falta por recibir. Para ello se introduce el concepto de saldo financiero o **reserva matemática** de una operación financiera.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 2.3

Una operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}03(p - t)$, $p = 10$. Los capitales que la integran son:

$$\text{Prestación: } \{(400.000,0); (200.000,1)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(100.000,3); (100.000,4); (150.000,6); (X, 7)\}$$

Determinar el valor de X y el saldo de la operación en el punto 5.

Resolución

Para determinar X aplicamos el postulado de equivalencia financiera en 10. La ecuación de equivalencia es:

$$400.000[1 + 0{,}03(10 - 0)] + 200.000[1 + 0{,}03(10 - 1)] = 100.000[1 + 0{,}03(10 - 3)] + 100.000[1 + 0{,}03(10 - 4)] + 150.000[1 + 0{,}03(10 - 6)] + X[1 + 0{,}03(10 - 7)] \Rightarrow X = 336.697{,}25$$

Hasta el momento 5 los sujetos se han intercambiado los capitales correspondientes. Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿cuánto vale en 5 lo que ha entregado cada sujeto? Para responder, calculamos la suma financiera en dicho punto de los capitales ya entregados. Denominando $(S_1, 5)$ a la suma financiera en 5 de los capitales con vencimiento igual o anterior a 5 que forman parte de la prestación, y $(S_1', 5)$ a la correspondiente suma de los de la contraprestación, tenemos:

$$(S_1, 5) = (400.000,0) + (200.000,1)$$

$$(S_1', 5) = (100.000,3) + (100.000,4)$$

Y de acuerdo con el concepto de suma financiera se tiene:

$$S_1[1 + 0{,}03(10 - 5)] = 400.000[1 + 0{,}03(10 - 0)] + 200.000[1 + 0{,}03(10 - 1)]$$

$$S_1'[1 + 0{,}03(10 - 5)] = 100.000[1 + 0{,}03(10 - 3)] + 100.000[1 + 0{,}03(10 - 4)]$$

$$S_1 = 673.043{,}48; \quad S_1' = 207.826{,}09$$

La diferencia entre el valor financiero en 5 de lo que un sujeto ha entregado y lo que ha recibido constituye el saldo financiero o reserva matemática de la operación en 5:

$$R_5 = S_1 - S_1' = 673.043{,}48 - 207.826{,}09 = 465.217{,}39$$

© Ediciones Pirámide

Veamos el planteamiento general. Supongamos para ello una operación financiera cualquiera y q un momento del intervalo temporal de duración de la misma. Por el postulado de equivalencia financiera se verifica en q la igualdad entre el valor financiero del conjunto de capitales de la prestación y el valor financiero de los capitales de la contraprestación: $S = S'$.

Podemos descomponer las sumas anteriores en dos sumandos, recogiendo el primero la suma de los capitales vencidos hasta q, y el segundo la de los capitales con vencimientos posteriores a q:

$$\left.\begin{array}{l} S = S_1 + S_2 \\ S' = S'_1 + S'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2 \Rightarrow S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2$$

siendo:

- S_1: suma financiera en q de los capitales de la prestación con vencimiento igual o anterior a q, o, lo que es lo mismo, suma financiera en q de la prestación pasada o vencida.
- S_2: suma financiera en q de los capitales de la prestación con vencimiento posterior a q, o, lo que es lo mismo, suma financiera en q de la prestación futura o pendiente de vencimiento.
- S'_1: suma financiera en q de los capitales de la contraprestación con vencimiento igual o anterior a q, o sea, suma financiera en q de la contraprestación pasada o vencida.
- S'_2: suma financiera en q de los capitales de la contraprestación con vencimiento posterior a q, o sea, suma financiera en q de la contraprestación futura o pendiente de vencimiento.

Gráficamente, tenemos:

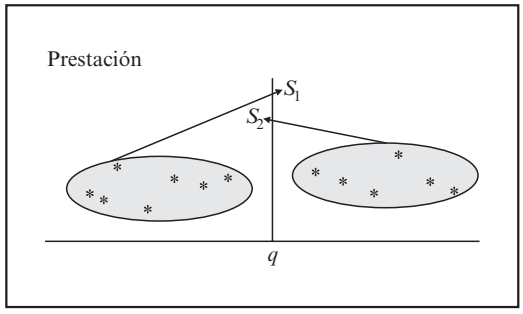


Figura 2.2.

© Ediciones Pirámide

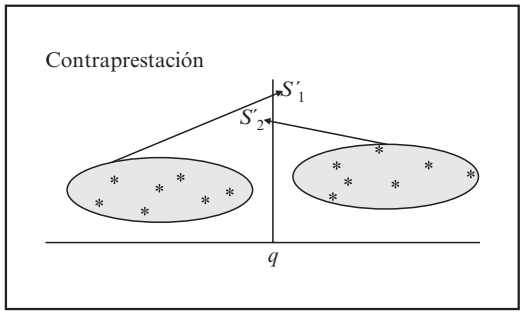


Figura 2.3.

Hemos visto que se verifica $S_1 - S_1' = S_2' - S_2$. Estas diferencias nos permiten introducir el concepto de saldo financiero o reserva matemática. Así, el saldo financiero en q o reserva matemática en q nos indica la diferencia, valorada en dicho punto, entre las cuantías de los capitales equivalentes en q a la prestación y contraprestación pasadas. También nos indica la diferencia de los capitales equivalentes en q a la contraprestación y prestación futuras:

$$R_q = S_1 - S_1' = S_2' - S_2$$

Por tanto, **el saldo financiero o reserva matemática es el capital que mide, en un determinado momento, la diferencia financiera entre los compromisos ya cumplidos por las partes, o entre los que faltan por cumplir.**

De la ecuación anterior se deduce que el mismo se puede calcular por dos métodos, los cuales obviamente conducen al mismo resultado:

a) **Método retrospectivo:** diferencia financiera entre los compromisos pasados o vencidos: $R_q = S_1 - S_1'$.

b) **Método prospectivo:** diferencia financiera entre los compromisos futuros o pendientes de vencimiento: $R_q = S_2' - S_2$.

EJERCICIO 2.4

Determinada operación financiera se pacta con el criterio de valoración siguiente: $A(t; p) = 1 - 0{,}02(t - p)$, $p = 0$. Los capitales que la integran son:

Prestación: {(20.000,0); (10.000,6)}

Contraprestación: {(5.000,2)}; (6.000,3); (7.000,5); (X, 9)}

Determinar por ambos métodos el saldo en 4.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Calculamos en primer lugar el valor de X. Para ello planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$20.000 + 10.000(1 - 0{,}02 \times 6) = 5.000(1 - 0{,}02 \times 2) + 6.000(1 - 0{,}02 \times 3) +$$
$$+ 7.000(1 - 0{,}02 \times 5) + X(1 - 0{,}02 \times 9) \Rightarrow X = 14.707{,}32$$

a) Saldo por el método retrospectivo. Para ello calculamos la suma en 4 de los capitales cuyo vencimiento es anterior a dicho punto:

$$(S_1, 4) = (20.000{,}0)$$

$$(S_1', 4) = (5.000{,}2) + (6.000{,}3)$$

Y en consecuencia, se verifica:

$$S_1(1 - 0{,}02 \times 4) = 20.000 \Rightarrow S_1 = 21.739{,}13$$

$$S_1'(1 - 0{,}02 \times 4) = 5.000(1 - 0{,}02 \times 2) + 6.000(1 - 0{,}02 \times 3) \Rightarrow S_1' = 11.347{,}83$$

$$R_4 = S_1 - S_1' = 21.739{,}13 - 11.347{,}83 = 10.391{,}30$$

b) Saldo por el método prospectivo. Calculamos la suma en 4 de los capitales cuyo vencimiento es posterior a dicho momento:

$$(S_2, 4) = (10.000{,}6)$$

$$(S_2', 4) = (7.000{,}5) + (14.707{,}32; 9)$$

Realizando las operaciones correspondientes obtenemos:

$$S_2(1 - 0{,}02 \times 4) = 10.000(1 - 0{,}02 \times 6) \Rightarrow S_2 = 9.565{,}22$$

$$S_2'(1 - 0{,}02 \times 4) = 7.000(1 - 0{,}02 \times 5) + 14.707{,}32(1 - 0{,}02 \times 9) \Rightarrow S_2' = 19.956{,}52$$

$$R_4 = S_2' - S_2 = 19.956{,}52 - 9.565{,}22 = 10.391{,}30$$

Vemos que, efectivamente, por ambos métodos el saldo o reserva matemática en 4 tiene idéntico valor: 10.391,30. La cuantía del saldo nos indica el valor en 4 de lo que el prestamista ha entregado en exceso sobre lo que ha recibido.

En general, si en el momento q se fuese a cancelar la operación financiera, de acuerdo con el mismo criterio financiero pactado inicialmente, como los capitales

© Ediciones Pirámide

que ambos sujetos han entregado no tienen el mismo valor en dicho momento, el saldo financiero es el capital que tendría que entregar en q la parte que ha entregado menos hasta ese momento para que la operación pudiese quedar saldada.

Como el saldo calculado por el método prospectivo tiene idéntico valor que el determinado por el método retrospectivo o con los capitales vencidos hasta q, podemos señalar que también el saldo mide lo que en el futuro habrá de entregar adicionalmente la parte que ha entregado menos para que la operación quede con saldo cero al final.

El saldo en cualquier punto distinto del final puede tomar un valor positivo, nulo o negativo. En el momento final ha de tomar valor cero, ya que la operación verifica el postulado de equivalencia financiera, tal y como hemos señalado, por lo que la diferencia entre las sumas financieras de la prestación y de la contraprestación es nula.

Cuando el saldo es positivo, el valor financiero de la prestación pasada supera al de la contraprestación vencida; cuando es negativo sucede lo contrario:

$$R_q > 0 \Rightarrow S_1 - S_1' > 0 \Rightarrow S_1 > S_1'$$

$$R_q < 0 \Rightarrow S_1 - S_1' < 0 \Rightarrow S_1 < S_1'$$

Por tanto, **si el saldo es positivo,** constituye un capital **a favor de la prestación pasada,** pues es el sujeto prestamista quien ha entregado, en valor financiero, mayor cuantía. Cuando el **saldo sea negativo,** constituye su valor absoluto un capital **a favor de la contraprestación pasada,** ya que ha sido la parte que ha entregado un mayor valor financiero.

Cuando en el punto en el que se calcule el saldo venza algún capital, distinguimos entre **saldo a la izquierda** (R_q^-) y **saldo a la derecha** (R_q^+). El saldo a la izquierda es el calculado antes de que la cuantía correspondiente haya vencido. En cambio, el saldo a la derecha es el calculado después de que la cuantía citada haya vencido.

Para calcular el saldo a la izquierda de un punto, entre los capitales vencidos no se incluye el capital que venza en dicho punto. En cambio, sí se incluye entre los capitales futuros. Para calcular el saldo a la derecha de un punto, entre los capitales vencidos se ha de incluir el capital con vencimiento en dicho punto, por lo que no se le incluye entre los capitales pendientes de vencimiento.

EJERCICIO 2.5

Una operación financiera está formada por los siguientes capitales:

Prestación: {(800,0); (600,1)}

Contraprestación: {(100,3); (400,4); (600,5); (800,6); (X, 9)}

© Ediciones Pirámide

El criterio de valoración financiera pactado es: $A(t; p) = 1 - 0{,}10(t - p)$, $p = 0$. Determinar el saldo financiero por ambos métodos a la izquierda de 5, y a la derecha de 6.

Resolución

Para determinar el valor de X planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$800 + 600(1 - 0{,}10 \times 1) = 100(1 - 0{,}10 \times 3) + 400(1 - 0{,}10 \times 4) + 600(1 - 0{,}10 \times \times 5) + 800(1 - 0{,}10 \times 6) + X(1 - 0{,}10 \times 9) \Rightarrow X = 4.100$$

a) Saldo a la izquierda de 5 por el método retrospectivo. Para ello calculamos las sumas a la izquierda de 5, o sea, las sumas financieras de los capitales cuyos vencimientos son anteriores a 5:

$$(S_1^-, 5) = (800,0) + (600,1)$$

$$(S_1'^-, 5) = (100,3) + (400,4)$$

Por tanto, se verifica:

$$S_1^-(1 - 0{,}10 \times 5) = 800(1 - 0{,}10 \times 0) + 600(1 - 0{,}10 \times 1) \Rightarrow S_1^- = 2.680$$

$$S_1'^-(1 - 0{,}10 \times 5) = 100(1 - 0{,}10 \times 3) + 400(1 - 0{,}10 \times 4) \Rightarrow S_1^- = 620$$

$$R_5^- = S_1^- - S_1'^- = 2.680 - 620 = 2.060$$

En consecuencia, el saldo en 5, antes de entregar el capital con ese vencimiento, vale 2.060 y es favorable al prestamista.

b) Saldo a la izquierda de 5 por el método prospectivo. Calculamos la suma a la izquierda de 5 de los capitales, tanto de la prestación como de la contraprestación, cuyos vencimientos son iguales o posteriores a 5:

$$\left.\begin{array}{l}(S_2^-, 5) = (0,5) \\ (S_2'^-, 5) = (600,5) + (800,6) + (4.100,9)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S_2^- = 0 \\ S_2'^- = 2.060\end{array}\right\} \Rightarrow R_5^- = S_2'^- - S_2^- =$$

$$= 2.060 - 0 = 2.060$$

Naturalmente, el valor del saldo coincide al calcularse por cualquiera de los dos métodos.

© Ediciones Pirámide

c) Saldo a la derecha de 6 por el método retrospectivo. Hemos de calcular el saldo una vez haya vencido el capital con vencimiento en 6, por lo que se le incluirá en la contraprestación pasada y no en la futura. Así, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(S_1^+, 6) = (800,0) + (600,1)\\ (S_1'^+, 6) = (100,3) + (400,4) + (600,5) + (800,6)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S_1^+ = 3.350\\ S_1'^+ = 2.325\end{array}\right\} \Rightarrow R_6^+ =$$

$$= S_1^+ - S'^+_1 = 3.350 - 2.325 = 1.025$$

d) Saldo a la derecha de 6 por el método prospectivo. Tal y como hemos señalado, al calcular el saldo a la derecha de un punto, el capital con vencimiento en dicho punto ya ha vencido, por lo que no se le incluye entre los capitales futuros. Por ello, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(S_2^+, 6) = (0,6)\\ (S_2'^+, 6) = (4.100,9)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S_2^+ = 0\\ S_2'^+ = 1.025\end{array}\right\} \Rightarrow R_6^+ = S_2'^+ - S_2^+ = 1.025 - 0 = 1.025$$

Vemos que el saldo, una vez se ha entregado el capital con vencimiento en 6, es favorable al prestamista. Por ello, la suma financiera en 6 de los capitales futuros que ha de entregar la contraprestación es mayor que la suma en 6 de los capitales futuros de la prestación.

2.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Los capitales que forman parte de una operación financiera pactada con la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}04)^{p-t}$ son:

Prestación: {(100.000,0); (120.000,2)}

Contraprestación: {(200.000,5); (X, 6)}

Determinar el valor de X.

Resolución

Por el postulado de equivalencia financiera se ha de cumplir la equivalencia entre los dos conjuntos citados:

© Ediciones Pirámide

$$100.000 \times 1{,}04^{p} + 120.000 \times 1{,}04^{p-2} = 200.000 \times 1{,}04^{p-5} + X \times 1{,}04^{p-6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = 58.914{,}93$$

2. Una operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = a + 0{,}10(p - t)$, $p = 15$. Los capitales que la forman son:

Prestación: {(X, 3); (4.000,6); (5.000,9)}

Contraprestación: {(4.750,4)}; (Y, 10)}

Determinar X e Y, sabiendo que el saldo a la izquierda de 6 es favorable a la contraprestación por valor de 3.050.

Resolución

De acuerdo con las propiedades de las leyes financieras, se ha de verificar: $L(t; t) = 1 = a + 0{,}10(t - t) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$. Por otra parte, el saldo a la izquierda de 6 favorable a la contraprestación implica que toma un valor negativo: $R_6^- = -3.050 = S_1^- - S_1'^-$. Teniendo en cuenta que $(S_1^-, 6) = (X, 3)$ y $(S_1'^-, 6) = (4.750{,}4)$, al realizar operaciones se llega a: $S_1^- = \dfrac{2{,}2X}{1{,}9}$; $S_1'^- = -5.250$, por lo que podemos plantear la ecuación:

$$R_6^- = -3.050 = S_1^- - S_1'^- = \frac{2{,}2X}{1{,}9} - 5.250 \Rightarrow X = 1.900$$

Teniendo en cuenta el valor de X, de la ecuación de equivalencia financiera entre el conjunto prestación y contraprestación, deduciremos el valor de Y:

$$1.900(1 + 0{,}10 \times 12) + 4.000(1 + 0{,}10 \times 9) + 5.000(1 + 0{,}10 \times 6) =$$
$$= 4.750(1 + 0{,}10 \times 11) + Y(1 + 0{,}10 \times 5) \Rightarrow Y = 6.536{,}67$$

3. Los capitales que integran una operación financiera son:

Prestación: {(100.000,1); (400.000,3)}

Contraprestación: {(150.000,4); (X, 8); (100.000,9)}

La ley de valoración es: $F(t; p) = \begin{cases} 1 + 0{,}05(p - t), & t < p = 7 \\ 1 - 0{,}06(t - p), & t > p = 7 \end{cases}$

Determinar: *a*) saldo a la izquierda de 3 por el método prospectivo; *b*) saldo a la derecha de 8 por el método retrospectivo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

a) Para calcular el saldo a la izquierda de 3 por el método prospectivo necesitamos determinar el valor de X, el cual se deduce de la ecuación de equivalencia entre la prestación y la contraprestación:

$$100.000[1 + 0{,}05(7 - 1)] + 400.000[1 + 0{,}05(7 - 3)] = 150.000[1 + 0{,}05(7 - 4)] + \\ + X[1 - 0{,}06(8 - 7)] + 100.000[1 - 0{,}06(9 - 7)] \Rightarrow X = 371.808{,}51$$

El saldo a la izquierda de 3 por el método prospectivo es: $R_3^- = S_2'^- - S_2^-$, siendo:

$$(S_2^-, 3) = (400.000{,}3) \Rightarrow S_2^- = 400.000$$

$$(S_2'^-, 3) = (150.000{,}4) + (371.808{,}51; 8) + (100.000{,}9)$$

Al realizar las correspondientes operaciones se obtiene el valor a la izquierda de 3 de la contraprestación futura y el del saldo correspondiente en dicho punto: $S_2'^- = 508.333{,}33 \Rightarrow R_3^- = S_2'^- - S_2^- = 508.333{,}33 - 400.000 = 108.333{,}33$. Podemos comprobar el valor obtenido calculando nuevamente dicho saldo, ahora por el método retrospectivo:

$$\left.\begin{array}{l} R_3^- = S_1^- - S_1'^- \\ (S_1^-, 3) = (100.000{,}1) \Rightarrow S_1^- = 108.333{,}33 \\ (S_1'^-, 3) = (0{,}3) \Rightarrow S_1'^- = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R_3^- = 108.333{,}33 - 0 = 108.333{,}33$$

b) El saldo a la derecha de 8 por el método retrospectivo es: $R_8^+ = S_1^+ - S_1'^+$, siendo:

$$\left.\begin{array}{l} (S_1^+, 8) = (100.000{,}1) + (400.000{,}3) \Rightarrow S_1^+ = 648.936{,}17 \\ (S_1'^+, 8) = (150.000{,}4) + (371.808{,}51; 8) \Rightarrow S_1'^+ = 555.319{,}15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_8^+ = 648.936{,}17 - 555.319{,}15 = 93.617{,}02$$

Podemos comprobar el valor anterior calculándolo por el método prospectivo:

$$\left.\begin{array}{l} R_8^+ = S_2'^+ - S_2^+ \\ (S_2^+, 8) = (0{,}8) \Rightarrow S_2^+ = 0 \\ (S_2'^+, 8) = (100.000{,}9) \Rightarrow S_2'^+ = 93.617{,}02 \end{array}\right\} \Rightarrow R_8^+ = 93.617{,}02 - 0 = 93.617{,}02$$

© Ediciones Pirámide

4. En la siguiente operación financiera, calcular el valor de X, sabiendo que el saldo a la izquierda de 4 es favorable a la prestación por una cuantía de 27.392,86:

Prestación: {(12.000,1); (18.000,2)}

Contraprestación: {(5.000,3); (8.000,4); (X, 6)}

La ley de valoración es: $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 7$.

Resolución

Conociendo el valor de la reserva a la izquierda de 4 podemos plantear la ecuación correspondiente y obtener el valor de k:

$$\left.\begin{array}{l} R_4^- = S_1^- - S_1'^- = 27.392,86 \\ (S_1^-, 4) = (12.000,1) + (18.000,2) \\ (S_1'^-, 4) = (5.000,3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$S_1^-(1 + 3k) = 12.000(1 + 6k) + 18.000(1 + 5k) \Rightarrow S_1^- = \frac{30.000 + 162.000k}{1 + 3k}$$

$$S_1'^-(1 + 3k) = 5.000(1 + 4k) \Rightarrow S_1'^- \frac{5.000 + 20.000k}{1 + 3k}$$

$$R_4^- = S_1^- - S_1'^- = 27.392,86 = \frac{30.000 + 162.000k}{1 + 3k} - \frac{5.000 + 20.000k}{1 + 3k} \Rightarrow k = 0,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(t; p) = 1 + 0,04(p - t)$$

Y al plantear la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación total y la contraprestación total, se llega al valor de X:

$$12.000(1 + 0,04 \times 6) + 18.000(1 + 0,04 \times 5) = 5.000(1 + 0,04 \times 4) +$$
$$+ 8.000(1 + 0,04 \times 3) + X(1 + 0,04 \times 1) \Rightarrow X = 20.884,62$$

5. Una operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = 1 + 0,06(p - t)$, $p = 10$. Los capitales que se intercambian son los siguientes:

Prestación: {(15.000,0); (Z, 1)}

Contraprestación: {(10.000,3); (X, 4); (Y, 6)}

Se sabe que la suma financiera en 10 de los capitales (X, 4) e (Y, 6) vale 33.400. Determinar el saldo a la izquierda de 4 por el método retrospectivo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Para calcular el saldo pedido hemos de conocer el valor de Z. Teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, se verifica: $(15.000,0) + (Z, 1) = (10.000,3) + (X, 4) + (Y, 6)$. Además, se cumple: $(X, 4) + (Y, 6) = (33.400,10)$. En consecuencia, la ecuación de equivalencia queda con una sola incógnita:

$$(15.000,0) + (Z, 1) = (10.000,3) + (33.400,10) \Rightarrow 15.000(1 + 0{,}06 \times 10) +$$
$$+ Z(1 + 0{,}06 \times 9) = 10.000(1 + 0{,}06 \times 7) + 33.400(1 + 0{,}06 \times 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z = 15.324{,}68$$

En cuanto al saldo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} R_4^- = S_1^- - S_1'^- \\ (S_1^-, 4) = (15.000,0) + (15.324{,}68; 1) \\ (S_1'^-, 4) = (10.000,3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1^- = 35.000{,}01;\ S_1'^-\ 10.441{,}18 \Rightarrow R_4^- = 24.558{,}83$$

6. En una operación financiera pactada con la ley $A(t; p) = 1 - k(t - p)$, $p = 0$, los capitales de la prestación son: {(1.000,0); (1.100,2); (3.000,7)}. De la contraprestación se conocen los siguientes datos: {(900,3); (1.200,4); $(X, 8)$; $(Y, 9)$}. Hallar todos los capitales de la contraprestación, sabiendo que el saldo a la izquierda de 6 vale 1.325, favorable a la prestación, y a la derecha 675 favorable a la contraprestación, siendo $X + Y = 5.300$.

Resolución

Planteamos la ecuación del saldo a la izquierda de 6 para así obtener el valor de k:

$$\left.\begin{array}{l} R_6^- = S_1^- - S_1'^- = 1.325 \\ (S_1^-, 6) = (1.000,0) + (1.100,2) \\ (S_1'^-, 6) = (900,3) + (1.200,4) \end{array}\right\} \Rightarrow S_1^- = \frac{2.100 - 2.200k}{1 - 6k};\ S_1'^- = \frac{2.100 - 7.500k}{1 - 6k}$$

$$1.325 = \frac{2.100 - 2.200k}{1 - 6k} - \frac{2.100 - 7.500k}{1 - 6k} \Rightarrow k = 0{,}10$$

Por ser $R_6^- \neq R_6^+$, en 6 vence un capital. Como a la izquierda de 6 el saldo es favorable a la prestación y a la derecha lo es a la contraprestación, el capital con vencimiento en 6 pertenece a la contraprestación. Sea C_6' su cuantía. Planteando las ecuaciones del saldo a la izquierda y a la derecha, tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$\left.\begin{aligned} R_6^- &= S_1^- - S_1'^- = 1.325 \\ R_6^+ &= S_1^- - (S_1'^- + C_6') = -675 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_6' = 2.000$$

En consecuencia, la contraprestación es: {(900,3); (1.200,4); (2.000,6); (X, 8); (Y, 9)}.

Para obtener X e Y planteamos la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación:

$$1.000 + 1.100(1 - 0{,}10 \times 2) + 3.000(1 - 0{,}10 \times 7) = 900(1 - 0{,}10 \times 3) +$$
$$+ 1.200(1 - 0{,}10 \times 4) + 2.000(1 - 0{,}10 \times 6) + X(1 - 0{,}10 \times 8) + Y(1 - 0{,}10 \times 9)$$

Y teniendo en cuenta que $X + Y = 5.300$, se obtiene finalmente: $X = 1.000$; $Y = 4.300$.

2.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los capitales que forman una operación financiera son:

Prestación: {(1.000,3); (4.000,6); (5.000,9)}

Contraprestación: {(4.000,4); (Y, 10)}

Sabiendo que la ley de valoración a aplicar es: $L(t; p) = a + 0{,}10(p - t)$, $p = 15$, el saldo X calculado en 5 vale: *a*) $3.090 < X < 3.110$; *b*) $-3.110 < X < -3.090$; *c*) $6.190 < X < 6.210$; *d*) $-6.210 < X < -6.190$.

2. Cierta operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$, $p = 10$. Los capitales de dicha operación son:

Prestación: {(1.000,0); (1.400,2)}

Contraprestación: {(X, 4); (900,5); (Y, 8)}

Sabemos que la suma financiera en 9 de los capitales (900,5) e (Y, 8) vale 2.304,76. Hallar X e Y.

3. En una determinada operación financiera, el saldo a la derecha del momento 10 vale 8.000. Si en dicho momento el prestatario ha de entregar una cuantía de 2.000, el saldo a la izquierda de 10 vale: *a*) 8.000; *b*) con los datos facilitados no es posible calcular el saldo; *c*) 10.000; *d*) 6.000.

© Ediciones Pirámide

4. Los capitales que integran una operación financiera son:

Prestación: $\{(300.000,0); (Z, 2)\}$

Contraprestación: $\{(X, 1); (200.000,3); (Y, 7)\}$

La ley de valoración es: $F(t; p) = \begin{cases} 1 + 0{,}10(p - t), & t < p = 4 \\ 1 - 0{,}09(t - p), & t > p = 4 \end{cases}$

Determinar Z, X e Y, sabiendo que el saldo a la izquierda de 2 vale 241.666,67, y a la derecha de 3 es favorable a la prestación por valor de 609.090,91.

5. Una persona entrega a cierta entidad financiera, al principio de cada trimestre de un determinado año, 20.000 €, retirando al final de cada semestre del mismo año 22.000 €. Las imposiciones se valoran con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, y los reintegros con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}14(p - t)$, siendo el punto p el final del año y estando expresados los valores de t y p en años. El saldo X al final del año vale: *a*) $36.500 < X < 37.000$; *b*) $39.000 < X < 39.500$; *c*) $40.000 < X < 40.500$; *d*) $77.000 < X < 77.500$.

© Ediciones Pirámide

3 Magnitudes financieras

OBJETIVOS

- Entender el concepto de magnitudes financieras.
- Identificar las distintas modalidades de magnitudes financieras.
- Determinar el valor de diversas magnitudes financieras, aplicando tanto leyes de capitalización como de descuento.
- Comprender el significado económico de las diversas magnitudes financieras.

SUMARIO

3.1. Introducción.
3.2. Factores, réditos y tantos en leyes de capitalización.
3.3. Factores, réditos y tantos en leyes de descuento.
3.4. El precio financiero.
3.5. Ejercicios y problemas resueltos.
3.6. Ejercicios y problemas propuestos.

3.1. INTRODUCCIÓN

Para ser capaces de analizar y resolver la problemática vinculada a las operaciones financieras, en su vertiente cuantitativa, resulta adecuado estudiar las diversas magnitudes financieras que se obtienen a partir de las magnitudes fundamentales. En este sentido, la cuantía C y el tiempo t hasta su vencimiento, componentes de un capital financiero, constituyen las **magnitudes financieras fundamentales.**

Además de las magnitudes financieras fundamentales ya citadas, podemos analizar las **magnitudes derivadas,** obtenidas al realizar operaciones con aquéllas. Así, por ejemplo, si tenemos derecho a cobrar el capital financiero (2.000,2), y convenimos con nuestro deudor en recibir su equivalente en 15, por ejemplo el capital de cuantía 4.600, la relación por cociente entre ambas cuantías, o sea, 2,3, constituye una magnitud derivada que nos indica el capital equivalente en 15 por cada unidad de capital con vencimiento en 2. También constituye una magnitud derivada la diferencia de cuantías, o sea, 2.600, que nos pone de manifiesto el incremento absoluto por el diferimiento en el vencimiento de la deuda inicial en 2.

Las magnitudes derivadas de mayor importancia son: factores, réditos, tantos y precio financiero. Su análisis lo vamos a realizar tanto para leyes de capitalización como para leyes de descuento[1].

3.2. FACTORES, RÉDITOS Y TANTOS EN LEYES DE CAPITALIZACIÓN

Para una ley de capitalización, dos capitales equivalentes $[(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)]$ verifican: $C_1 \times L(t_1; p) = C_2 \times L(t_2; p)$. De acuerdo con lo que ya conocemos, si

[1] Para un estudio más amplio, puede consultarse: Gil Peláez (1987: 59).

© Ediciones Pirámide

$t_2 > t_1$, también ha de ser $C_2 > C_1$. Partiendo de la ecuación de equivalencia precedente, vamos a introducir los conceptos de factores, réditos y tantos.

A) Factores

Dados dos capitales equivalentes, **el factor asociado a un cierto intervalo temporal es el número por el que hay que multiplicar la cuantía del capital situado en un extremo de dicho intervalo para obtener la cuantía del capital equivalente con vencimiento en el otro extremo.** Vamos a distinguir entre el factor de capitalización y el factor de contracapitalización.

Denominando $u(t_1, t_2; p)$ al **factor de capitalización** asociado al intervalo temporal (t_1, t_2), tenemos:

$$C_2 = C_1 \times u(t_1, t_2; p) \Rightarrow u(t_1, t_2; p) = \frac{C_2}{C_1}$$

Y teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia entre ambos capitales, se llega a:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} > 1$$

De las expresiones precedentes deducimos que el factor de capitalización nos indica el capital equivalente en t_2 por unidad de capital disponible en t_1. En efecto, para una cuantía unitaria del primer capital tenemos:

$$C_2 = 1 \times u(t_1, t_2; p) \Rightarrow C_2 = u(t_1, t_2; p)$$

Ejercicio 3.1

Para la ley financiera $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, $p = 12$, determinar el factor de capitalización correspondiente al intervalo temporal de extremos 4 y 7.

Resolución

De acuerdo con lo expuesto, tenemos:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} = u(t_1 = 4, t_2 = 7; p = 12) = \frac{1 + 0{,}10(12 - 4)}{1 + 0{,}10(12 - 7)} = 1{,}2$$

En consecuencia, de los datos anteriores se deduce que por cada unidad de capital con vencimiento en 4, su equivalente en 7 vale 1,2.

© Ediciones Pirámide

Del factor de capitalización se obtiene otra magnitud: el factor de contracapitalización. Así, **al inverso del factor de capitalización se le denomina factor de contracapitalización o de capitalización anticipada:**

$$u^*(t_1, t_2; p) = \frac{1}{u(t_1, t_2; p)} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)} < 1$$

El factor de contracapitalización nos indica el capital equivalente en t_1 por unidad de capital, disponible en t_2. En efecto, para una cuantía unitaria del segundo capital tenemos:

$$C_1 = 1 \times u^*(t_1, t_2; p) \Rightarrow C_1 = u^*(t_1, t_2; p)$$

EJERCICIO 3.2

Para la ley financiera $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 12$, el factor de capitalización asociado al intervalo (3,7) vale 1,4. Determinar el factor de contracapitalización correspondiente al intervalo (5,8).

Resolución

De la expresión del factor correspondiente al intervalo (3,7) se deduce:

$$u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 12) = \frac{1 + k(12 - 3)}{1 + k(12 - 7)} = 1{,}4 \Rightarrow k = 0{,}20$$

Y en consecuencia, para el factor de contracapitalización asociado al intervalo (5,8) tenemos:

$$u^*(t_1 = 5, t_2 = 8; p = 12) = \frac{L(8; p)}{L(5; p)} = \frac{1 + 0{,}20(12 - 8)}{1 + 0{,}20(12 - 5)} = 0{,}75$$

B) Réditos

Dados dos capitales equivalentes, hemos deducido que el factor de capitalización correspondiente toma un valor superior a la unidad. Ello nos permite indicar que **el rédito de capitalización asociado a un determinado intervalo temporal es el suplemento a la unidad del correspondiente factor de capitalización:**

$$r(t_1, t_2; p) = u(t_1, t_2; p) - 1$$

© Ediciones Pirámide

Y sustituyendo por las expresiones correspondientes del factor, tenemos:

$$r(t_1, t_2; p) = \frac{C_2}{C_1} - 1 = \frac{C_2 - C_1}{C_1}$$

$$r(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} - 1 = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_2; p)}$$

En consecuencia, el rédito de capitalización correspondiente a un cierto intervalo temporal representa la variación, por unidad de capital inicial, de dos capitales equivalentes. Dicha variación tiene vencimiento al final del intervalo, ya que es donde vence el factor de capitalización.

Partiendo del factor de contracapitalización asociado a un determinado intervalo temporal, que sabemos toma un valor inferior a la unidad, podemos definir el **rédito de contracapitalización, o de capitalización anticipada,** como **el complemento a la unidad del correspondiente factor de contracapitalización:**

$$r^*(t_1, t_2; p) = 1 - u^*(t_1, t_2; p)$$

$$r^*(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2}$$

$$r^*(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_1; p)}$$

De acuerdo con las expresiones precedentes, el rédito de contracapitalización o de capitalización anticipada correspondiente a un cierto intervalo temporal, representa la variación de dos capitales equivalentes por unidad de capital final. Como el factor de contracapitalización, del que se deriva el rédito de contracapitalización, tiene vencimiento al inicio del intervalo temporal considerado, la variación absoluta que representa el rédito de contracapitalización también tiene vencimiento al principio del intervalo.

Hemos señalado que el rédito de capitalización asociado a un cierto intervalo temporal es un capital con vencimiento al final del mismo. Por ello, podemos calcular su equivalente o proyección en p, lo que nos permite definir el **rédito acumulado o referido a p como la proyección en p del rédito de capitalización:**

$$\xi(t_1, t_2; p) = Proy_p\,[r(t_1, t_2; p), t_2] = r(t_1, t_2; p) \times L(t_2; p)$$

Y teniendo en cuenta la expresión correspondiente del rédito de capitalización en función de la ley financiera, queda:

$$\xi(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_2; p)} \times L(t_2; p)$$

$$\xi(t_1, t_2; p) = L(t_1; p) - L(t_2; p)$$

© Ediciones Pirámide

También se verifica que el rédito acumulado es la proyección en p del rédito de contracapitalización:

$$\xi(t_1, t_2; p) = Proy_p\,[r^*(t_1, t_2; p), t_1] = r^*(t_1, t_2; p) \times L(t_1; p) = L(t_1; p) - L(t_2; p)$$

EJERCICIO 3.3

Dada la ley financiera $L(t; p) = 1 + 0{,}01(p^2 - t^2)$, $p = 15$, determinar los réditos de capitalización, de contracapitalización y acumulado, correspondientes al intervalo temporal $t_1 = 3$, $t_2 = 7$.

Resolución

Determinamos los correspondientes factores y, a partir de ellos, los réditos:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} = u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = \frac{1 + 0{,}01(15^2 - 3^2)}{1 + 0{,}01(15^2 - 7^2)} = 1{,}1449$$

$$u^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = \frac{1}{u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15)} = \frac{1}{1{,}1449} = 0{,}8734$$

$$r(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) - 1 = 0{,}1449$$

$$r^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = 1 - u^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = 0{,}1266$$

Podemos observar que por cada unidad con vencimiento en 3, su equivalente en 7 vale $u(t_1 = 3, t_2 = 7; p) = 1{,}1449 = 1 + r(t_1 = 3, t_2 = 7; p)$. Asimismo, por cada unidad con vencimiento en 7, su equivalente en 3 vale $u^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p) = 0{,}8734 = 1 - r^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p) = 1 - 0{,}1266$.

En cuanto al rédito acumulado o referido a p, se tiene:

$$\xi(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = L(t_1; p) - L(t_2; p) =$$
$$= [1 + 0{,}01(15^2 - 3^2)] - [1 + 0{,}01(15^2 - 7^2)] = 0{,}4$$

C) Tantos

Dados dos capitales equivalentes, denominamos **tanto correspondiente a un cierto intervalo temporal al cociente entre el rédito y la amplitud de dicho intervalo temporal.** En consecuencia, tal y como hemos hecho para el rédito, podemos distinguir entre tanto de capitalización y tanto de contracapitalización o de capitalización anticipada.

© Ediciones Pirámide

El **tanto de capitalización** asociado a un cierto intervalo temporal viene dado por el cociente entre el correspondiente rédito de capitalización y la amplitud de dicho intervalo temporal:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{r(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones del rédito de capitalización, se verifica:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{C_2 - C_1}{(t_2 - t_1)C_1}$$

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

Sabemos que el rédito de capitalización representa la variación, por unidad de capital inicial, de dos capitales equivalentes, teniendo dicha variación vencimiento al final del intervalo. En consecuencia, podemos señalar que el tanto de capitalización correspondiente a un intervalo temporal representa la variación de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo. Dicha variación tiene vencimiento al final del intervalo al que se refiere.

El **tanto de contracapitalización o de capitalización anticipada** asociado a un cierto intervalo temporal, viene dado por el cociente entre el correspondiente rédito de contracapitalización y la amplitud del citado intervalo temporal:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{r^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Teniendo en cuenta las expresiones del rédito de contracapitalización, se verifica:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{C_2 - C_1}{(t_2 - t_1)C_2}$$

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

Sabemos que el rédito de contracapitalización representa la variación, por unidad de capital final, de dos capitales equivalentes, teniendo dicha variación vencimiento al principio del intervalo. En consecuencia, podemos señalar que el tanto de contracapitalización correspondiente a un intervalo temporal representa la variación de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y

© Ediciones Pirámide

promedio por unidad de tiempo. Dicha variación tiene vencimiento al inicio del intervalo temporal al que se refiere.

En consecuencia, y de acuerdo con lo expuesto, cualquier tanto representa una variación de cuantía por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo.

EJERCICIO 3.4

Dada la ley financiera $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, $p = 12$, determinar el tanto de capitalización y el de capitalización anticipada para el intervalo temporal $t_1 = 3$, $t_2 = 5$.

Resolución

Podemos determinar los factores del intervalo temporal citado, para a continuación calcular los réditos, obteniendo de ellos los tantos pedidos; o bien sustituir directamente en las expresiones de los tantos. Seguiremos este procedimiento:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_2; p)}$$

$$\rho(t_1 = 3, t_2 = 5; p = 12) = \frac{[1 + 0{,}10(12 - 3)] - [1 + 0{,}10(12 - 5)]}{(5 - 3)[1 + 0{,}10(12 - 5)]} = 0{,}0588$$

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

$$\rho^*(t_1 = 3, t_2 = 5; p = 12) = \frac{[1 + 0{,}10(12 - 3)] - [1 + 0{,}10(12 - 5)]}{(5 - 3)[1 + 0{,}10(12 - 3)]} = 0{,}0526$$

Se ha puesto de manifiesto que para determinar el tanto de capitalización correspondiente a un cierto intervalo temporal, es preciso considerar la amplitud del mismo, por lo que, tal y como hemos señalado, el tanto expresa una variación de cuantía por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo. Por ello, si el tanto representa un promedio por unidad de tiempo, cabe preguntarse qué sucede a medida que la amplitud del intervalo temporal se modifica. En concreto, ¿qué ocurre cuando la amplitud tiende a cero? Para dar respuesta a la cuestión anterior partimos de la expresión del tanto de capitalización en función de la ley financiera para un intervalo temporal $(t, t + h)$:

$$\rho(t, t + h; p) = \frac{L(t; p) - L(t + h; p)}{h \times L(t + h; p)}$$

© Ediciones Pirámide

Cuando la amplitud del intervalo temporal tiende a cero, el correspondiente tanto se denomina **tanto instantáneo,** simbolizándose por $\rho(t; p)$:

$$\rho(t; p) = \lim_{h \to 0} \rho(t, t + h; p) = \lim_{h \to 0} \frac{L(t; p) - L(t + h; p)}{h \times L(t + h; p)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-[L(t + h; p) - L(t; p)]}{h} \times \frac{1}{L(t + h; p)}$$

Si la ley financiera viene dada por una función derivable, en la expresión anterior el límite del primer factor es la derivada parcial de la ley con respecto a t, por lo que nos queda:

$$\rho(t; p) = -\frac{\partial L(t; p)}{\partial t} \times \frac{1}{L(t; p)} = -\frac{\partial \log_e L(t; p)}{\partial t}$$

Hemos señalado que el tanto de capitalización asociado a un intervalo temporal nos indica la variación entre las cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo. Pues bien, cuando la amplitud del citado intervalo temporal es un infinitésimo, o sea, tiende a cero, dicho tanto es instantáneo.

El significado financiero del tanto instantáneo es el mismo que el del tanto de capitalización, pero asociado a un intervalo temporal infinitesimal, por lo que representa una variación relativa de cuantías en cada instante de tiempo. Por tanto, fijado el valor del punto p, el tanto instantáneo es una función de la variable tiempo x:

$$\rho(x; p) = -\frac{\partial \log_e L(x; p)}{\partial x}$$

En la hipótesis de que sea una función integrable en el intervalo (t, p) resulta:

$$\int_t^p \rho(x; p) \times dx = \int_t^p -\frac{\partial \log_e L(x; p)}{\partial x} \times dx = -[\log_e L(x; p)]_t^p =$$

$$= -[\log_e L(p; p) - \log_e L(t; p)] = -\log_e 1 + \log_e L(t; p) = \log_e L(t; p)$$

Y al despejar deducimos una expresión general para obtener cualquier ley financiera en función del tanto instantáneo:

$$L(t; p) = e^{\int_t^p \rho(x; p) \times dx}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 3.5

Determinar la ley financiera de capitalización cuyo tanto instantáneo es $\rho(t; p) = 0{,}04t^3$.

Resolución

Calculamos $\int_t^p \rho(x; p) \times dx$ y después sustituimos en la ecuación precedente:

$$\int_t^p \rho(x; p) \times dx = \int_t^p 0{,}04x^3 \times dx = [0{,}01x^4]_t^p = 0{,}01(p^4 - t^4)$$

$$L(t; p) = e^{0{,}01(p^4 - t^4)}$$

3.3. FACTORES, RÉDITOS Y TANTOS EN LEYES DE DESCUENTO

Tal y como hemos visto con las leyes de capitalización, vamos a estudiar las magnitudes derivadas más destacadas en la hipótesis de que la equivalencia de capitales se plantee mediante una ley de descuento. Así, supongamos que, de acuerdo con una ley de descuento, tenemos dos capitales equivalentes $(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)$, verificándose, por tanto, $C_1 \times A(t_1; p) = C_2 \times A(t_2; p)$. De acuerdo con lo que ya conocemos, si $t_2 > t_1$ también ha de ser $C_2 > C_1$. Partiendo de la ecuación de equivalencia precedente vamos a introducir los conceptos de factores, réditos y tantos con leyes de descuento.

A) Factor de descuento

Dados dos capitales equivalentes, el factor de descuento correspondiente a un determinado intervalo temporal **es el número por el cual hay que multiplicar la cuantía del capital situado en el extremo superior del intervalo para obtener la cuantía del capital equivalente con vencimiento en el extremo inferior.**

Denominando $v(t_1, t_2; p)$ al **factor de descuento** asociado al intervalo temporal (t_1, t_2), tenemos:

$$C_1 = C_2 \times v(t_1, t_2; p) \Rightarrow v(t_1, t_2; p) = \frac{C_1}{C_2}$$

Y teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia entre ambos capitales, se llega a:

© Ediciones Pirámide

$$v(t_1, t_2; p) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} < 1$$

De las expresiones precedentes deducimos que el factor de descuento nos indica el capital equivalente en t_1 por unidad de capital disponible en t_2. En efecto, para una cuantía unitaria del capital con vencimiento al final, tenemos:

$$C_1 = 1 \times v(t_1, t_2; p) \Rightarrow C_1 = v(t_1, t_2; p)$$

Es importante destacar cómo con leyes de capitalización, en las que $t < p$, **el factor de capitalización** permite hallar el equivalente de un capital en un punto **posterior** a su vencimiento, mientras que con leyes de descuento, en las que $p < t$, **el factor de descuento** permite calcular el equivalente de un capital en un punto **anterior** a su vencimiento.

B) Rédito de descuento

Dados dos capitales equivalentes, el factor de descuento correspondiente toma un valor inferior a la unidad. Ello nos permite indicar que **el rédito de descuento asociado a un determinado intervalo temporal es el complemento a la unidad del correspondiente factor de descuento:**

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - v(t_1, t_2; p)$$

Y al sustituir las expresiones correspondientes del factor, tenemos:

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2}$$

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} = \frac{A(t_1; p) - A(t_2; p)}{A(t_1; p)}$$

En consecuencia, el rédito de descuento, correspondiente a un cierto intervalo temporal, representa la variación por unidad de capital final de dos capitales equivalentes. Dicha variación tiene vencimiento al principio del intervalo, ya que es donde vence el factor de descuento.

C) Tantos

Dados dos capitales equivalentes, denominamos **tanto de descuento correspondiente a un cierto intervalo temporal al cociente entre el rédito de descuento y la amplitud de dicho intervalo temporal:**

© Ediciones Pirámide

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones del rédito de descuento, se verifica:

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{C_2 - C_1}{(t_2 - t_1)C_2}$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{A(t_1; p) - A(t_2; p)}{(t_2 - t_1)A(t_1; p)}$$

Sabemos que el rédito de descuento representa la variación, por unidad de capital final, de dos capitales equivalentes, teniendo dicha variación vencimiento al principio del intervalo. En consecuencia, podemos señalar que el tanto de descuento correspondiente a un intervalo temporal representa la variación de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo. Dicha variación tiene vencimiento al inicio del intervalo al que se refiere.

Ejercicio 3.6

Dada la ley financiera $A(t; p) = 1 - 0{,}08(t - p)$, $p = 2$, determinar el factor, el rédito y el tanto de descuento asociado al intervalo temporal $t_1 = 5$, $t_2 = 9$.

Resolución

De acuerdo con las expresiones deducidas, se verifica:

$$v(t_1, t_2; p) = \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} = v(t_1 = 5, t_2 = 9; p = 2) = \frac{1 - 0{,}08(9 - 2)}{1 - 0{,}08(5 - 2)} = 0{,}578947$$

$$d(t_1 = 5, t_2 = 9; p = 2) = 1 - v(t_1 = 5, t_2 = 9; p = 2) = 1 - 0{,}578947 = 0{,}421053$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}421053}{9 - 5} = 0{,}105263$$

De igual forma a lo realizado con leyes de capitalización, hemos puesto de manifiesto que para determinar el tanto de descuento correspondiente a un cierto intervalo temporal es preciso considerar la amplitud del mismo, por lo que el tanto expresa una variación de cuantía por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo. Por ello cabe preguntarse qué sucede a medida que la amplitud del intervalo temporal se modifica. En concreto, ¿qué ocurre cuando la amplitud tiende a cero? Para dar respuesta a la cuestión anterior, partimos de la expresión del tanto de descuento en función de la ley financiera para un intervalo temporal $(t, t + h)$:

© Ediciones Pirámide

$$\delta(t,\ t+h;\ p) = \frac{A(t;\ p) - A(t+h;\ p)}{h \times A(t;\ p)}$$

Cuando la amplitud del intervalo temporal tiende a cero, el correspondiente tanto de descuento se denomina **tanto instantáneo,** simbolizándose por $\delta(t;\ p)$:

$$\delta(t;\ p) = \lim_{h\to 0} \delta(t,\ t+h;\ p) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t;\ p) - A(t+h;\ p)}{h \times A(t;\ p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-[A(t+h;\ p) - A(t;\ p)]}{h} \times \frac{1}{A(t;\ p)}$$

En la hipótesis de que la ley financiera de descuento sea una función derivable, el límite del primer factor correspondiente a la expresión anterior es la derivada parcial de la ley con respecto a t:

$$\delta(t;\ p) = -\frac{\partial A(t;\ p)}{\partial t} \times \frac{1}{A(t;p)} = -\frac{\partial \log_e A(t;\ p)}{\partial t}$$

Hemos señalado que el tanto de descuento correspondiente a un determinado intervalo temporal nos indica la variación entre las cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo. Pues bien, cuando la amplitud del citado intervalo temporal es un infinitésimo, es decir, tiende a cero, dicho tanto es instantáneo.

El significado financiero del tanto instantáneo es el mismo que el del tanto de descuento, pero asociado a un intervalo temporal infinitesimal, por lo que representa una variación relativa de cuantías en cada instante de tiempo. Por tanto, fijado el valor del punto p, el tanto instantáneo es una función de la variable tiempo x:

$$\delta(x;\ p) = -\frac{\partial \log_e A(x;\ p)}{\partial x}$$

En la hipótesis de que sea una función integrable en el intervalo $(p,\ t)$, resulta:

$$\int_p^t \delta(x;\ p) \times dx = \int_p^t -\frac{\partial \log_e A(x;\ p)}{\partial x} \times dx = -[\log_e A(x;\ p)]_p^t =$$

$$= -[\log_e A(t;\ p) - \log_e A(p;\ p)] = -\log_e A(t;\ p) + \log_e 1 = -\log_e A(t;\ p)$$

Y al despejar obtenemos una expresión general para cualquier ley financiera de descuento en función de su tanto instantáneo:

$$A(t;\ p) = e^{-\int_p^t \delta(x;\ p) \times dx}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 3.7

Determinar la ley financiera de descuento cuyo tanto instantáneo es $\delta(t; p) = 0{,}02t$.

Resolución

Calculamos $\int_p^t \delta(x; p) \times dx$ y después sustituimos en la ecuación precedente:

$$\int_p^t \delta(x; p) \times dx = \int_p^t 0{,}02x \times dx = [0{,}01x^2]_p^t = 0{,}01(t^2 - p^2)$$

$$A(t; p) = e^{-0{,}01(t^2 - p^2)}$$

3.4. EL PRECIO FINANCIERO

Sabemos que el intercambio de bienes y servicios llevado a cabo entre dos sujetos económicos conlleva el abono, por parte de uno de dichos sujetos, del precio correspondiente. En línea con ello, y teniendo en cuenta, tal y como hemos señalado, que cualquier operación financiera constituye un cambio no simultáneo de bienes económicos, podemos señalar que a una operación financiera también es posible asociarle un precio: **el precio financiero.** Se puede distinguir entre distintas modalidades de precio financiero[2]: precio financiero total, precio financiero unitario y precio financiero medio. La utilidad de las modalidades citadas está en conocer el precio que se deriva de cualquier operación financiera, así como poder comparar distintas operaciones financieras en función de su precio, y optar por la que consideremos óptima.

Vamos a definir las modalidades de precio citadas para una operación financiera simple, realizándose su adaptación a las operaciones financieras compuestas en los capítulos correspondientes dedicados a las mismas.

En general, el **precio financiero total** asociado a una operación financiera integrada por el intercambio de dos capitales financieros viene dado por la diferencia aritmética de las cuantías de dichos capitales. Así, para la operación financiera definida por:

Prestación: $\{(C_1, t_1)\}$

Contraprestación: $\{(C_2, t_2)\}$

[2] Rodríguez (1994: 39).

© Ediciones Pirámide

en la que, obviamente, los capitales han de ser equivalentes, el precio financiero total es: $P_F = C_2 - C_1$. Valorándose la operación con una ley financiera de capitalización, el precio financiero total se denomina **interés total:** $I = C_2 - C_1$. Y si la operación se valorase con una ley de descuento, el precio financiero total recibe el nombre de **descuento:** $D = C_2 - C_1$. Es preciso resaltar cómo el concepto es el mismo y la diferencia está en la ley con la que se valoran los capitales: cuando sea de capitalización, hablamos de interés, y le denominamos descuento en el otro caso.

A) Operación valorada con una ley de capitalización

a) *Precio pospagable*

De la expresión del interés total se deduce: $C_2 = C_1 + I$, por lo que podemos decir que el precio financiero total o intereses constituyen el precio pospagable a pagar al final del intervalo temporal por disponer durante el mismo de la cuantía del capital inicial, siendo la cuantía I la de un capital (I, t_2) con vencimiento al final del intervalo.

Teniendo en cuenta que $C_2 = C_1 \times u(t_1, t_2; p)$, entonces: $I = C_1 \times u(t_1, t_2; p) - C_1$. De donde obtenemos el precio financiero total o interés pospagable: $I = C_1[u(t_1, t_2; p) - 1] = C_1 \times r(t_1, t_2; p)$.

Al dividir los intereses totales entre la cuantía del capital inicial obtenemos el **precio financiero unitario:** $\frac{I}{C_1} = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = r(t_1, t_2; p)$. En consecuencia, el rédito de capitalización es un precio financiero unitario e indica el interés por unidad de capital inicial, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial.

Si dividimos el precio financiero unitario entre la amplitud del intervalo temporal obtenemos la expresión correspondiente al **precio financiero medio:** $\frac{I}{C_1(t_2 - t_1)} = \frac{C_2 - C_1}{C_1(t_2 - t_1)} = \frac{r(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \rho(t_1, t_2; p)$. Por consiguiente, el tanto de capitalización es un precio financiero medio e indica el interés por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, es decir, la diferencia de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo.

Vemos, pues, que el precio financiero medio o tanto representa el aumento que se genera por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, o sea, es el **precio a pagar por disponer de la unidad de capital durante la unidad de tiempo.** En la práctica se le llama **tipo de interés.** Por ejemplo, decir que en una operación financiera el tipo de interés es de 2 céntimos trimestrales, significa que el interés de la unidad de capital inicial en un trimestre es 0,02 €. Normalmente, el tipo de interés viene expresado en porcentaje. Así, en el caso anterior hablaríamos del 2 %

© Ediciones Pirámide

trimestral, por lo que el interés de 100 € iniciales, en un trimestre, es de 2 euros, con vencimiento al final del mismo.

EJERCICIO 3.8

Determinar el interés pospagable, el precio financiero unitario y el precio financiero medio, correspondiente al intervalo temporal (4,9), del capital (3.200,4), siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}12(p - t)$, $p = 10$.

Resolución

Podemos determinar el precio financiero total de dos formas. En la primera calculamos el factor de capitalización correspondiente al intervalo citado y sustituimos en la expresión:

$$I = C_1[u(t_1, t_2; p) - 1] = 3.200\left[\frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} - 1\right] =$$

$$= 3.200\left[\frac{1 + 0{,}12(10 - 4)}{1 + 0{,}12(10 - 9)} - 1\right] = 1.714{,}29$$

En la segunda forma, determinamos el capital equivalente en 9 a (3.200,4), siendo el precio financiero total la diferencia aritmética de cuantías. Así, tenemos:

$$(3.200,\ t_1 = 4) \sim (C_2,\ t_2 = 9)$$

$$3.200[1 + 0{,}12(10 - 4)] = C_2[1 + 0{,}12(10 - 9)]$$

$$C_2 = 4.914{,}29 \Rightarrow I = C_2 - C_1 = 1.714{,}29$$

Para el precio financiero unitario o rédito de capitalización, se tiene:

$$r(t_1, t_2; p) = \frac{I}{C_1} = \frac{1.714{,}29}{3.200} = 0{,}535716$$

Y, por último, para el precio financiero medio o tanto de capitalización, tenemos:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{r(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}535716}{9 - 4} = 0{,}107143$$

© Ediciones Pirámide

b*) *Precio acumulado o referido a p

Del precio financiero total, dado por el capital (I, t_2), podemos calcular su proyección en p. Así, **el precio acumulado o referido a *p* es el capital equivalente en *p* del interés pospagable:**

$$I_p = Proy_p(I, t_2) = I \times L(t_2; p) = C_1 \times r(t_1, t_2; p) \times L(t_2; p) =$$
$$= C_1 \times \xi(t_1, t_2; p) = C_1[L(t_1; p) - L(t_2; p)]$$

c*) *Precio prepagable o anticipado

Para la operación financiera caracterizada por el intercambio de los capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), hemos calculado anteriormente un precio financiero pospagable o con vencimiento al final del intervalo. Ahora bien, también se puede determinar el precio financiero prepagable o anticipado, abonable al inicio de la operación. En efecto, al ser equivalentes los capitales anteriores y además $C_1 < C_2$, resulta: $I^* = C_2 - C_1$. La diferencia anterior constituye el **interés prepagable** o **anticipado,** o sea, el precio total a pagar al principio del intervalo temporal por disponer durante el mismo de la cuantía del capital final, siendo la cuantía I^* la de un capital (I^*, t_1) con vencimiento al principio del intervalo.

A partir de la expresión $C_1 = C_2 \times u^*(t_1, t_2; p)$ deducimos la ecuación correspondiente al interés anticipado: $I^* = C_2 - C_2 \times u^*(t_1, t_2; p) = C_2 [1 - u^*(t_1, t_2; p)] =$ $= C_2 \times r^*(t_1, t_2; p)$.

Al dividir el interés total anticipado entre la cuantía del capital final obtenemos el **precio financiero unitario prepagable o anticipado:** $\dfrac{I^*}{C_2} = \dfrac{C_2 - C_1}{C_2} = r^*(t_1, t_2; p)$.

Por tanto, el rédito de contracapitalización o de capitalización anticipada es el precio financiero unitario anticipado, e indica el interés prepagable por unidad de capital final, es decir, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital a devolver al final del intervalo.

Si ahora dividimos el precio financiero unitario prepagable entre la amplitud del intervalo temporal, obtenemos la expresión correspondiente al **precio financiero medio prepagable o anticipado:** $\dfrac{I^*}{C_2(t_2 - t_1)} = \dfrac{C_2 - C_1}{C_2(t_2 - t_1)} = \dfrac{r^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \rho^*(t_1, t_2; p)$.

Tenemos, pues, que el tanto anticipado de capitalización es el precio financiero medio prepagable e indica el interés anticipado por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo. En la práctica se le llama **tipo de interés anticipado.** Por ejemplo, decir que en una operación financiera el interés anticipado es de 8 céntimos trimestrales, significa que el tipo de interés con vencimiento al inicio de cada trimestre y por cada unidad

© Ediciones Pirámide

de capital final es de 0,08. Normalmente, en la práctica, el tipo de interés viene expresado en porcentaje. Así, en el caso anterior hablaríamos del 8% trimestral anticipado. Si con ese tanto pedimos un préstamo de 100 € por un trimestre, los intereses son de 8 €, que abonamos inmediatamente, recibiendo en consecuencia 100 − 8 = 92, para devolver al final del trimestre 100 €, por lo que la operación neta o líquida queda:

$$\text{Prestación: } \{(100 - 8,\ t_1)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(100,\ t_1 + ¼)\}$$

EJERCICIO 3.9

Determinar el interés anticipado, el precio financiero unitario anticipado y el precio financiero medio prepagable, correspondiente al intervalo temporal (5,9), del capital (800,9), siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}08(p - t)$, $p = 12$.

Resolución

Podemos determinar el precio financiero total prepagable de dos formas. Para la primera determinamos el factor de contracapitalización correspondiente al intervalo temporal considerado y sustituimos en la ecuación correspondiente:

$$I^* = C_2[1 - u^*(t_1, t_2; p)] = 800\left[1 - \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)}\right] = 800\left[1 - \frac{1 + 0{,}08(12 - 9)}{1 + 0{,}08(12 - 5)}\right] = 164{,}10$$

Para la segunda forma calculamos el capital equivalente en 5 al capital de cuantía 800 con vencimiento en 9, con lo que el precio financiero total anticipado es la diferencia aritmética entre las cuantías de tales capitales:

$$(C_1, 5) \sim (800,\ t_2 = 9)$$

$$C_1[1 + 0{,}08(12 - 5)] = 800[1 + 0{,}08(12 - 9)]$$

$$C_1 = 635{,}90 \Rightarrow I^* = 800 - 635{,}90 = 164{,}10$$

En cuanto al rédito de contracapitalización o precio financiero unitario anticipado, tenemos:

$$r^*(t_1, t_2; p) = \frac{I^*}{C_2} = \frac{164{,}10}{800} = 0{,}205125$$

© Ediciones Pirámide

Y finalmente, el precio financiero medio anticipado o tanto de capitalización prepagable, es:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{r^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}205125}{9 - 5} = 0{,}051281$$

***B*) Operación valorada con una ley de descuento**

Para una operación financiera valorada con una ley de descuento y caracterizada por el intercambio de los capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), hemos denominado precio financiero total o descuento al capital $D = C_2 - C_1$. Como es $C_1 < C_2$, podemos considerar que el descuento es un precio que se abona al **inicio** de la operación: (D, t_1).

De la expresión del descuento total se deduce: $C_1 = C_2 - D$, por lo que podemos decir que el descuento constituye el precio prepagable a abonar al principio del intervalo temporal por disponer durante el mismo de la cuantía del capital final, siendo la cuantía D la correspondiente a un capital con vencimiento al principio del intervalo (t_1, t_2).

Teniendo en cuenta que $C_1 = C_2 \times v(t_1, t_2; p)$, se deduce: $D = C_2 - C_2 \times v(t_1, t_2; p)$. De donde se llega a la expresión del precio financiero total o descuento: $D = C_2[1 - v(t_1, t_2; p)] = C_2 \times d(t_1, t_2; p)$.

Al dividir el descuento total entre la cuantía del **capital final** obtenemos el **precio financiero unitario de descuento:** $\frac{D}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = d(t_1, t_2; p)$. En consecuencia, el rédito de descuento es un precio financiero unitario e indica el descuento por unidad de capital final, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final.

Si dividimos el precio financiero unitario entre la amplitud del intervalo temporal, obtenemos la expresión correspondiente al **precio financiero medio de descuento:** $\frac{D}{C_2(t_2 - t_1)} = \frac{C_2 - C_1}{C_2(t_2 - t_1)} = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \delta(t_1, t_2; p)$. En consecuencia, el tanto de descuento es un precio financiero medio e indica el descuento por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo.

Vemos, pues, que el precio financiero medio de descuento, tanto o tipo de descuento, representa la disminución que se genera por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, es decir, es el **precio a pagar al inicio del período temporal unitario por disponer de la unidad de capital durante la unidad de tiempo.** En la práctica se le llama **tipo de descuento.** Por ejemplo, decir que en una operación financiera el tipo de descuento es de 4 céntimos semestrales, significa que el descuento de la unidad de capital final en un semestre es 0,04. Normalmente, en

© Ediciones Pirámide

la práctica, el tipo de descuento viene expresado en porcentaje. Así, en el caso anterior diríamos el 4% semestral, por lo que el descuento de 100 € con vencimiento dentro de un semestre es de 4 €, con vencimiento al principio del citado semestre.

EJERCICIO 3.10

Calcular el descuento total, el precio financiero unitario de descuento y el precio financiero medio de descuento, en el intervalo temporal (7,15), del capital (1.500,15), siendo la ley de valoración $A(t; p) = 1 - 0{,}04(t - p)$, $p = 2$.

Resolución

Una forma de resolución es calcular el capital inicial equivalente al dado, siendo el descuento la diferencia aritmética de cuantías. De esta forma, se tiene:

$$(C_1, t_1 = 7) \sim (1.500, t_2 = 15)$$

$$C_1[1 - 0{,}04(7 - 2)] = 1.500[1 - 0{,}04(15 - 2)] \Rightarrow C_1 = 900 \Rightarrow D = C_2 - C_1 = 600$$

El precio financiero unitario de descuento se obtiene al calcular:

$$d(t_1, t_2; p) = \frac{D}{C_2} = \frac{600}{1.500} = 0{,}40$$

El precio financiero medio de descuento o tanto de descuento se deduce de:

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}4}{8} = 0{,}05$$

3.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Los capitales (25.000,7) y (31.338,13) son equivalentes de acuerdo con la ley $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 20$. Determinar: *a*) factor de capitalización correspondiente a dicha ley para el intervalo (7,13), y *b*) tanto de capitalización del intervalo temporal de extremos 9 y 15.

Resolución

Para calcular los valores pedidos, hemos de determinar antes el valor de k. Para ello, de la ecuación de equivalencia entre los capitales dados, se deduce:

© Ediciones Pirámide

$$25.000[1 + k(20 - 7)] = 31.338[1 + k(20 - 13)] \Rightarrow k = 0{,}06$$

a) Al sustituir en la expresión del factor de capitalización tenemos:

$$u(t_1 = 7,\ t_2 = 13;\ p) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{L(t_1;\ p)}{L(t_2;\ p)} = \frac{1 + 0{,}06(20 - 7)}{1 + 0{,}06(20 - 13)} = 1{,}2535$$

b) Para el tanto, se tiene:

$$\rho(t_1 = 9,\ t_2 = 15;\ p = 20) = \frac{L(t_1;\ p) - L(t_2;\ p)}{(t_2 - t_1)L(t_2;\ p)} =$$

$$= \frac{[1 + 0{,}06(20 - 9)] - [1 + 0{,}06(20 - 15)]}{(15 - 9)[1 + 0{,}06(20 - 15)]} = 0{,}046154$$

2. Los capitales financieros (15.000,3) y (16.000,4) son equivalentes de acuerdo con la ley financiera $L(t;\ p) = 1 + k(p - t)$, $p = 9$. El rédito de contracapitalización X asociado al intervalo (4,6), vale: *a*) $0{,}130 < X < 0{,}135$; *b*) $0{,}150 < X < 0{,}156$; *c*) $X = 2$; *d*) $X = 0{,}866$.

Resolución

En la ecuación de equivalencia entre los capitales dados se verifica: $15.000[1 + k(9 - 3)] = 16.000[1 + k(9 - 4)] \Rightarrow k = 0{,}10$. Y teniendo en cuenta las siguientes expresiones:

$$r^*(t_1 = 4,\ t_2 = 6;\ p = 9) = \frac{L(t_1;\ p) - L(t_2;\ p)}{L(t_1;\ p)} =$$

$$= \frac{1 + 0{,}10(9 - 4)] - [1 + 0{,}10(9 - 6)]}{1 + 0{,}10(9 - 4)]} = \frac{0{,}2}{1{,}50} = 0{,}1333$$

En consecuencia, la solución correcta es la alternativa *a*.

3. Determinar el valor del punto p en la ley financiera $L(t;\ p) = 1 + k(p - t)$, sabiendo que el tanto anticipado de capitalización correspondiente al intervalo temporal de extremos 3 y 5, vale $\frac{1}{19}$ cuando $k = 0{,}10$.

Resolución

Sustituimos en la ecuación del tanto anticipado de capitalización:

© Ediciones Pirámide

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

$$\frac{1}{19} = \frac{[1 + k(p - 3)] - [1 + k(p - 5)]}{(5 - 3)[1 + k(p - 3)]}$$

Y al hacer $k = 0{,}10$, se llega a $p = 12$.

4. Para la ley financiera del ejercicio precedente, calcular el tanto de capitalización correspondiente al intervalo temporal de extremos 5 y 7.

Resolución

$$\rho(t_1 = 5, t_2 = 7; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_2; p)} =$$

$$= \frac{[1 + 0{,}10(12 - 5)] - [1 + 0{,}10(12 - 7)]}{(7 - 5)[1 + 0{,}10(12 - 7)]} = 0{,}0667$$

5. Dada la ley financiera $A(t; p) = 1 - 0{,}09(t - p)$, $p = 1$, determinar el factor, el rédito y el tanto de descuento asociado al intervalo temporal $t_1 = 2$, $t_2 = 9$.

Resolución

De acuerdo con las expresiones deducidas, se verifica:

$$v(t_1 = 2, t_2 = 9; p = 1) = \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} = \frac{1 - 0{,}09(9 - 1)}{1 - 0{,}09(2 - 1)} = 0{,}3077$$

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - v(t_1, t_2; p) = 1 - 0{,}3077 = 0{,}6923$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}6923}{9 - 2} = 0{,}0989$$

6. Determinar el precio financiero unitario y el precio financiero medio, asociados al intervalo temporal (6,10), del capital (3.200,6), sabiendo que el precio financiero total pospagable asciende a 1.800.

Resolución

De acuerdo con el concepto de interés, se verifica:

$$I = C_2 - C_1 = 1.800 = C_2 - 3.200 \Rightarrow C_2 = 5.000$$

© Ediciones Pirámide

Para el rédito y el tanto, se tiene:

$$r(t_1 = 6,\ t_2 = 10;\ p) = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{5.000 - 3.200}{3.200} = 0{,}5625$$

$$\rho(t_1 = 6,\ t_2 = 10;\ p) = \frac{0{,}5625}{10 - 6} = 0{,}140625$$

7. Para el intervalo temporal (5,11) y el capital financiero (1.000,11), el interés anticipado asciende a 350. Determinar el precio financiero unitario anticipado y el precio financiero medio prepagable correspondientes al citado intervalo temporal.

Resolución

El precio financiero total anticipado verifica: $I^* = C_2 - C_1 = 350 \Rightarrow C_1 = 650$. Para las otras magnitudes se tiene:

$$r^*(t_1 = 5,\ t_2 = 11;\ p) = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = \frac{1.000 - 650}{1.000} = 0{,}35$$

$$\rho^*(t_1 = 5,\ t_2 = 11;\ p) = \frac{r^*(t_1 = 5,\ t_2 = 11;\ p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}35}{11 - 5} = 0{,}058\hat{3}$$

8. Calcular el descuento total, el precio financiero unitario de descuento y el precio financiero medio de descuento, en el intervalo temporal (4,10), del capital (990.000,10), siendo la ley de valoración $A(t;\ p) = 1 - 0{,}01(t - p)$, $p = 3$.

Resolución

De la ecuación de equivalencia entre capitales se llega a:

$$C_1[1 + 0{,}01(4 - 3)] = 990.000[1 - 0{,}01(10 - 3)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1 = 930.000;\ D = 990.000 - 930.000 = 60.000$$

$$d(t_1 = 4,\ t_2 = 10;\ p) = \frac{D}{C_2} = 0{,}0606$$

$$\delta(t_1,\ t_2;\ p) = \frac{d(t_1,\ t_2;\ p)}{t_2 - t_1} = 0{,}0101$$

9. Determinar la ley financiera de capitalización cuyo tanto instantáneo es $\rho(t;\ p) = 0{,}05t^4 + t$.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Calculamos $\int_t^p \rho(x; p) \times dx$ y después sustituimos en la ecuación precedente:

$$\int_t^p \rho(x; p) \times dx = \int_t^p (0{,}05x^4 + x) \times dx = [0{,}01x^5 + 0{,}5x^2]_t^p =$$

$$= 0{,}01(p^5 - t^5) + 0{,}5(p^2 - t^5) \Rightarrow L(t; p) = e^{0{,}01(p^5 - t^5) + 0{,}5(p^2 - t^2)}$$

3.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los capitales financieros (10.000,2) y (12.000,4) son equivalentes, de acuerdo con la ley financiera $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 10$. El rédito de contracapitalización X asociado al intervalo temporal (3,5), vale: *a*) $0{,}211 < X < 0{,}233$; *b*) $0{,}085 < X < < 0{,}095$; *c*) $X = 0{,}5$; *d*) $0{,}17 < X < 0{,}19$.

2. Los capitales financieros (10.000,3) y (15.000,7) son equivalentes, de acuerdo con la ley financiera $L(t; p) = k + h(p - t)$, $p = 10$. El rédito de capitalización acumulado X asociado al intervalo temporal (2,7), vale: *a*) $0{,}40 < X < 0{,}60$; *b*) $0{,}095 < X < 1{,}25$; *c*) $0{,}70 < X < 0{,}90$; *d*) ninguna de las anteriores.

3. Para la ley financiera $L(t; p) = a + b(p - t)$, $p = 15$, se sabe que la suma financiera de los capitales (50.000,2) y (75.000,6), calculada en el punto 10, es 195.000. Determinar el rédito de capitalización asociado al intervalo temporal de extremos 6 y 8.

4. El interés pospagable de un capital de 5.000 u.m. en el intervalo (2,5) vale 1.800 u.m. Determinar el factor de capitalización vinculado a dicho intervalo temporal.

5. Dada la ley de capitalización $L(t; p) = a + b(p - t)$, $p = 10$, se conoce que el rédito acumulado correspondiente al intervalo temporal de extremos 3 y 6 vale 0,045. Determinar el tanto de capitalización correspondiente al intervalo (4,6).

© Ediciones Pirámide

4 Sistemas financieros clásicos de capitalización y de descuento

OBJETIVOS

- Entender y aplicar el concepto de capitalización simple, de capitalización compuesta y de descuento simple comercial.
- Determinar el valor de las diversas magnitudes derivadas.
- Calcular tantos equivalentes en los tres sistemas financieros.
- Conocer y aplicar el concepto de capitalización con intereses anticipados.

SUMARIO

4.1. Introducción.
4.2. Sistema financiero de capitalización simple.
4.3. Sistema financiero de capitalización compuesta.
4.4. Sistema financiero de descuento simple comercial.
4.5. Ejercicios y problemas resueltos.
4.6. Ejercicios y problemas propuestos.

4.1. INTRODUCCIÓN

La ley financiera, tal y como se ha señalado en la primera lección, es una expresión matemática tal que, fijado un punto p de aplicación de dicha ley, permite obtener para cada capital (C, t) el valor V de su sustituto o proyección financiera en p:

$$V = Proy_p(C, t) = C \times F(t; p)$$

Si en cada expresión analítica de la ley financiera de valoración hacemos que el punto de aplicación de la misma varíe de posición, obtenemos una **familia de leyes financieras** expresadas todas por el mismo modelo. Tal familia de leyes constituye un **sistema financiero.** En general, dada una ley financiera podemos definir un sistema financiero como el conjunto de leyes que se obtiene al hacer p variable. Si la ley dada es de capitalización se obtendrá un sistema financiero de capitalización, y si, por el contrario, la ley es de descuento, se tendrá un sistema financiero de descuento.

Toda operación financiera constituye un intercambio de capitales financieros entre dos sujetos económicos, los cuales llevarán a cabo dicho intercambio fijando el criterio financiero mediante el cual se valoran tales capitales. Dichos sujetos pueden establecer cualquier criterio financiero, siempre y cuando cumpla las propiedades analizadas. Ahora bien, de entre los infinitos criterios de valoración financiera que se pueden establecer, las **Leyes financieras clásicas** son las utilizadas en la práctica económica para valorar capitales financieros constitutivos de las diversas operaciones llevadas a cabo por los distintos sujetos económicos.

Existen diversas formas de definir cada uno de los sistemas clásicos. Nosotros los vamos a sustentar en las hipótesis o condiciones que pactan los sujetos económicos para la determinación del precio financiero asociado al intercambio de un

© Ediciones Pirámide

capital (C, t) y su sustituto en p, (V, p). De esta forma, cada vez que se pacta una operación financiera, no es preciso establecer las hipótesis económico-financieras del criterio de valoración a utilizar en tal operación, sino que directamente se señala el criterio a aplicar, asumiendo, en consecuencia, todas las condiciones que el mismo conlleva.

4.2. SISTEMA FINANCIERO DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE

4.2.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera

Valorar capitales financieros con el sistema de capitalización simple, ley de capitalización simple o interés simple, implica que cuando un sujeto cede un capital (C, t) para recibir como equivalente o sustituto en $p > t$ el capital (V, p), acepta lo siguiente:

a) El precio financiero total I es proporcional a la cuantía inicial C, al número de períodos $p - t$ y al tipo de interés i.

b) El precio financiero total se abona en p.

De acuerdo con las hipótesis establecidas, tenemos que $I = C(p - t)i$, por lo que se verifica $V = C + C \times i(p - t) = C[1 + i(p - t)]$, siendo la ley financiera unitaria en el sistema de capitalización simple[1]:

$$L(t; p) = 1 + i(p - t) \text{ con } t < p$$

En relación a esta ecuación, se debe cumplir que la amplitud del intervalo temporal $(p - t)$ y el tipo de interés i han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Si dos sujetos aceptan intercambiar los capitales financieros (C_0, t_0) y (C_n, t_n) en base al sistema de capitalización simple, llevarán a cabo dicho intercambio si ambos capitales son equivalentes, debiéndose verificar:

$$(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n) \Rightarrow C_0 \times L(t_0; p) = C_n \times L(t_n; p)$$

$$C_0[1 + i(p - t_0)] = C_n[1 + i(p - t_n)]$$

$$C_n = C_0 \frac{1 + i(p - t_0)}{1 + i(p - t_n)}$$

En la utilización práctica de este sistema de capitalización se toma como punto p de aplicación de la ley el vencimiento del segundo capital: $p = t_n$. En tal caso,

[1] Recordemos que $V = C \times L(t; p)$.

© Ediciones Pirámide

haciendo $t_n - t_0 = n$, obtenemos la ecuación de equivalencia financiera en el sistema de capitalización simple:

$$C_n = C_0(1 + n \times i)$$

Por tanto, el importe de los intereses totales, que tienen vencimiento al final de la operación, viene dado por la siguiente expresión:

$$I = C_n - C_0 = C_0 \times n \times i$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.
n: Número de períodos de tiempo.
i: Tipo de interés unitario.
I: Intereses totales.

Hay que destacar que, en este sistema de capitalización, el precio financiero total o intereses se calculan sobre el capital inicial y que los intereses no devengan nuevos intereses. En consecuencia, el sistema financiero de capitalización simple se utiliza habitualmente en operaciones financieras a corto plazo.

EJERCICIO 4.1

Una persona presta 6.000 euros para obtener su montante al cabo de 9 meses en capitalización simple al 6% anual. Calcular el precio financiero total y el montante.

Resolución

El montante o capital final se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia financiera, teniendo en cuenta que 9 meses equivale a $\frac{9}{12}$ años, por lo que: C_n = $= 6.000 \left(1 + \frac{9}{12} \times 0{,}06\right) = 6.270$ euros.

El importe de los intereses o precio financiero total es $I = 6.270 - 6.000 =$ $= 270$ euros.

EJERCICIO 4.2

Una persona presta 18.000 euros durante 120 días al 4% anual. Calcular los intereses generados o precio financiero total, considerando el año comercial.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Para calcular los intereses generados en esta imposición de capitalización simple tenemos que pasar los días a años, ya que el tipo de interés dado es de periodicidad anual. Si consideramos el año comercial, 120 días equivalen a $\frac{120}{360}$ años; si por el contrario consideramos el año civil, los 120 días equivalen a $\frac{120}{365}$años.

En consecuencia, los intereses comerciales son: $I = 18.000\frac{120}{360} \times 0{,}04 = 240$ euros.

EJERCICIO 4.3

Un individuo deposita 40.000 euros en una entidad financiera que le ofrece, en capitalización simple, el 5% anual durante los primeros 6 meses, y a continuación el 7% anual durante los 6 meses siguientes. Hallar el importe de los intereses totales.

Resolución

En el sistema de capitalización simple los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial. Por tanto, tenemos:

Intereses correspondientes al primer semestre: $I_1 = 40.000 \times \frac{6}{12} \times 0{,}05 = 1.000$ euros.

Intereses correspondientes al segundo semestre: $I_2 = 40.000 \times \frac{6}{12} \times 0{,}07 = 1.400$ euros.

Intereses totales: $I = 1.000 + 1.400 = 2.400$ euros.

4.2.2. Magnitudes derivadas

A continuación se van a exponer las expresiones que nos permiten obtener los factores, réditos y tantos correspondientes al sistema financiero de capitalización simple. Para ello, se toma (t_0, t_n) como intervalo temporal (siendo la amplitud del intervalo temporal $t_n - t_0 = n$) y se utiliza como punto de aplicación el vencimiento del segundo capital: $p = t_n$.

A) Factor de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

© Ediciones Pirámide

$$u(t_0, t_n; p) = \frac{C_n}{C_0} = \frac{C_0(1 + n \times i)}{C_0} = 1 + n \times i$$

$$u^*(t_0, t_n; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{C_0}{C_0(1 + n \times i)} = \frac{1}{1 + n \times i}$$

B) Rédito de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$r(t_0, t_n; p) = u(t_0, t_n; p) - 1 = (1 + n \times i) - 1 = n \times i$$

$$r^*(t_0, t_n; p) = 1 - u^*(t_0, t_n; p) = 1 - \frac{1}{(1 + n \times i)} = \frac{n \times i}{1 + n \times i}$$

C) Tanto de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{r(t_0, t_n; p)}{n} = i$$

$$\rho^*(t_0, t_n; p) = \frac{r^*(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{i}{1 + n \times i} = i^*$$

Por consiguiente, el tanto de capitalización i representa el precio financiero total por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, denominándose **tipo de interés pospagable.** En cambio, el tanto de contracapitalización representa el precio financiero anticipado o prepagable por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, denominándose **tipo de interés anticipado,** que simbolizamos por i^*.

Si de la expresión del tipo de interés anticipado i^* despejamos el tipo de interés vencido i, obtenemos:

$$i = \frac{i^*}{1 - n \times i^*}$$

Tenemos, pues, que en la capitalización simple el tipo de interés vencido equivalente al tipo de interés anticipado, o viceversa, depende del número de períodos n.

Ejercicio 4.4

Se impone un capital de 1.000 € durante 3 meses en capitalización simple, obteniéndose un capital final de 1.015 €. Calcular el factor, el rédito y el tanto de capitalización asociado a dicho intervalo temporal.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Teniendo en cuenta las expresiones indicadas, se obtiene:

Factor de capitalización: $u(0,3;\ p) = \dfrac{1.015}{1.000} = 1,015$

Rédito de capitalización: $r(0,3;\ p) = 1,015 - 1 = 0,015$

Tanto de capitalización: $\rho(0,3;\ p) = \dfrac{0,015}{3} = 0,005 = 0,5\%$

El rédito de capitalización $r(0,3;\ p) = 0,015$ nos indica el precio financiero unitario pospagable o interés pospagable de una unidad monetaria impuesta durante 3 meses. El tanto de capitalización $\rho(0,3;\ p) = 0,005$ señala el precio financiero medio o interés pospagable por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, para un intervalo temporal de 3 meses.

EJERCICIO 4.5

Se impone un capital durante 4 años en capitalización simple a un tipo de interés del 1% anual. Calcular el factor, el rédito y el tanto de contracapitalización asociado a dicho intervalo temporal.

Resolución

La cuantía de las distintas magnitudes se obtiene considerando que el tipo de interés anual es $i = 0,01$ y que la amplitud del intervalo temporal es $n = 4$.

Factor de contracapitalización: $u^*(0,4;\ p) = \dfrac{1}{1 + 4 \times 0,01} = \dfrac{1}{1,04} = 0,961538461$

Rédito de contracapitalización: $r^*(0,4;\ p) = 1 - 0,961538461 = 0,038461538$

Tanto de contracapitalización: $\rho^*(0,4;\ p) = \dfrac{0,038461538}{4} = 0,009615384$

4.2.3. Tantos equivalentes

Dos tantos i e $i^{(m)}$, referidos a distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando para un mismo capital inicial, y durante el mismo tiempo, producen idéntico montante. Por ejemplo, el montante de un determinado capital transcurridos de 7 años al 6% anual, toma el mismo valor que si lo calculamos al cabo de 14 semestres al tipo semestral equivalente.

© Ediciones Pirámide

Así, para un capital inicial C_0 que se imponga durante n períodos al tipo de interés i, estando referidos n e i a la misma unidad de tiempo, el montante obtenido es $C_n = C_0 (1 + n \times i)$. Si, por el contrario, a dicho capital C_0 impuesto durante el mismo intervalo temporal, se le aplica un tipo de interés $i^{(m)}$ referido a otra unidad de tiempo de amplitud $1/m$, el montante obtenido es $C_n = C_0 (1 + m \times \times n \times i^{(m)})$. En este sentido, es preciso señalar que el producto $m \times n$ está expresado en la misma unidad de tiempo a la que se refiere el tipo de interés $i^{(m)}$.

Si ambos tipos de interés i e $i^{(m)}$ son equivalentes, las cuantías de los montantes obtenidos con ambos tipos deben ser iguales. En consecuencia:

$$C_0 (1 + n \times i) = C_0 (1 + m \times n \times i^{(m)}) \Rightarrow i = m \times i^{(m)}$$

El tipo de interés i se refiere a períodos unitarios de tiempo, e $i^{(m)}$ a subperíodos de amplitud $\frac{1}{m}$, siendo:

i: Tipo de interés unitario o tanto efectivo del período.
$i^{(m)}$: Tanto o tipo efectivo del subperíodo.
m: Número de subperíodos existentes en cada unidad de tiempo a la que va referido i.

Es preciso destacar que la expresión anterior es válida exclusivamente en el sistema de capitalización simple. Además, si el tipo i es anual y m toma valores iguales a 2, 3, 4, 6 y 12, tenemos períodos semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales y mensuales, respectivamente. Por ejemplo, el 3% trimestral es equivalente al 12% anual: $i = 0{,}03 \times 4 = 0{,}12$, ya que en un año hay 4 trimestres. Por otro lado, el 8% anual es equivalente al 4% semestral: $i^{(m)} = \frac{0{,}08}{2}$, pues en un año hay 2 semestres. Y, por último, el 6% semestral es equivalente al 1% mensual: $i^{(m)} = \frac{0{,}06}{6} = 0{,}01$, ya que en un semestre hay 6 meses.

Ejercicio 4.6

Calcular el interés simple de un capital de 750 € prestado durante 5 meses al 6% anual.

Resolución

En primer lugar vamos a calcular el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual: $i^{(m)} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$ mensual. A continuación sustituimos en la expresión

© Ediciones Pirámide

que nos permite determinar el importe de los intereses totales: $I = C_0 \times n \times i = 750 \times 5 \times 0{,}005 = 18{,}75$ €.

4.2.4. Capitalización con intereses anticipados

Tal y como se ha expuesto, si se impone un capital C_0 en capitalización simple durante el intervalo temporal (t_0, t_n), al final de dicho intervalo se pagan los intereses correspondientes o precio financiero total. No obstante, es posible que la operación se pacte con intereses anticipados o prepagables, de manera que los intereses se desembolsan al principio de dicho intervalo temporal.

La ecuación de equivalencia financiera en la capitalización simple es $C_n = C_0 (1 + n \times i)$. Si sustituimos el tipo de interés por la expresión $i = \dfrac{i^*}{1 - n \times i^*}$, que relaciona el tipo de interés pospagable con el tipo de interés anticipado o prepagable, obtenemos:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{n \times i^*}{1 - n \times i^*}\right) = C_0 \left(\frac{1 - n \times i^* + n \times i^*}{1 - n \times i^*}\right) = \frac{C_0}{1 - n \times i^*}$$

Si despejamos el capital inicial C_0, se llega a la ecuación de equivalencia financiera de capitalización simple con intereses anticipados:

$$C_0 = C_n (1 - n \times i^*)$$

El importe de los intereses totales anticipados o prepagables es:

$$I^* = C_n - C_0 = C_n \times n \times i^*$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.
n: Número de períodos de tiempo.
i^*: Tipo de interés anticipado unitario.
I^*: Intereses totales anticipados.

De manera que los intereses anticipados o prepagables en el sistema de capitalización simple se calculan sobre el capital final, y no sobre el capital inicial.

EJERCICIO 4.7

Una persona presta 10.000 euros durante 6 meses en capitalización simple al tipo de interés anticipado del 5% anual. Calcular la cuantía que tiene que desembolsar inicialmente y el importe de los intereses anticipados.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El capital inicial o cuantía que desembolsa inicialmente se obtiene al aplicar la ecuación de equivalencia financiera con intereses anticipados: $C_0 = 10.000\left(1 - -\frac{6}{12} \times 0{,}05\right) = 9.750$ €. Transcurridos los 6 meses recibe el capital final $C_n = 10.000$ €, por lo que el importe de los intereses anticipados o precio financiero total anticipado es $I^* = 10.000 - 9.750 = 250$ €. También se pueden determinar los intereses prepagables con la expresión: $I^* = C_n \times n \times i^* = 10.000 \times \frac{6}{12} \times 0{,}05 = 250$ €.

EJERCICIO 4.8

Se impone un capital en capitalización simple durante 3 años al 6% anual anticipado. Calcular el tipo de interés pospagable equivalente a dicho tipo de interés prepagable.

Resolución

La ecuación que relaciona el tipo de interés vencido o pospagable i con el tipo de interés prepagable o anticipado i^* es la siguiente: $i = \frac{i^*}{1 - n \times i^*}$. Si sustituimos en la misma, tenemos:

$$i = \frac{0{,}06}{1 - 3 \times 0{,}06} = 0{,}073170731 \text{ anual}$$

4.3. SISTEMA FINANCIERO DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

4.3.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera

Valorar capitales financieros con el sistema de capitalización compuesta, ley de capitalización compuesta o interés compuesto, implica que cuando un sujeto cede un capital (C, t) para recibir como equivalente o sustituto en $p > t$ el capital (V, p), acepta lo siguiente:

a) Al final de cada uno de los $z = p - t$ períodos unitarios se calcula el precio financiero parcial o intereses periódicos, los cuales son proporcionales al

© Ediciones Pirámide

tipo de interés correspondiente a dicho período y a la cuantía acumulada (capital más intereses) al inicio del respectivo período.

b) El precio financiero total I se abona en p.

Por tanto, la hipótesis básica de este sistema es el proceso acumulativo o capitalización de intereses al final de cada período, con el fin de producir nuevos intereses en el período siguiente.

De acuerdo con las hipótesis expuestas, al ser $p = t + z$, y siendo i el tipo de interés unitario para cada período, tenemos:

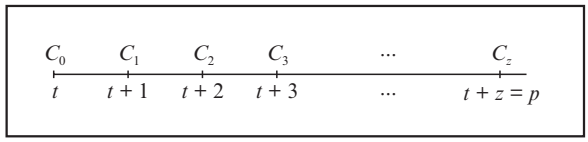


Figura 4.1.

Siendo $I_1 = C_0 \times i$ los intereses correspondientes al período 1, y C_1 la cuantía acumulada al final de dicho período 1 o principio del período 2, se verifica para el primer período: $C_1 = C_0 + I_1 = C_0(1 + i)$ y para el segundo período $C_2 = C_1 + + I_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)^2$.

Al repetir este proceso de obtener en cada uno de los períodos los intereses correspondientes al mismo, calculados sobre el capital al inicio del citado período, y acumularlos a dicho capital, se tiene:

$$I_s = C_{s-1} \times i;\ C_s = C_{s-1} + I_s = C_{s-1}(1 + i) = C_0(1 + i)^s$$

siendo:

I_s: Intereses del período s.
C_s: Capital acumulado al final del período s o principio del período $s + 1$.
i: Tipo unitario de interés.

Finalmente, se llega a:

$$C_z = C_0(1 + i)^z = C_0(1 + i)^{p-t} = V$$

De manera que la ley financiera unitaria en el sistema de capitalización compuesta es[2]:

$$L(t; p) = (1 + i)^{p-t} \text{ con } t < p$$

[2] Recordemos que $V = C \times L(t; p)$.

© Ediciones Pirámide

Lógicamente, la amplitud del intervalo temporal $(p - t)$ y el tipo de interés i han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Según el proceso descrito anteriormente, la capitalización compuesta supone calcular los intereses al final de cada uno de los períodos y posteriormente acumular dichos intereses al capital impuesto al inicio del respectivo período, de manera que la suma de capital inicial e intereses produce nuevamente intereses en el período siguiente; y así sucesivamente, de manera que los intereses totales se hacen efectivos íntegramente al final de la operación.

Si dos sujetos aceptan intercambiar los capitales financieros (C_0, t_0) y (C_n, t_n) en base al sistema de capitalización compuesta, llevarán a cabo dicho intercambio si los dos capitales son equivalentes, por lo que se debe verificar:

$$(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n) \Rightarrow C_0 \times L(t_0; p) = C_n \times L(t_n; p)$$

$$C_0(1 + i)^{p - t_0} = C_n(1 + i)^{p - t_n}$$

$$C_n = C_0(1 + i)^{t_n - t_0}$$

De la ecuación precedente se deduce una importante propiedad de este sistema financiero de valoración: **la equivalencia de capitales es independiente del punto *p*.** Por ello, en la aplicación de este sistema no es preciso realizar hipótesis alguna sobre el punto p. Haciendo $t_n - t_0 = n$, se obtiene la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

O bien: $C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$.

El importe de los intereses totales se obtiene mediante la expresión:

$$I = C_n - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.
n: Número de períodos de tiempo.
i: Tipo de interés unitario.
I: Intereses totales.

EJERCICIO 4.9

Se presta un capital de 12.000 euros durante 5 años en capitalización compuesta al 4% anual. Calcular el montante y los intereses totales.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El montante se calcula mediante la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta: $C_n = 12.000(1 + 0{,}04)^5 = 14.599{,}83$ €. El importe de los intereses totales se obtiene como: $I = C_n - C_0 = 14.599{,}83 - 12.000 = 2.599{,}83$ €. También podemos obtener la cuantía de los intereses totales de la siguiente forma: $I = C_0[(1 + i)^n - 1] = 12.000[(1 + 0{,}04)^5 - 1] = 2.599{,}83$ €.

EJERCICIO 4.10

Se impone un capital durante 8 años en capitalización compuesta al 6% anual, obteniéndose un capital final de 4.144 €. Calcular el capital impuesto inicialmente y el capital equivalente en el año 3.

Resolución

El capital inicial se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera: $4.144 = C_0(1 + 0{,}06)^8 \Rightarrow C_0 = 2.600$ €. El capital equivalente en el año 3 se puede obtener a través del capital inicial o del capital equivalente en el año 8: $C_3 = 2.600(1 + 0{,}06)^3 = 4.144(1 + 0{,}06)^{-5} = 3.096{,}64$ €.

EJERCICIO 4.11

Una persona presta 3.000 euros en capitalización compuesta durante 3 años al 8% anual. Calcular los intereses totales y los intereses periódicos generados en cada uno de los tres años.

Resolución

Para calcular el importe de los intereses totales aplicamos la expresión: $I = C_{n^0} - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1]$, mientras que para obtener los intereses periódicos se aplica cualquiera de las dos expresiones siguientes: $I_s = C_s - C_{s-1} = C_{s-1} \times i$ con $s = 1, 2, 3$.

El importe de los intereses totales al final del tercer año asciende a $I = 3.000\,[(1 + 0{,}08)^3 - 1] = 779{,}14$ €.

El importe de los intereses generados en cada uno de los tres años es:

Año 1: $C_1 = 3.000(1 + 0{,}08) = 3.240$; $I_1 = C_1 - C_0 = 3.240 - 3.000 = 240$ €. También se verifica: $I_1 = C_0 \times i = 3.000 \times 0{,}08 = 240$.

Año 2: $C_2 = 3.000(1 + 0{,}08)^2 = 3.499{,}2$; $I_2 = C_2 - C_1 = 3.499{,}20 - 3.240 = 259{,}20$ €. De otra forma se cumple: $I_2 = C_1 \times i = 3.240 \times 0{,}08 = 259{,}20$.

Año 3: $C_3 = 3.000(1 + 0{,}08)^3 = 3.779{,}14$; $I_3 = C_3 - C_2 = 3.779{,}14 - 3.499{,}2 = 279{,}94$ €. Lógicamente, se cumple: $I_3 = C_2 \times i = 3.499{,}20 \times 0{,}08 = 279{,}94$ €.

© Ediciones Pirámide

Obviamente, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 240 + 259{,}20 + 279{,}94 = 779{,}14$ €. Y también se verifica: $I = C_n - C_0 = 3.774{,}14 - 3.000$.

4.3.2. Magnitudes derivadas

En este epígrafe se van a obtener las expresiones que nos permiten calcular los factores, réditos y tantos correspondientes al sistema financiero de capitalización compuesta, tomando (t_0, t_n) como intervalo temporal y teniendo en cuenta que la amplitud del mismo es $t_n - t_0 = n$.

A) Factor de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$u(t_0, t_n; p) = \frac{C_n}{C_0} = \frac{C_0(1+i)^n}{C_0} = (1+i)^n$$

$$u^*(t_0, t_n; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{C_0}{C_0(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

B) Rédito de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$r(t_0, t_n; p) = u(t_0, t_n; p) - 1 = (1+i)^n - 1$$

$$r^*(t_0, t_n; p) = 1 - u^*(t_0, t_n; p) = 1 - (1+i)^{-n}$$

C) Tanto de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{r(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{(1+i)^n - 1}{n}$$

$$\rho^*(t_0, t_n; p) = \frac{r^*(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{n}$$

Si tomamos $n = 1$, es decir, que la amplitud del intervalo temporal sea la unidad, las expresiones del tanto de capitalización y del de contracapitalización son las siguientes:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{(1+i)^1 - 1}{1} = i$$

$$\rho^*(t_0, t_n; p) = \frac{1 - (1+i)^{-1}}{1} = i^*$$

© Ediciones Pirámide

Por consiguiente, el tanto de capitalización i representa el precio financiero total por unidad de capital inicial y para intervalos unitarios de tiempo, denominándose **tipo de interés pospagable.** En cambio, el tanto de contracapitalización i^* representa el precio financiero anticipado o prepagable por unidad de capital final y para intervalos unitarios de tiempo, recibiendo el nombre de **tipo de interés anticipado.**

De la expresión del tipo de interés anticipado $i^* = 1 - (1 + i)^{-1}$, se tiene que $(1 + i)(1 - i^*) = 1$, ecuación que permite expresar un tipo de interés en función del otro:

$$i = \frac{i^*}{1 - i^*} \quad ; \quad i^* = \frac{i}{1 + i}$$

EJERCICIO 4.12

Se impone un capital durante 6 años en capitalización compuesta a un tipo de interés del 4% anual. Calcular el rédito y el tanto de capitalización y de contracapitalización asociado a dicho intervalo temporal.

Resolución

Factor de capitalización: $u(0,6;\, p) = (1 + 0,04)^6 = 1,265319018$
Rédito de capitalización: $r(0,6;\, p) = 1,265319018 - 1 = 0,265319018$

Tanto de capitalización: $\rho(0,6;\, p) = \dfrac{0,265319018}{6} = 0,044219836$

Factor de contracapitalización: $u^*(0,6;\, p) = (1 + 0,04)^{-6} = 0,790314525$
Rédito de contracapitalización: $r^*(0,6;\, p) = 1 - 0,790314525 = 0,209685474$

Tanto de contracapitalización: $\rho^*(0,6;\, p) = \dfrac{0,209685474}{6} = 0,034947579$

De acuerdo con los resultados obtenidos, el rédito de capitalización $r(0,6;\, p) = 0,265319018$ nos indica el precio financiero unitario pospagable o interés pospagable de una unidad monetaria impuesta durante 6 años. El tanto de capitalización $\rho(0,6;\, p) = 0,044219836$ nos indica el precio financiero medio o interés promedio anual pospagable para un intervalo temporal de 6 años. En cuanto a las magnitudes de contracapitalización, el rédito de contracapitalización $r^*(0,6;\, p) = 0,209685474$ nos indica el precio financiero unitario anticipado o interés prepagable de una unidad monetaria durante 6 años. El tanto de contracapitalización $\rho^*(0,6;\, p) = 0,034947579$ nos indica el precio financiero medio anticipado o interés promedio anual prepagable para un intervalo temporal de 6 años.

© Ediciones Pirámide

4.3.3. Tantos equivalentes

Dos tantos i e $i^{(m)}$, referidos a distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando para un mismo capital inicial y durante el mismo tiempo producen idéntico montante. Por ejemplo, el montante de cierto capital al cabo de 5 años al 8% anual, toma el mismo valor que si calculamos el montante al final de $5 \times 12 = 60$ meses al tipo mensual equivalente al 8% anual.

Así, para un capital inicial C_0 que se imponga durante n períodos al tipo de interés i, estando referidos n e i a la misma unidad de tiempo, el montante obtenido es $C_n = C_0(1 + i)^n$. En el supuesto de que dicho capital C_0 sea impuesto durante el mismo intervalo temporal, pero aplicándose un tipo de interés $i^{(m)}$ referido a otra unidad de tiempo de amplitud $\frac{1}{m}$, el montante obtenido es $C_n = C_0(1 + i^{(m)})^{n \times m}$, ya que en cada unidad de tiempo a la que están referidos n e i, hay m unidades a las que está referido $i^{(m)}$. Para que ambos tipos de interés i e $i^{(m)}$ sean equivalentes, se debe cumplir que la cuantía de ambos montantes sea la misma:

$$C_n = C_0(1 + i)^n = C_0(1 + i^{(m)})^{m \times n}$$

de donde se obtiene la siguiente relación:

$$(1 + i^{(m)})^m = 1 + i \Rightarrow i^{(m)} = (1 + i)^{1/m} - 1$$

Es preciso destacar que las expresiones anteriores son válidas exclusivamente en el sistema de capitalización compuesta.

El tipo de interés i se refiere a períodos unitarios de tiempo, e $i^{(m)}$ a subperíodos de amplitud $\frac{1}{m}$, por lo que:

- i: Tipo de interés unitario o tanto efectivo del período.
- $i^{(m)}$: Tanto o tipo efectivo del subperíodo.
- m: Número de subperíodos existentes en cada unidad de tiempo a la que va referido i.

Normalmente i va referido al año, por lo que $i^{(m)}$ será de periodicidad inferior al mismo (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual, ...) con $m = 2, 4, 12$, respectivamente.

EJERCICIO 4.13

Calcular el tipo de interés semestral equivalente al 5% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

En este caso tenemos que el tipo de interés del período es $i = 0{,}05$ anual y el número de subperíodos es $m = 2$, ya que en un año existen 2 semestres. La incógnita es el tipo de interés del subperíodo $i^{(m)}$ semestral:

$$(1 + i^{(m)})^2 = 1 + 0{,}05 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}05)^{1/2} - 1 = 0{,}02469507 \text{ semestral}$$

EJERCICIO 4.14

Calcular el tipo de interés anual equivalente al 2% cuatrimestral.

Resolución

El tipo de interés del subperíodo es $i^{(m)} = 0{,}02$ cuatrimestral; el tipo de interés del período es i anual y el número de subperíodos es $m = 3$, ya que en un año existen 3 cuatrimestres. El tipo de interés anual i es:

$$(1 + i) = (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow i = (1 + 0{,}02)^3 - 1 = 0{,}061208 \text{ anual}$$

EJERCICIO 4.15

Calcular el tipo de interés cuatrimestral equivalente al 1% mensual.

Resolución

El tipo de interés del subperíodo es el 1% mensual, el tipo de interés del período es el tipo cuatrimestral, siendo el número de subperíodos $m = 4$, ya que en un cuatrimestre hay 4 meses. El tipo de interés cuatrimestral es:

$$(1 + i^{(m)}) = (1 + 0{,}01)^4 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}01)^4 - 1 = 0{,}04060401 \text{ cuatrimestral}$$

Tal y como se ha expuesto, si en la expresión de los tantos equivalentes $1 + i = (1 + i^{(m)})^m$, consideramos el tanto anual i, el tanto $i^{(m)}$ corresponde a períodos de amplitud $\frac{1}{m}$ del año. Al efectuar su proyección aritmética anual, se obtiene un tanto denominado **tanto nominal de frecuencia** m, o tanto anual nominal convertible m veces, que se simboliza por $j_{(m)}$:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}$$

© Ediciones Pirámide

En general, la frecuencia m de capitalización nos indica el número de veces que en un período se acumulan los intereses al capital para producir nuevos intereses.

Por ejemplo, para el 3% semestral, el tanto nominal anual de frecuencia semestral es el 6%. Si consideramos como período unitario el trienio, el tanto nominal trienal de frecuencia semestral es el 18%, pues en un trienio existen 6 semestres. No obstante, en la práctica generalmente los tantos nominales son anuales.

El tanto nominal anual puede expresarse de cualquiera de las formas siguientes, según el período al que se refiera:

- Tanto nominal capitalizable (o acumulable o pagadero) semestralmente, trimestralmente, mensualmente, etc.
- Tanto nominal convertible por semestres, trimestres, meses, etc.
- Tanto nominal anual de frecuencia m (si $m = 2$ es de frecuencia semestral, si $m = 3$ es de frecuencia cuatrimestral, etc.).

En general, ante un tipo de interés concreto, es preciso dejar claro si el sistema financiero de valoración es la capitalización simple o la compuesta, y en este último caso, si se trata de un tipo efectivo i, de un tipo del subperíodo $i^{(m)}$ o de un tipo nominal $j_{(m)}$.

EJERCICIO 4.16

Calcular el tipo de interés anual equivalente al 9% anual capitalizable mensualmente.

Resolución

Del tipo nominal anual capitalizable mensualmente se obtiene el tipo de interés mensual equivalente, teniendo en cuenta que $m = 12$, ya que en un año existen 12 meses:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075 \text{ mensual}$$

Una vez calculado el tipo de interés mensual se determina el tipo de interés anual equivalente al 0,0075 mensual. Para ello, consideramos que el tipo de interés del período es i anual, el tipo de interés del subperíodo es el $i^{(m)}$ mensual y que el número de subperíodos es $m = 12$. Dicho tipo de interés anual es:

$$(1 + i) = (1 + 0{,}0075)^{12} \Rightarrow i = (1 + 0{,}0075)^{12} - 1 = 0{,}09380689 \text{ anual}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 4.17

Calcular el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual capitalizable semestralmente.

Resolución

Del tipo nominal anual capitalizable semestralmente se calcula el tipo de interés semestral, considerando que $m = 2$, ya que en un año existen 2 semestres:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03 \text{ semestral}$$

Con el tipo de interés semestral se calcula el tipo de interés mensual equivalente. Tenemos, pues, que el tipo de interés del período es el 3% semestral, el tipo de interés del subperíodo es el $i^{(k)}$ mensual y que el número de subperíodos es $k = 6$, ya que en un semestre hay 6 meses. El tipo de interés mensual es:

$$(1 + 0{,}03) = (1 + i^{(k)})^6 \Rightarrow i^{(k)} = (1 + 0{,}03)^{1/6} - 1 = 0{,}004938622 \text{ mensual}$$

EJERCICIO 4.18

Calcular el tanto nominal anual capitalizable mensualmente equivalente al 3% trimestral.

Resolución

Para determinar el tipo nominal anual capitalizable mensualmente nos hace falta calcular previamente el tipo de interés mensual $i^{(m)}$, siendo $m = 12$, ya que en un año existen 12 meses. Teniendo en cuenta que en un trimestre hay 3 meses, el tipo de interés mensual equivalente al 3% trimestral es:

$$(1 + 0{,}03) = (1 + i^{(m)})^3 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}03)^{1/3} - 1 = 0{,}009901634 \text{ mensual}$$

Por lo que el tipo de interés anual capitalizable mensualmente es:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow j_{(m)} = 0{,}009901634 \times 12 = 0{,}118819608$$

EJERCICIO 4.19

Calcular el tanto nominal semestral acumulable trimestralmente equivalente al 7% anual convertible semestralmente.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Para determinar el tipo nominal semestral acumulable trimestralmente $j_{(m)} = m \times i^{(m)}$ es necesario determinar previamente el tipo de interés trimestral $i^{(m)}$ y posteriormente multiplicarlo por el valor $m = 2$, ya que en un semestre existen 2 trimestres.

El tipo de interés trimestral lo vamos a calcular a partir del 7% anual convertible semestralmente. De dicho tipo nominal se obtiene el tipo de interés efectivo semestral, ya que en un año existen 2 semestres:

$$j_{(k)} = k \times i^{(k)} \Rightarrow i^{(k)} = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035 \text{ semestral}$$

Con el tipo de interés semestral se calcula el tipo de interés trimestral, teniendo en cuenta que en un semestre hay 2 trimestres:

$$(1 + 0{,}035) = (1 + i^{(m)})^2 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}035)^{1/2} - 1 = 0{,}017342497 \text{ trimestral}$$

Por tanto, el tipo de interés semestral acumulable trimestralmente es:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow j_{(m)} = 0{,}017349497 \times 2 = 0{,}034698994$$

4.3.4. Capitalización fraccionada y capitalización continua

Cuando los intereses se acumulan por períodos inferiores al año, es decir, cada $\frac{1}{m}$ de año, se dice que la capitalización es fraccionada. Por ejemplo, si un individuo impone un cierto capital en capitalización compuesta durante varios años al 1% trimestral, nos encontramos ante una capitalización fraccionada, ya que los intereses se devengan cada trimestre.

Teniendo en cuenta la relación existente entre tantos equivalentes: $(1 + i^{(m)})^m = 1 + i$, la ecuación de equivalencia financiera es:

$$C_n = C_0(1 + i)^n \Rightarrow C_n = C_0(1 + i^{(m)})^{m \times n}$$

Si expresamos dicha ecuación en función del tanto nominal, nos queda:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m \times n}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 4.20

Se impone un capital de 5.000 euros en capitalización compuesta durante 3 años al 9% anual pagadero semestralmente. Calcular los intereses totales generados.

Resolución

El importe de los intereses totales se calcula a través de la expresión $I = C_n - C_0$. Para ello, es preciso determinar el tipo de interés semestral correspondiente al 9% anual pagadero semestralmente: $j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045$ semestral.

Por tanto, los intereses totales generados son:

$$I = C_n - C_0 = 5.000[(1 + 0{,}045)^6 - 1] = 1.511{,}30 \text{ €}$$

Si en la capitalización fraccionada el número de fraccionamientos m aumenta, la amplitud $\frac{1}{m}$ del intervalo entre dos capitalizaciones de intereses disminuye. Así, por ejemplo, si $m = 2$ los intereses se acumulan por semestres, y la amplitud es $\frac{1}{2}$; en cambio, si $m = 12$ los intereses se acumulan cada mes y la amplitud es $\frac{1}{12}$. En general, cuando el número de fraccionamientos m tiende a infinito ($m \to \infty$), la amplitud $\frac{1}{m}$ tiende a cero $\left(\frac{1}{m} \to 0\right)$, produciéndose los intereses en intervalos infinitesimales de tiempo, o sea, de forma instantánea o continua en el tiempo. Por tanto, podemos definir la **capitalización continua** como aquella en la que la acumulación de intereses se realiza de forma instantánea.

Recordemos que la ecuación de equivalencia financiera en la capitalización fraccionada es:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m \times n} \Rightarrow C_n = C_0 \left[\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m\right]^n$$

Si el número de fraccionamientos tiende a infinito, el tipo de interés nominal pactado constituye un **tipo nominal acumulable instantáneamente** o, simplemente, un **tanto instantáneo,** que representamos por k, siendo: $\lim_{m \to \infty} j_{(m)} = k$. En tal caso, el montante o capital final se obtiene al calcular el límite de la expresión anterior cuando $m \to \infty$:

© Ediciones Pirámide

$$C_n = \lim_{m \to \infty} C_0 \left[\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m} \right)^m \right]^n$$

Recordemos que $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a$, y por ello:

$$C_n = \lim_{m \to \infty} C_0 \left[\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m} \right)^m \right]^n = C_0 (e^k)^n$$

De manera que la ecuación de equivalencia financiera en capitalización continua es:

$$C_n = C_0 \times e^{n \times k}$$

siendo k el tipo de interés continuo o tanto instantáneo de capitalización, referido a la misma unidad de tiempo que n. El significado financiero del tanto instantáneo es el de interés nominal asociado a intervalos infinitesimales de tiempo.

Si queremos determinar el tipo efectivo anual en capitalización compuesta, equivalente a un tanto en capitalización continua, tenemos:

$$C_n = C_0 (1 + i)^n = C_0 \times e^{n \times k}$$

Y en consecuencia, la relación entre el tipo efectivo anual i y el tipo instantáneo anual k, es la siguiente:

$$1 + i = e^k \Rightarrow k = log_e (1 + i)$$

EJERCICIO 4.21

Se impone un capital de 30.000 € al 6% anual instantáneo. Calcular el montante al final de año 4 y del año 10.

Resolución

El capital final o montante en 4 se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera: $C_n = 30.000 \times e^{0,06 \times 4} = 38.137,47$ €. El capital equivalente en el año 10 se puede obtener a través del capital inicial o del equivalente en el año 4:

$$C_{10} = 30.000 \times e^{0,06 \times 10} = 38.137,47 \times e^{0,06 \times 6} = 54.663,56 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 4.22

Se tiene un capital de 12.000 euros con vencimiento dentro de 10 años. Sabiendo que el tipo de interés es el 1% mensual instantáneo, calcular el valor actual de dicho capital y el tipo de interés anual equivalente al mencionado tipo de interés mensual instantáneo.

Resolución

En primer lugar, y para determinar el valor actual del capital con vencimiento dentro de 10 años, se utiliza la ecuación de equivalencia financiera, expresando la duración en meses: $C_0 = 12.000 \times e^{-0,01 \times 120} = 3.614,33$ euros. En segundo lugar, y para calcular el tipo de interés compuesto anual equivalente al 1% instantáneo mensual, se plantea la ecuación de equivalencia financiera de la capitalización compuesta y la de capitalización continua:

$$C_n = C_0(1 + i)^{10} = C_0 \times e^{10 \times 12 \times 0,01} \Rightarrow i = 12,7497\%$$

O también: $1 + i = e^k \Rightarrow i = e^{0,01 \times 12} - 1 = 12,7497\%$.

4.3.5. Capitalización con intereses anticipados

Tal y como se ha expuesto, la ecuación de equivalencia financiera en el sistema de capitalización compuesta es $C_n = C_0(1 + i)^n$, y si tenemos en cuenta la relación existente entre el tipo de interés vencido y el tipo de interés anticipado o prepagable, $(1 + i)(1 - i^*) = 1$, al sustituir en la expresión anterior se obtiene:

$$C_n = C_0(1 - i^*)^{-n}$$

Si despejamos el capital C_0, se llega a la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta con intereses anticipados:

$$C_0 = C_n(1 - i^*)^n$$

El importe de los intereses totales anticipados o prepagables es:

$$I^* = C_n - C_0 = C_n[1 - (1 - i^*)^n]$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.

© Ediciones Pirámide

n: Número de períodos de tiempo.
i^*: Tipo de interés anticipado unitario.
I^*: Intereses totales anticipados.

EJERCICIO 4.23

Se presta un capital de cuantía nominal 50.000 euros, durante 5 años, en capitalización compuesta a un tipo de interés anticipado del 8% anual. Determinar el importe de los intereses anticipados y el tipo de interés vencido equivalente a dicho tipo de interés.

Resolución

El capital inicial o cuantía neta, líquida o efectiva que se desembolsa al inicio de la operación se obtiene al aplicar la ecuación de equivalencia financiera con intereses anticipados: $C_0 = 50.000(1 - 0{,}08)^5 = 32.954{,}08$ euros. El importe de los intereses anticipados o precio financiero total anticipado es $I^* = 50.000 - 32.954{,}08 = 17.045{,}92$ euros.

La cuantía de 50.000 € la denominamos importe nominal, pues la que realmente se entrega en préstamo es 32.954,08 €, debiendo devolverse al final de los cinco años el importe de 50.000 euros.

Para obtener el tipo de interés vencido o pospagable i equivalente al tipo de interés prepagable o anticipado $i^* = 0{,}08$ anual, sustituimos en la expresión $i = \dfrac{i^*}{1 - i^*}$. En consecuencia, tenemos: $i = \dfrac{0{,}08}{1 - 0{,}08} = 0{,}086956$ anual.

Otra forma de calcular el tipo de interés vencido equivalente al 8% anual anticipado es planteando la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta, sabiendo que $C_0 = 32.954{,}08$ euros y $C_n = 50.000$ euros:

$$50.000 = 32.954{,}08(1 + i)^5 \Rightarrow i = 0{,}086956 \text{ anual}$$

4.4. SISTEMA FINANCIERO DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

4.4.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera

Valorar capitales financieros con el sistema de descuento simple comercial implica que cuando un sujeto, a efectos de anticipar su cobro, cede un capital (C, t) para percibir el capital (V, p) equivalente o sustituto en $p < t$, acepta lo siguiente:

© Ediciones Pirámide

a) El precio financiero total D_{SC} es proporcional a la cuantía C a descontar, al número de períodos $t - p$ y al tipo de descuento d.

b) El precio financiero total se abona en p.

De acuerdo con las hipótesis establecidas, tenemos que $D_{SC} = C(t - p)d$, por lo que se verifica $V = C - D = C - C \times d(t - p) = C[1 - d(t - p)]$, siendo la ley financiera unitaria del sistema de descuento simple comercial[3]:

$$A(t; p) = 1 - d(t - p) \text{ con } p < t$$

Es preciso destacar que la amplitud del intervalo temporal $(t - p)$ y el tipo de descuento d han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Si dos sujetos deciden intercambiar los capitales financieros (C_0, t_0) y (C_n, t_n) según el sistema de descuento simple comercial, realizarán dicho intercambio si los dos capitales mencionados son equivalentes, debiéndose cumplir:

$$(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n) \Rightarrow C_0 \times A(t_0; p) = C_n \times A(t_n; p)$$

$$C_0[1 - d(t_0 - p)] = C_n[1 - d(t_n - p)]$$

$$C_0 = C_n \frac{1 - d(t_n - p)}{1 - d(t_0 - p)}$$

En la aplicación práctica de este sistema de descuento se utiliza como punto p de aplicación el vencimiento del primer capital: $p = t_0$. Si tomamos $t_n - t_0 = n$ se obtiene la ecuación de equivalencia financiera:

$$C_0 = C_n(1 - n \times d)$$

El importe del descuento simple comercial es:

$$D_{SC} = C_n - C_0 = C_n \times n \times d$$

siendo:

C_0: Capital inicial, valor actual o valor descontado.
C_n: Capital final o capital a descontar.
n: Número de períodos de tiempo.
d: Tipo de descuento unitario.
D_{SC}: Descuento simple comercial o precio financiero total.

[3] Recordemos que $V = C \times A(t; p)$.

© Ediciones Pirámide

En este sistema, el precio financiero total o descuento simple comercial se calcula sobre el capital final o capital a descontar.

EJERCICIO 4.24

Una persona descuenta un capital de 3.000 euros con vencimiento dentro de 4 meses. Calcular el valor actual y el descuento simple comercial, sabiendo que el tipo de descuento es el 7% anual.

Resolución

El capital inicial o valor descontado se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia financiera: $C_0 = 3.000 \left(1 - \frac{4}{12} \times 0{,}07\right) = 2.930$ euros.

El importe del descuento simple comercial o precio financiero total es $D_{SC} =$ $= 3.000 - 2.930 = 70$ euros.

EJERCICIO 4.25

Se descuenta un capital de 24.000 euros con vencimiento dentro de 80 días. Calcular el descuento simple comercial para un tipo de descuento del 5% anual.

Resolución

Para calcular el precio financiero total o descuento simple comercial se suele tomar el año comercial (360 días), por lo que en consecuencia se tiene: $D_{SC} =$ $= 24.000 \times \frac{80}{360} \times 0{,}05 = 266{,}67$ euros.

EJERCICIO 4.26

Un capital de cuantía 30.000 €, con vencimiento el 2 de noviembre de cierto año, es descontado el 15 de agosto de dicho año, obteniéndose un valor actual de 29.736,67 €. Determinar el tipo de descuento aplicado.

Resolución

El número de días de descuento es 79, por lo que la ecuación de equivalencia financiera es: $29.736{,}67 = 30.000 \left(1 - \frac{79}{360} \times d\right)$, obteniéndose un tipo de descuento del 4% anual.

© Ediciones Pirámide

4.4.2. Magnitudes derivadas

Para obtener las expresiones que nos permiten calcular el factor, el rédito y el tanto correspondientes al sistema financiero de descuento simple comercial, se toma el intervalo temporal (t_0, t_n) de amplitud $t_n - t_0 = n$, y se considera como punto p de aplicación el vencimiento del primer capital: $p = t_0$:

A) Factor de descuento:

$$v(t_0, t_n; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{C_n(1 - n \times d)}{C_n} = 1 - n \times d$$

B) Rédito de descuento:

$$d(t_0, t_n; p) = 1 - v(t_0, t_n; p) = 1 - (1 - n \times d) = n \times d$$

C) Tanto de descuento:

$$\delta(t_0, t_n; p) = \frac{d(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{n \times d}{n} = d$$

Por consiguiente, el tanto de descuento d representa el precio financiero total por unidad de capital final y por unidad de tiempo, denominándose **tipo de descuento.**

EJERCICIO 4.27

Se descuenta un capital de 2.000 € durante 2 meses, obteniéndose un valor descontado de 1.960 €. Calcular el factor, el rédito y el tanto de descuento asociados a dicho intervalo temporal.

Resolución

La amplitud del intervalo temporal es $n = 2$ meses, por lo que se verifica:

Factor de descuento: $v(0,2; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{1.960}{2.000} = 0,98$

Rédito de descuento: $d(0,2; p) = 1 - v(0,2; p) = 1 - 0,98 = 0,02$

Tanto de descuento: $\delta(0,2; p) = \frac{d(0,2; p)}{n} = \frac{0,02}{2} = 0,01$

© Ediciones Pirámide

El rédito de descuento $d(0{,}2;\ p) = 0{,}02$ nos indica el descuento simple comercial o precio financiero total por anticipar una unidad monetaria durante un plazo de 2 meses. El tanto de descuento $\delta(0{,}2;\ p) = 0{,}01$ indica el precio financiero medio o descuento mensual por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo, para un intervalo temporal de 2 meses.

4.4.3. Tantos equivalentes

Dos tantos d y $d^{(m)}$, referidos a distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando para un mismo capital a descontar y durante el mismo tiempo, producen idéntico valor actual o capital inicial. Por ejemplo, el valor actual de cierto capital con vencimiento dentro de 2 años, descontado al 3% anual, coincide con el que se obtendría si se descontase al tipo mensual equivalente durante 24 meses.

Así, para un capital final C_n que se descuente durante n períodos al tipo de descuento d, estando referidos n y d a la misma unidad de tiempo, el capital inicial es $C_0 = C_n(1 - n \times d)$. Si, por el contrario, a dicho capital C_n descontado durante el mismo período temporal, se le aplica un tipo de descuento $d^{(m)}$ referido a otra unidad de tiempo de amplitud $\frac{1}{m}$, el capital descontado sería $C_0 = C_n(1 - m \times n \times d^{(m)})$.

En el supuesto de que ambos tipos de descuento d y $d^{(m)}$ sean equivalentes, la cuantía de ambos capitales iniciales deben ser iguales. Por tanto:

$$C_n(1 - n \times d) = C_n(1 - m \times n \times d^{(m)})$$

Obteniéndose la siguiente relación: $d^{(m)} = \frac{d}{m}$, siendo:

- d: Tipo de descuento unitario.
- $d^{(m)}$: Tanto o tipo de descuento del subperíodo.
- m: Número de subperíodos existentes en cada unidad de tiempo a la que va referido d.

Normalmente d va referido al año, por lo que $d^{(m)}$ será de periodicidad inferior al mismo (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual...), con $m = 2, 4, 12$, respectivamente. De manera que si tenemos un tipo de descuento del 6% anual, el equivalente semestral es: $d^{(m)} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$.

EJERCICIO 4.28

Calcular el descuento simple comercial de un capital de 8.000 euros con vencimiento dentro de 5 meses al 9% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Primero se determina el tipo de descuento mensual equivalente al 9% anual: $d^{(m)} = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075$ mensual. A continuación se calcula el importe del descuento simple comercial, sustituyendo en la siguiente expresión: $D_{SC} = C_n \times n \times d = 8.000 \times \times 5 \times 0{,}0075 = 300$ euros.

4.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se impone un capital financiero en capitalización simple durante 5 meses al 0,75% trimestral, y a continuación los intereses generados se colocan nuevamente en capitalización simple durante 6 meses al 4% anual. Sabiendo que el montante constituido en esta segunda imposición es de 1.530 euros, calcular la cuantía del capital impuesto inicialmente.

Resolución

Si denominamos C_0 al capital impuesto inicialmente en capitalización simple, y sabiendo que el tipo de interés mensual equivalente al 0,75% trimestral es $i^{(m)} = \frac{0{,}0075}{3} = 0{,}0025$, el importe de los intereses generados al cabo de los 5 meses es: $I = C_0 \times 5 \times 0{,}0025 = 0{,}0125C_0$. La cuantía de estos intereses se impone nuevamente en capitalización simple durante 6 meses al 4% anual, por lo que se verifica:

$$1.530 = 0{,}0125C_0\left(1 + 6\frac{0{,}04}{12}\right) \Rightarrow C_0 = 120.000 \text{ euros}$$

2. Se desea colocar un capital en capitalización compuesta durante 10 años al 6,09% anual, con la finalidad de obtener en el último semestre unos intereses de 1.500 euros. Calcular el importe del capital impuesto inicialmente.

Resolución

El tipo de interés semestral equivalente al 6,09% anual es:

$$(1 + i^{(m)})^2 = 1 + 0{,}0609 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}0609)^{1/2} - 1 = 0{,}03 \text{ semestral}$$

Tras la imposición del capital C_0 durante 9 años y medio, o lo que es lo mismo durante 19 semestres, se obtendría un montante o capital constituido de $C_{19} = = C_0(1 + 0{,}03)^{19}$. De manera que los intereses correspondientes al último semestre

© Ediciones Pirámide

se obtiene a través de la expresión siguiente: $I_{20} = C_{19} \times i^{(m)}$. Sustituyendo en la misma, se tiene el importe del capital impuesto al inicio de la operación:

$$1.500 = C_0(1 + 0{,}03)^{19} \times 0{,}03 \Rightarrow C_0 = 28.514{,}30 \text{ €}$$

3. Un individuo deposita en una entidad financiera un capital de 15.000 euros durante 18 años a un interés compuesto del 4% anual. Sabiendo que al final de cada uno de los 13 últimos años retira el 25% de los intereses generados para atender diversos gastos, calcular el montante al finalizar los 18 años.

Resolución

Para calcular el montante o capital constituido al final de los cinco primeros años, en los que no se retira cuantía alguna, se utiliza la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta: $C_5 = 15.000(1 + 0{,}04)^5 = 18.249{,}79$. Para determinar el montante al final de los trece siguientes, en los que se retira el 25% de los intereses generados, es preciso deducir una nueva ecuación de equivalencia financiera. El capital constituido al final de cada año en función del capital constituido al final del período anterior es $C_s = C_{s-1}(1 + i)$. Si se retira el 25% de los intereses generados, se obtendrá:

$$C_6 = C_5(1 + i) - 0{,}25 \times C_5 i = C_5(1 + 0{,}75 \times i)$$

$$C_7 = C_6(1 + i) - 0{,}25 \times C_6 i = C_6(1 + 0{,}75 \times i) = C_5(1 + 0{,}75 \times i)^2$$

$$C_8 = C_7(1 + i) - 0{,}25 \times C_7 i = C_7(1 + 0{,}75 \times i) = C_5(1 + 0{,}75 \times i)^3$$

Y así sucesivamente hasta el año 18: $C_{18} = C_5(1 + 0{,}75 \times i)^{13}$. En consecuencia, al sustituir llegamos a: $C_{18} = 18.249{,}79(1 + 0{,}75 \times 0{,}04)^{13} = 26.800{,}43$ €.

Es interesante señalar que en los últimos 13 años, al retirar el 25% de los intereses que se producen en cada período, los que se acumulan son el 75% restante, por lo que el tipo de interés al que se produce la acumulación citada equivale al 75% del tipo inicial.

4. Se impone un capital de 24.000 euros en capitalización simple durante 9 meses al 2% cuatrimestral. El montante constituido se impone en capitalización compuesta durante 25 meses, obteniéndose unos intereses totales de 2.168,27 €. Calcular el tipo de interés anual pagadero trimestralmente aplicado en la imposición en capitalización compuesta.

Resolución

Si se impone inicialmente 24.000 € en capitalización simple durante 9 meses, siendo el tipo de interés mensual equivalente al 2% cuatrimestral del $i^{(k)} = \dfrac{0{,}02}{4} = 0{,}005$,

© Ediciones Pirámide

el importe del montante constituido al cabo de 9 meses es: $C_9 = 24.000(1 + 9 \times \times 0{,}005) \Rightarrow C_9 = 25.080$. Dicho importe se coloca durante 25 meses en capitalización compuesta, obteniéndose unos intereses totales de 2.168,27, por lo que el tipo de interés trimestral utilizado en la valoración es:

$$2.168{,}27 = 25.080\left[\left(1 + i^{(m)}\right)^{\frac{25}{3}} - 1\right] \Rightarrow i^{(m)} = 0{,}01 \text{ trimestral}$$

El tipo de interés anual pagadero trimestralmente se obtiene multiplicando el tipo trimestral por el número de trimestres que hay en un año: $j_{(m)} = m \times i^{(m)} = = 4 \times 0{,}01 = 0{,}04$.

5. Se presta un capital de cuantía nominal 15.000 € durante 42 meses en capitalización compuesta con intereses anticipados. Para los 27 primeros meses el tipo de interés anticipado es del 5% anual y para los restantes es del 6% anual. Determinar el tipo medio de interés vencido equivalente.

Resolución

Para obtener el tipo de interés vencido o pospagable i equivalente a un tipo de interés prepagable o anticipado i^* se utiliza la expresión $i = \dfrac{i^*}{1 - i^*}$. Sin embargo, como tenemos dos tipos de interés anticipados, hemos de obtener el tipo de interés medio vencido a través de la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta $C_n = C_0(1 + i)^n$. Para ello, es necesario determinar el importe de C_0, que constituye la cuantía neta, líquida o efectiva prestada en el origen de la operación. Dicho importe se obtiene planteando la ecuación de equivalencia con intereses anticipados, y teniendo en cuenta que existen dos tipos de interés:

$$C_0 = 15.000(1 - 0{,}05)^{27/12} \times (1 - 0{,}06)^{15/12} = 12.370{,}27$$

A continuación se plantea la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta con intereses pospagables, para obtener el tipo de interés medio anual pospagable utilizado en la valoración:

$$15.000 = 12.370{,}27(1 + i)^{42/12} \Rightarrow i = 0{,}0566173 \text{ anual}$$

6. Debemos cancelar hoy una deuda de 30.000 € y proponemos al acreedor entregarle a cambio dos capitales de cuantía 20.000 € cada uno, con vencimientos respectivos dentro de 4 y de 8 años. Determinar el tipo de interés compuesto de la operación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La operación anterior supone intercambiar el capital (30.000,0) por los capitales (20.000,4) y (20.000,8). En consecuencia, la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta es:

$$30.000 = 20.000(1 + i)^{-4} + 20.000(1+i)^{-8}$$

Efectuando el cambio $(1 + i)^{-4} = x$, y simplificando se obtiene: $x^2 + x - 1{,}5 = 0$. Al resolver, y tomando sólo el valor positivo de x, llegamos a: $(1 + i)^{-4} = 0{,}822875655$, por lo que el tipo de interés anual es el 4,9945%.

7. Se descuentan simultáneamente dos capitales mediante el sistema de descuento simple comercial. El primero es de cuantía 900 euros y vencimiento dentro de 45 días, el segundo capital asciende a 1.300 euros y vence dentro de 60 días. Calcular el valor actual total y la cuantía del descuento, sabiendo que el tipo de descuento es el 9% anual.

Resolución

El capital inicial o valor descontado de los dos capitales se obtiene como:

$$C_0 = 900\left(1 - \frac{45}{360} \times 0{,}09\right) + 1.300\left(1 - \frac{60}{360} \times 0{,}09\right) = 2.170{,}38\ €.$$

El importe total del descuento simple comercial o precio financiero total es $D_{SC} = 900 + 1.300 - 2.170{,}38 = 29{,}62$ €.

También podemos determinar el importe del descuento total de la siguiente forma:

$$D = 900 \times \frac{45}{360} \times 0{,}09 + 1.300 \times \frac{60}{360} \times 0{,}09 = 29{,}62\ €$$

8. Una empresa debe pagar una letra de nominal 30.000 € dentro de 180 días. Acuerda con su acreedor efectuar dos pagos, venciendo el primero dentro de 150 días y el segundo dentro de 300 días. Sabiendo que la cuantía del primer pago es de 20.000 €, determinar la cuantía del segundo, si la operación se valora utilizando la ley de descuento simple comercial aplicada en el momento actual y con un tipo de descuento del 5% anual.

Resolución

De acuerdo con lo señalado en cuanto a la aplicación de la ley de descuento simple comercial en el momento actual, ha de verificarse que el valor actual de

© Ediciones Pirámide

30.000 € con vencimiento dentro de 180 días, ha de ser igual a la suma del valor actual de los dos capitales que le sustituyen. Por tanto, denominando X a la cuantía a pagar dentro de 300 días, tenemos:

$$30.000\left(1 - \frac{180}{360} \times 0{,}05\right) = 20.000\left(1 - \frac{150}{360} \times 0{,}05\right) + X\left(1 - \frac{300}{360} \times 0{,}05\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 10.086{,}96 \text{ €}$$

9. Se impone un capital de 50.000 € en capitalización compuesta durante 12 años a un tipo de interés X anual convertible semestralmente. A continuación, el montante resultante se impone en capitalización simple durante 25 meses al 6% semestral. Si la cuantía acumulada al finalizar la segunda operación es de 201.568,75 €, determinar el tipo de interés X.

Resolución

Si se impone un capital de cuantía 50.000 euros en capitalización compuesta durante 12 años a un tipo de interés semestral $i^{(m)}$, el montante constituido es: $C_{12} = 50.000\ (1 + i^{(m)})^{24}$. Si posteriormente se coloca durante 25 meses en capitalización simple al 6% semestral, se verifica:

$$201.568{,}75 = 50.000(1 + i^{(m)})^{24}\left(1 + 25 \times \frac{0{,}06}{6}\right) \Rightarrow i^{(m)} = 0{,}05 \text{ semestral}$$

En consecuencia, el tipo de interés X anual pagadero semestralmente es: $j_{(m)} = m \times i^{(m)} = 2 \times 0{,}05 = 0{,}10$.

4.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular los siguientes tipos de interés en capitalización compuesta:

a) Tipo de interés cuatrimestral equivalente al 2% trimestral.
b) Tipo de interés trienal equivalente al 8% anual capitalizable mensualmente.
c) Tipo de interés semestral convertible trimestralmente equivalente al 1% mensual.
d) Tipo de interés bienal pagadero semestralmente equivalente al 3% trimestral.

2. Se impone un capital de 1.800 € durante 6 meses en capitalización simple, obteniéndose un capital final de 1.827 €. Calcular el factor, el rédito y el tanto de capitalización asociados a dicho intervalo temporal.

© Ediciones Pirámide

3. Se impone un capital de 15.000 euros en una entidad financiera que ofrece, en capitalización simple, el 5% anual durante los primeros 6 meses, y a continuación el 3% anual durante los restantes meses. Determinar la duración total de la imposición para obtener unos intereses totales de 1.950 euros.

4. Se impone en capitalización simple durante 6 meses un capital de 60.000 € al 2,5% anual. Posteriormente, el montante constituido se impone en capitalización compuesta durante 4 años al 3,5% anual. Calcular en esta segunda imposición los intereses periódicos generados en cada uno de los cuatro años.

5. Se presta un capital en capitalización compuesta durante 8 años a los siguientes tipos de interés: durante los cinco primeros años al 6% anual, y en los restantes años al 8% anual acumulable trimestralmente. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses generados en el primer trimestre del año siete ascienden a 81,12 euros.

6. Se impone un capital en capitalización compuesta durante 3 años al 6,09% anual, retirándose al final de cada semestre el 10% de los intereses generados. El montante constituido se impone en capitalización simple durante 18 meses al 4% anual, obteniéndose en la última imposición unos intereses totales de 5.068,82 euros. Calcular el capital impuesto inicialmente en capitalización compuesta.

7. Se presta un capital de nominal de 24.000 euros en capitalización compuesta con intereses anticipados durante 10 años. Calcular el tipo de interés anual anticipado aplicado en la operación, sabiendo que el importe de los intereses anticipados asciende a 8.044,02 euros.

8. Se descuenta un capital con vencimiento dentro de 30 días mediante el sistema de descuento simple comercial a un tipo de descuento del 8% anual. Determinar el valor actual de dicho capital sabiendo que el descuento simple comercial asciende a 40 euros.

9. El valor actual al 25 de abril de cierto año, con la ley de descuento simple comercial, de un capital con vencimiento el 23 de julio de dicho año, es 9.876,39 €. Determinar la cuantía de dicho capital, si el tipo anual de descuento aplicado es el 5%.

10. Una determinada empresa ha de pagar a un mismo acreedor dos letras de cuantía 20.000 y 15.000 euros, con vencimientos respectivos el 15 de abril y el 24 de octubre de cierto año. El día 7 de marzo de dicho año propone a su acreedor sustituir ambas letras por otra de cuantía a determinar y vencimiento el 20 de

© Ediciones Pirámide

agosto de dicho año. Calcular dicha cuantía si acuerdan aplicar la ley de descuento simple comercial el día 7 de marzo, con un tipo de descuento del 5% anual.

11. Se impone cierto capital durante 20 años en capitalización compuesta. Durante los primeros ocho años al 6% anual, y durante los siguientes al 8% anual, pero retirando en éstos, al final de cada año, el 20% de los intereses producidos en el respectivo año. Así, los intereses retirados al final del año 12 ascienden a 307.179,19 €. Determinar el montante al final del año 20.

© Ediciones Pirámide

PARTE SEGUNDA
Rentas financieras

5 Rentas financieras

OBJETIVOS

- Establecer el concepto de renta financiera.
- Analizar el concepto y determinar el valor capital o financiero de una renta.
- Enumerar y diferenciar los distintos tipos de rentas financieras.

SUMARIO

5.1. Concepto.
5.2. Valor capital o financiero de una renta.
5.3. Clasificación de las rentas financieras.
5.4. Ejercicios y problemas resueltos.
5.5. Ejercicios y problemas propuestos.

5.1. CONCEPTO

Teniendo en cuenta los conceptos de capital financiero y de operación financiera, en la actividad económica nos encontramos con conjuntos de capitales con distintos vencimientos a los que se les denomina rentas financieras. Así, por ejemplo, el sueldo mensual que percibe un trabajador, o las cuantías periódicas que debe abonar una persona para devolver un préstamo, constituyen rentas. En general, se define una renta financiera como **«un conjunto de capitales financieros que han de hacerse efectivos en distintos vencimientos».**

Cada uno de los capitales financieros que constituyen la renta recibe el nombre de **término de la renta** y están asociados a los subintervalos temporales en los que se generan, los cuales se denominan períodos de maduración. Así, por ejemplo, el sueldo mensual de un trabajador se genera a lo largo de cada mes.

Gráficamente, podemos representar una renta financiera:

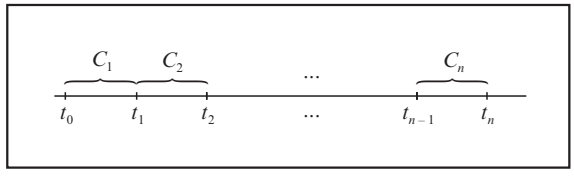


Figura 5.1.

En la definición de renta podemos distinguir dos elementos:

a) Un conjunto de capitales financieros: $\{(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots (C_n, t_n)\}$.

b) La existencia de un intervalo temporal, $[t_0, t_n]$, divisible en n subintervalos.

© Ediciones Pirámide

Además, en toda renta podemos señalar su origen, final y duración. Así:

— El **origen de la renta** es el extremo inferior del subintervalo en el que vence el primer capital.
— El **final de la renta** es el extremo superior del subintervalo en el que vence el último capital.
— La **duración** de la renta es el tiempo que media entre el origen y el final de la misma.

En el siguiente gráfico señalamos los conceptos indicados:

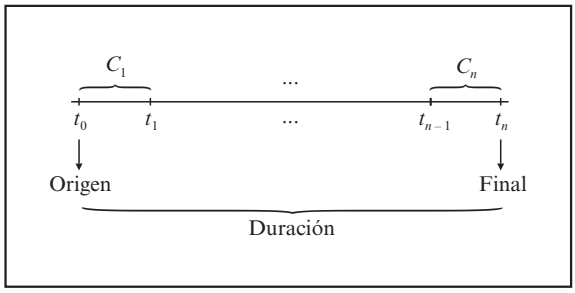


Figura 5.2.

5.2. VALOR CAPITAL O FINANCIERO DE UNA RENTA

Definida una renta financiera y elegida una ley financiera de valoración, denominamos valor capital o financiero de la misma, en un determinado momento del tiempo q, a la suma financiera en ese punto de los capitales financieros que la constituyen.

De modo general, tenemos:

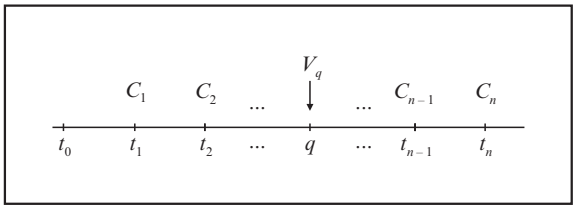


Figura 5.3.

© Ediciones Pirámide

El valor financiero en q verifica:

$$(V_q, q) = (C_1, t_1) + (C_2, t_2) + ... + (C_n, t_n)$$

$$V_q \times F(q; p) = C_1 \times F(t_1; p) + C_2 \times F(t_2; p) + ... + C_n \times F(t_n; p)$$

$$Vq = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \times F(t_s; p)}{F(q; p)}$$

EJERCICIO 5.1

Calcular el valor financiero en 4 de la siguiente renta: {(20,3), (50,5), (30,7)}, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, $p = 10$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_4, 4) = (20,3) + (50,5) + (30,7)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

$$V_4[1 + 0{,}1(10 - 4)] = 20[1 + 0{,}1(10 - 3)] + 50[1 + 0{,}1(10 - 5)] +$$
$$+ 30[1 + 0{,}1(10 - 7)] \Rightarrow V_4 = 92{,}5$$

EJERCICIO 5.2

Calcular el valor financiero en 10 de la siguiente renta: {(10,2), (30,5), (25,8), (20,12)}, siendo la ley de valoración: $L(t; p) = (1 + 0{,}10)^{(p - t)}$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_{10}, 10) = (10,2) + (30,5) + (25,8) + (20,12)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

$$V_{10}(1{,}10)^{(p - 10)} = 10(1{,}10)^{(p - 2)} + 30(1{,}10)^{(p - 5)} + 25(1{,}10)^{(p - 8)} + 20(1{,}10)^{(p - 12)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{10} = 116{,}53$$

© Ediciones Pirámide

En general, la valoración puede plantearse con cualquier ley financiera, pero en la práctica se suele utilizar la ley de capitalización compuesta.

Tal y como se ha señalado anteriormente, el valor financiero de una renta puede calcularse en cualquier momento del tiempo. No obstante, cabe destacar dos valores concretos:

a) **Valor inicial o actual:** es el valor de la renta en t_0 u origen de la misma, o en un punto anterior, dependiendo del tipo de renta. En cualquier caso, es el valor de la renta en un punto no posterior al origen de la renta. Gráficamente:

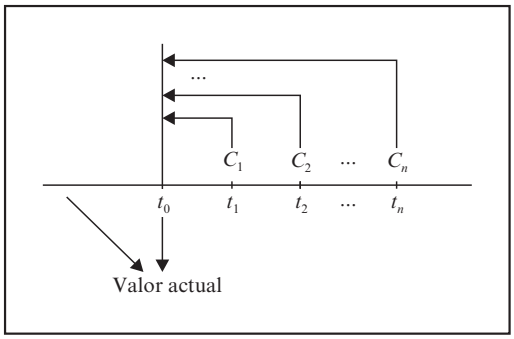


Figura 5.4.

b) **Valor final:** es el valor de la renta en t_n o final de la misma, o en un punto posterior, dependiendo del tipo de renta. En cualquier caso, es el valor de la renta en un punto no anterior al final de la renta. Gráficamente :

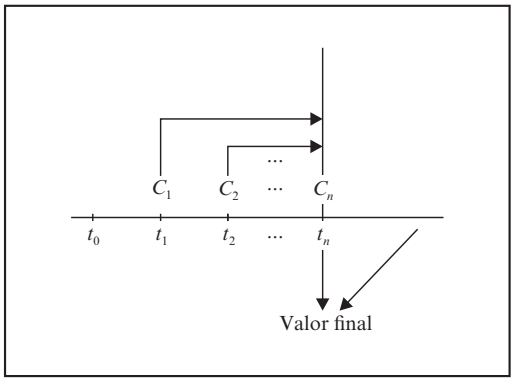


Figura 5.5.

© Ediciones Pirámide

5.3. CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS FINANCIERAS

Las rentas se pueden clasificar atendiendo a distintos criterios. Podemos señalar los siguientes:

a) Según **la cuantía de los términos,** podemos distinguir entre rentas constantes y rentas variables.

a.1) Las *rentas constantes* son aquellas en las que la cuantía de todos sus términos es la misma, es decir, $C_1 = C_2 = ... = C_n = C$. Un caso particular es aquel en el que la cuantía de todos los términos es igual a 1, en cuyo caso la renta recibe el nombre de renta unitaria.

a.2) Las *rentas variables* son aquellas en las que todos sus términos no tienen la misma cuantía.

Si la cuantía de los términos de la renta sigue alguna ley de variación, podemos destacar dos casos particulares: *rentas variables en progresión aritmética*, en las que las cuantías de los términos varían según la ley $C_s = C_{s-1} + d$; y *rentas variables en progresión geométrica*, en las que las cuantías de los términos varían según la ley $C_s = C_{s-1} \times q$.

b) Según **el vencimiento de los términos,** podemos encontrarnos con rentas pospagables y rentas prepagables.

b.1) Las *rentas pospagables* son aquellas en las que los términos vencen en el extremo superior del subintervalo al que pertenecen. Gráficamente:

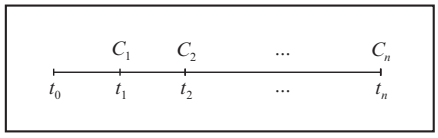


Figura 5.6.

b.2) Las *rentas prepagables* son aquellas en las que los términos vencen en el extremo inferior del subintervalo al que pertenecen. Gráficamente:

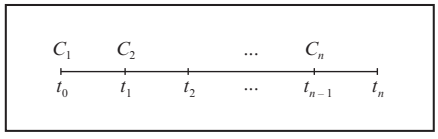


Figura 5.7.

© Ediciones Pirámide

c) Según **la medida o amplitud de los intervalos,** diferenciamos entre rentas discretas y rentas continuas.

c.1) Las *rentas discretas* son aquellas en las que la medida de los subintervalos en los que vencen los términos es finita. Podemos a su vez diferenciar entre rentas discretas de período uniforme, cuando todos los períodos de maduración o subintervalos tienen la misma amplitud, es decir, son constantes; y rentas discretas de período no uniforme, cuando los subintervalos no tienen la misma amplitud.

c.2) Las *rentas continuas* son aquellas en la que la medida de los subintervalos en los que vencen los términos es infinitésima, es decir, tiende a cero.

d) Según **la duración,** nos encontramos con rentas temporales y rentas perpetuas.

d.1) Las *rentas temporales* tienen una duración finita.

d.2) Las *rentas perpetuas* tienen una duración infinita.

e) Según **la certeza de los elementos que definen la renta,** distinguimos entre rentas ciertas y rentas aleatorias.

e.1) Las *rentas ciertas* son aquellas en las que todos los elementos que las definen son conocidos con certeza.

e.2) Las *rentas aleatorias* son aquellas en las que alguno o todos los elementos que las definen son aleatorios.

f) Según **la posición del punto de valoración** respecto al origen o final de la renta, podemos encontrarnos con rentas inmediatas, diferidas y anticipadas.

f.1) Las *rentas inmediatas* son aquellas en las que el valor actual se calcula en el origen y el valor final en el final de la renta. Gráficamente:

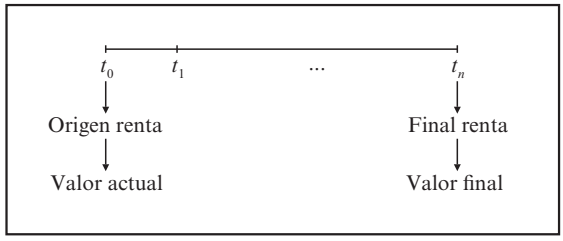


Figura 5.8.

© Ediciones Pirámide

f.2) Las *rentas diferidas* son aquellas en las que el punto de cálculo del valor actual está situado antes del origen, de manera que el mismo se calcula *d* períodos antes de dicho momento. Gráficamente:

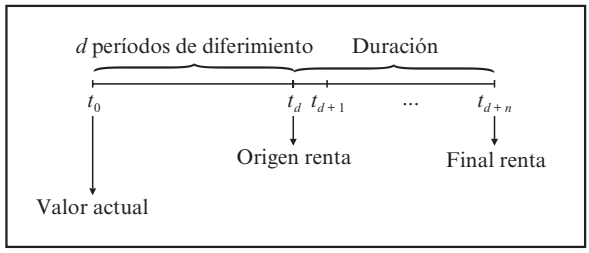


Figura 5.9.

f.3) Las *rentas anticipadas* son aquellas en las que el punto de cálculo del valor final está situado después del final de la renta, de modo que el mismo se calcula *h* períodos después de dicho momento. Gráficamente:

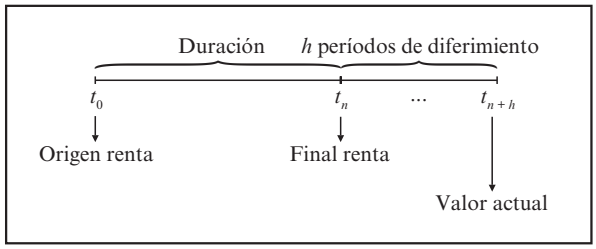
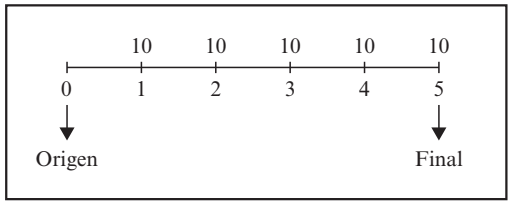


Figura 5.10.

5.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Clasificar la siguiente renta en función de los seis criterios planteados:



© Ediciones Pirámide

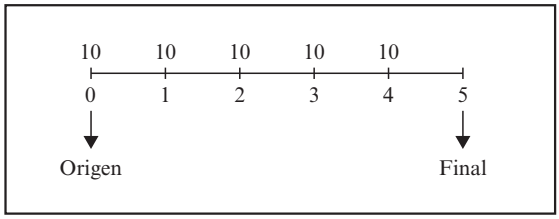
Resolución

Es una renta constante, pospagable, discreta de período uniforme, temporal, cierta e inmediata.

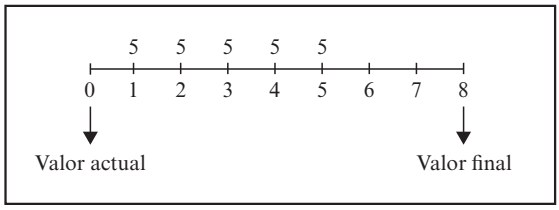
2. Dibujar el gráfico de la renta anterior, suponiendo que la misma sea prepagable.

Resolución

En este caso, el gráfico de la renta es el siguiente:



3. Clasificar la siguiente renta en función de los seis criterios planteados, si se quiere calcular su valor actual en 0 y su valor final en 8:

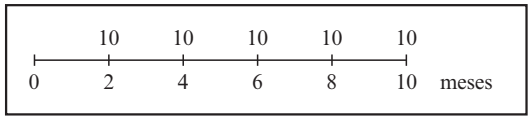


Resolución

Es una renta constante, pospagable, discreta, temporal, cierta y anticipada en 3 períodos.

4. Dibujar el gráfico de una renta inmediata de 5 términos bimestrales pospagables de cuantía 10 €.

Resolución

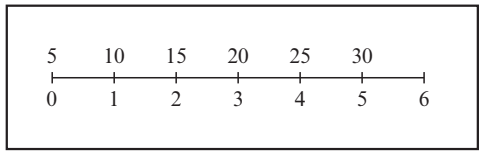


© Ediciones Pirámide

5. Dibujar el gráfico de una renta inmediata prepagable de 6 términos variables en progresión aritmética de razón $d = 5$, cuyo último término es de cuantía 30 €.

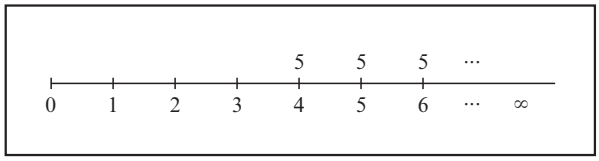
Resolución

Como los términos varían en progresión aritmética de razón $d = 5$, podemos obtener la cuantía del primer término en función de la del último, que es el sexto término, de manera que: $C_6 = C_1 + (6 - 1) \times d$, por lo que $30 = C_1 + (6 - 1) \times 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow C_1 = 5$, siendo el gráfico pedido el siguiente:



6. Dibujar el gráfico de una renta perpetua, prepagable, cuyos términos son constantes de cuantía 5 € y diferida 4 períodos.

Resolución



7. Determinar el valor financiero en 5 de la siguiente renta: {(15,2), (20,3), (30,4), (25,6)}, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}03(p - t)$, $p = 8$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_5, 5) = (15,2) + (20,3) + (30,4) + (25,6)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

$$V_5[1 + 0{,}03(8 - 5)] = 15[1 + 0{,}03(8 - 2)] + 20[1 + 0{,}03(8 - 3)] +$$
$$+ 30[1 + 0{,}03(8 - 4)] + 25[1 + 0{,}03(8 - 6)]$$

Y se obtiene un valor de $V_5 = 92{,}48$.

© Ediciones Pirámide

8. Calcular el valor financiero en 8 de la siguiente renta: {(50,4), (100,6), (300,10)}, siendo la ley de valoración $A(t; p) = 1 - 0{,}10(t - p)$, $p = 2$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_8, 8) = (50,4) + (100,6) + (300,10)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

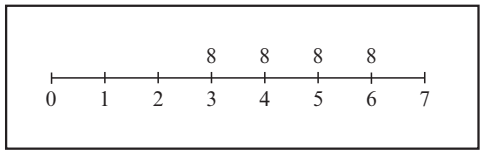
$$V_8[1 - 0{,}10(8 - 2)] = 50[1 - 0{,}10(4 - 2)] + 100[1 - 0{,}10(6 - 2)] + \\ + 300[1 - 0{,}10(10 - 2)]$$

Y se obtiene un valor de $V_8 = 400$.

5.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Describir y clasificar la siguiente renta si se quiere calcular su valor actual en 0, suponiendo que:

a) El origen de la renta está situado en 2 y el final en 6.
b) El origen de la renta está situado en 3 y el final en 7.



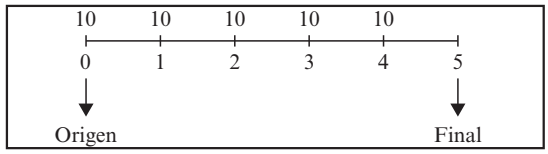
2. Dibujar el gráfico de una renta pospagable, temporal, cierta e inmediata, de cinco términos anuales variables en progresión aritmética de razón $d = 2$, siendo el primer término de cuantía $C_1 = 1$.

3. Dibujar el gráfico de una renta de cuatro términos variables en progresión geométrica de razón $q = 2$, cuyo tercer término es de cuantía 8 €, prepagable y diferida tres períodos.

4. En la renta anterior, señalar: el origen, el final, la duración y el punto en el que se calcula el valor actual y el valor final.

© Ediciones Pirámide

5. Señalar en la siguiente renta prepagable el punto en el que está situado el origen, el final y cuál es la duración. Además, clasificar la renta si su valor actual se calcula en 0 y su valor final en 10.



6. Determinar el valor financiero en 12 de la siguiente renta: {(100,1), (300,4), (500,7), (200,10)}, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}04(p - t)$, $p = 15$.

7. El valor financiero en 6 de la siguiente renta es 930,56: {(300,0), (75,3), (125,4), (X, 7)}. Determinar el valor de X, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}20(p - t)$, $p = 10$.

© Ediciones Pirámide

6 Valoración de rentas financieras (I)

OBJETIVOS

- Estudiar las relaciones generales, en capitalización compuesta, entre el valor actual y el valor final de las rentas inmediatas temporales tanto pospagables como prepagables.
- Relacionar los valores de las rentas pospagables con los correspondientes de las prepagables.
- Determinar las expresiones que nos permiten calcular el valor actual y el valor final de las rentas constantes inmediatas.
- Obtener el valor de las rentas constantes diferidas y anticipadas a partir de las expresiones generales obtenidas para las rentas constantes inmediatas.

SUMARIO

6.1. Valoración de las rentas inmediatas temporales.
6.2. Valoración de las rentas constantes inmediatas.
6.3. Valoración de las rentas constantes diferidas.
6.4. Valoración de las rentas constantes anticipadas.
6.5. Ejercicios y problemas resueltos.
6.6. Ejercicios y problemas propuestos.

6.1. VALORACIÓN DE LAS RENTAS INMEDIATAS TEMPORALES

Tal y como señalamos en la lección anterior, el valor financiero de una renta se puede calcular en cualquier momento del tiempo, recibiendo un nombre particular cuando se calcula en el origen o antes del mismo (valor actual), o bien en el final de la renta o después del mismo (valor final).

Vamos a determinar las expresiones que nos permitirán obtener el valor actual y el valor final de las rentas inmediatas temporales, utilizando la ley de capitalización compuesta con tipo de interés constante, para a partir de ellas valorar los restantes tipos de rentas.

Recordemos que, en las rentas inmediatas, el valor actual o inicial se calcula en el origen o extremo inferior del subintervalo en el que vence el primer capital, y el valor final en el final de la renta o extremo superior del subintervalo en el que vence el último término de la misma.

6.1.1. Renta temporal, inmediata y pospagable

Gráficamente, podemos representarla como:

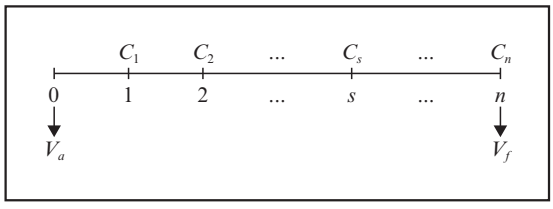


Figura 6.1.

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta el concepto de valor financiero, el valor actual verifica:

$$(V_a, 0) = (C_1, 1) + (C_2, 2) + \ldots + (C_n, n)$$

$$V_a = V_0 = C_1(1 + i)^{-1} + C_2(1 + i)^{-2} + \ldots + C_n(1 + i)^{-n}$$

$$V_a = V_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{-s}$$

Del mismo modo, podemos obtener el valor final como:

$$(V_f, n) = (C_1, 1) + (C_2, 2) + \ldots + (C_n, n)$$

$$V_f = V_n = C_1(1 + i)^{n-1} + C_2(1 + i)^{n-2} + \ldots + C_{n-1}(1 + i)^{1} + C_n$$

$$V_f = V_n = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{n-s}$$

Si comparamos la expresión obtenida del valor actual con la del valor final, se verifica:

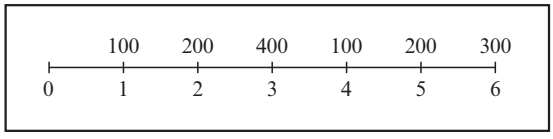
$$V_f \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{n-s} = (1 + i)^n \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{-s} = V_a(1 + i)^n$$

Por lo que podemos señalar que, en las rentas temporales inmediatas y pospagables, el valor final se obtiene multiplicando el valor actual por $(1 + i)^n$. Es decir:

$$V_f = V_a = (1 + i)^n \quad \Leftrightarrow \quad V_a = V_f(1 + i)^{-n}$$

EJERCICIO 6.1

Calcular el valor actual y el valor final de la siguiente renta temporal, inmediata, pospagable, valorada al 10% anual:



Resolución

El valor en 0 verifica:

$$V_0 = 100(1{,}10)^{-1} + 200(1{,}10)^{-2} + 400(1{,}10)^{-3} +$$
$$+ 100(1{,}10)^{-4} + 200(1{,}10)^{-5} + 300(1{,}10)^{-6} = 918{,}55$$

© Ediciones Pirámide

El valor final o en 6 verifica:

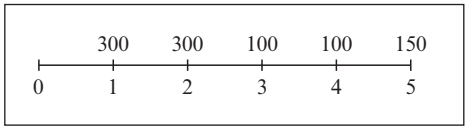
$$V_6 = 100(1{,}10)^5 + 200(1{,}10)^4 + 400(1{,}10)^3 + 100(1{,}10)^2 + \\ + 200(1{,}10) + 300 = 1.627{,}27$$

También podemos obtener el valor final con la siguiente expresión:

$$V_6 = V_0(1 + i)^6 \quad \Rightarrow \quad V_6 = 918{,}55(1 + 0{,}10)^6 = 1.627{,}27$$

EJERCICIO 6.2

Calcular el valor actual, el valor final y el valor en 3 de la siguiente renta temporal, inmediata, pospagable, valorada al 5% anual:



Resolución

El valor actual o en 0 verifica:

$$V_0 = V_a = 300(1{,}05)^{-1} + 300(1{,}05)^{-2} + 100(1{,}05)^{-3} + 100(1{,}05)^{-4} + \\ + 150(1{,}05)^{-5} = 844{,}01$$

El valor final o valor en 5 es: $V_5 = 844{,}01 \times 1{,}05^5 = 1.077{,}19$.

Para calcular el valor en 3 podemos capitalizar 3 períodos el valor actual, o actualizar 2 períodos el valor final:

$$V_3 = V_0 \times 1{,}05^3 = V_5 \times 1{,}05^{-2} = 977{,}04$$

6.1.2. Renta temporal, inmediata y prepagable

Gráficamente podemos representarla como:

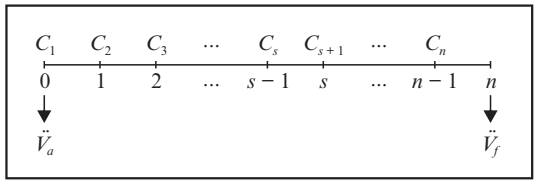


Figura 6.2.

© Ediciones Pirámide

El valor actual verifica:

$$(\ddot{V}_a, 0) = (C_1, 0) + (C_2, 1) + ... + (C_n, n-1)$$

$$\ddot{V}_a = \ddot{V}_0 = C_1 + C_2(1+i)^{-1} + C_3(1+i)^{-2} + ... + C_n(1+i)^{-(n-1)}$$

$$\ddot{V}_a = \ddot{V}_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-(s-1)} = (1+i)\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$$

Teniendo en cuenta la expresión obtenida al calcular el valor actual de la renta inmediata, temporal, pospagable, $V_a = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$, y relacionándolo con el de la prepagable, se verifica:

$$\ddot{V}_a = (1+i)\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = (1+i) \times V_a$$

En definitiva, para cualquier renta inmediata y temporal, el valor actual de la renta prepagable se obtiene multiplicando el valor actual de la pospagable por el factor unitario de capitalización $(1+i)$. Es decir, $\ddot{V}_a = (1+i) \times V_a$.

De manera análoga, podemos obtener el valor final de la renta inmediata, temporal, prepagable como:

$$(\ddot{V}_f, n) = (C_1, 0) + (C_2, 1) + ... + (C_n, n-1)$$

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_n = C_1(1+i)^n + C_2(1+i)^{n-1} + ... + C_n(1+i)$$

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_n = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{n-(s-1)} = (1+i)^n \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-(s-1)}$$

Si comparamos esta expresión con la obtenida del valor actual, tenemos que:

$$\ddot{V}_f = (1+i)^n \times \ddot{V}_a$$

En consecuencia, podemos señalar que en las rentas temporales, inmediatas y prepagables, también el valor final se obtiene multiplicando el valor actual por $(1+i)^n$. Es decir:

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{V}_a = \ddot{V}_f(1+i)^{-n}$$

Podemos comparar también la expresión obtenida al calcular el valor final de una renta inmediata, temporal y prepagable, con la obtenida para la renta de la misma naturaleza pero pospagable, de manera que se verifica:

$$\ddot{V}_f = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{n-(s-1)} = (1+i)\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{(n-s)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{V}_f = V_f(1+i)$$

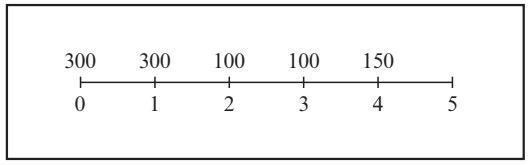
© Ediciones Pirámide

En conclusión, en las rentas inmediatas temporales se verifica que el valor de la prepagable es igual al de la pospagable multiplicado por $(1 + i)$, tanto para el valor actual como para el valor final. Y además, tanto en las rentas pospagables como en las prepagables el valor final se obtiene al capitalizar n períodos el valor actual:

$$\ddot{V}_a = V_a(1 + i);\ \ddot{V}_f = V_f(1 + i);\ V_f = V_a(1 + i)^n;\ \ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1 + i)^n$$

EJERCICIO 6.3

Calcular el valor actual, el valor final y el valor en 3 de la siguiente renta temporal, inmediata, prepagable, valorada al 5% anual:



Resolución

El valor actual en 0 verifica:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{V}_a = 300 + 300(1{,}05)^{-1} + 100(1{,}05)^{-2} + 100(1{,}05)^{-3} + 150(1{,}05)^{-4} = 886{,}21$$

El valor final o valor en 5 es: $\ddot{V}_5 = 886{,}21 \times 1{,}05^5 = 1.131{,}05$.

También podemos determinar estos valores calculándolos a través de la relación entre los de la renta prepagable y los de la pospagable. Así, teniendo en cuenta que los valores de la pospagable, calculados en el ejercicio 6.2, son: $V_0 =$ $= 844{,}01$; $V_5 = 1.077{,}19$, tenemos:

$$\ddot{V}_0 = V_0(1 + i) \quad \Rightarrow \quad \ddot{V}_0 = 844{,}01 \times 1{,}05 = 866{,}21$$

$$\ddot{V}_f = V_f(1 + i) \quad \Rightarrow \quad \ddot{V}_5 = 1.077{,}19 \times 1{,}05 = 1.131{,}05$$

Para calcular el valor en 3 podemos capitalizar 3 períodos el valor actual, o actualizar 2 períodos el valor final:

$$\ddot{V}_3 = \ddot{V}_0 \times 1{,}05^3 = \ddot{V}_5 \times 1{,}05^{-2} = 1.025{,}90$$

© Ediciones Pirámide

6.2. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONSTANTES INMEDIATAS

Atendiendo a la clasificación expuesta en la lección anterior, las rentas constantes inmediatas en función del número de términos que las constituyen, finito o infinito, pueden ser temporales o perpetuas, y a su vez cada una de ellas pospagable o prepagable, según cuando venzan sus términos. A continuación vamos a plantear el cálculo del valor actual y, en su caso, el del valor final de las rentas constantes, inmediatas, distinguiendo si son temporales o perpetuas, y si son pospagables o prepagables.

6.2.1. Renta constante, inmediata, temporal y pospagable

El esquema gráfico de esta renta es el siguiente:

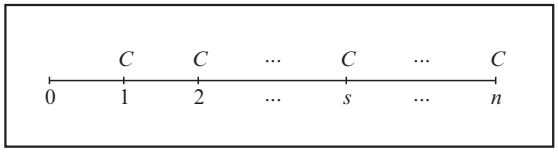


Figura 6.3.

A) **Valor actual.** El valor actual se obtiene como suma del valor en 0 de cada uno de los términos:

$$V_a = V_0 = C(1 + i)^{-1} + C(1 + i)^{-2} + ... + C(1 + i)^{-n}$$

Este valor actual es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$. Hay que recordar que la suma de los términos de una progresión geométrica de razón r se obtiene a través de la expresión $S = a_1 + a_2 + ... a_n = \frac{a_1 - a_n \times r}{1 - r}$, por lo que al sustituir se tiene:

$$V_0 = \frac{C(1 + i)^{-1} - C(1 + i)^{-n}(1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

Y al realizar operaciones, llegamos a:

$$V_0 = C\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

© Ediciones Pirámide

Si en la expresión anterior tomamos $C = 1$, obtenemos el valor actual de una renta inmediata, temporal, unitaria, pospagable, de n términos, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $a_{\overline{n}|i}$, siendo:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

El valor actual de una renta de cuantía C se obtiene al multiplicar el valor actual de la renta unitaria por la cuantía del término:

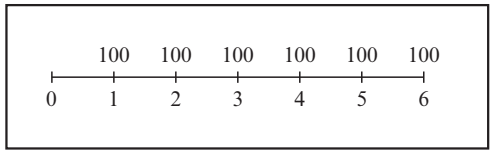
$$V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$$

EJERCICIO 6.4

Calcular el valor actual, al 5% anual, de una renta inmediata de cuantía 100 € con vencimiento al final de cada uno de los seis años de duración.

Resolución

El gráfico de la renta es:



El valor actual verifica: $V_0 = 100 \times a_{\overline{6}|0,05} = 507{,}57$ €.

***B*) Valor final.** El valor final se obtiene como suma del valor n de cada uno de los términos:

$$V_f = V_n = C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i)^{n-2} + \ldots + C(1 + i)^{-1} + C$$

Se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$. Al sustituir se tiene:

$$V_n = \frac{C(1 + i)^{n-1} - C(1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

© Ediciones Pirámide

Y al realizar operaciones, obtenemos:

$$V_n = C\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si en la expresión anterior hacemos $C = 1$, obtenemos el valor final de una renta temporal, unitaria, pospagable, de n términos y valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $s_{\overline{n}|i}$, siendo:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

El valor final de una renta de cuantía C se obtiene al multiplicar el valor final de la renta unitaria por la cuantía del término:

$$V_n = C \times s_{\overline{n}|i}$$

También podemos llegar a la expresión anterior teniendo en cuenta que hemos demostrado que el valor final en este tipo de rentas se obtiene capitalizando n períodos el valor actual al tipo i, de modo que:

$$V_n = V_0(1+i)^n = C \times a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = C \times s_{\overline{n}|i}$$

Por tanto, para la renta unitaria se verifica:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n$$

EJERCICIO 6.5

Calcular el valor final, al 5% anual, de una renta inmediata de cuantía 100 euros con vencimiento al final de cada uno de los seis años de duración.

Resolución

El valor final verifica: $V_6 = 100 \times s_{\overline{6}|0,05} = 680,19$. Teniendo en cuenta que el valor actual es: $V_0 = 100 \times a_{\overline{6}|0,05} = 507,57$, también se verifica: $V_6 = 507,57 \times 1,05^6 = 680,19$ €.

EJERCICIO 6.6

Calcular el valor final de una renta inmediata de diez años de duración, siendo la cuantía de cada término pospagable 50 euros y el tipo de interés el 3% anual.

Resolución

El valor final es: $V_{10} = 50 \times s_{\overline{10}|0,03} = 573,19$ euros.

© Ediciones Pirámide

6.2.2. Renta constante, inmediata, temporal y prepagable

El esquema gráfico de dicha renta es el siguiente:

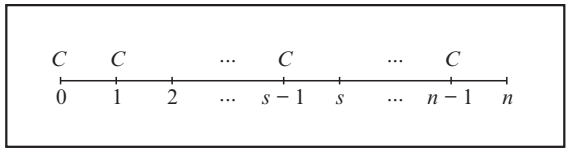


Figura 6.4.

Para valorar este tipo de rentas, vamos a tener en cuenta las expresiones ya deducidas que relacionan las rentas pospagables con las prepagables, así como el valor actual con el valor final:

$$\ddot{V}_a = V_a(1+i);\ \ddot{V}_f = V_f(1+i);\ V_f = V_a(1+i)^n;\ \ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1+i)^n$$

A) Valor actual

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores y el valor actual de la pospagable, se verifica:

$$\ddot{V}_0 = C \times a_{\overline{n}|i}(1+i)$$

La expresión $a_{\overline{n}|i}(1+i)$ es el valor actual de una renta inmediata, temporal, unitaria, prepagable, de n términos, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$. En consecuencia:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)$$

Y por tanto:

$$\ddot{V}_0 = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Ejercicio 6.7

Calcular el valor actual de una renta inmediata prepagable de 25 euros durante ocho años, siendo el tipo de interés el 7% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El valor actual verifica: $\ddot{V}_0 = 25 \times \ddot{a}_{\overline{8}|0,07} = 25 \times a_{\overline{8}|0,07} \times 1,07 = 159,73$ €.

Otra forma de obtener el valor actual de la renta unitaria prepagable es descomponiendo la misma en dos rentas. Para ello partimos del gráfico de la renta unitaria prepagable:

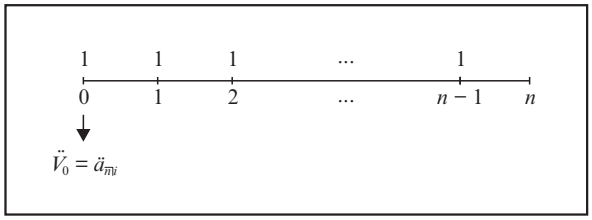


Figura 6.5.

La renta anterior se descompone en las dos rentas siguientes: una de una sola cuantía con vencimiento en 0, y otra de $(n - 1)$ términos pospagables. Gráficamente:

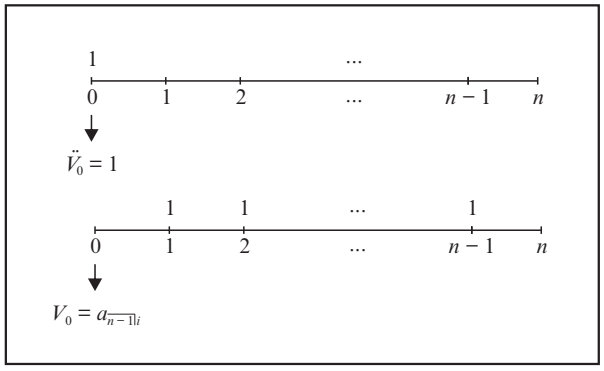


Figura 6.6.

Tenemos, pues, que la renta unitaria prepagable es equivalente a la suma de las dos rentas anteriores, por lo que se verifica: $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$.

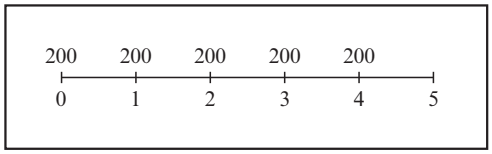
EJERCICIO 6.8

Calcular el valor actual, al 4 % anual, de una renta inmediata de cuantía 200 €, con vencimiento al principio de cada uno de los cinco años de duración.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El gráfico de la renta es:



El valor actual verifica: $\ddot{V}_0 = 200 \times \ddot{a}_{\overline{5}|0,04} = 200 \times a_{\overline{5}|0,04} \times 1,04 = 200 + 200 \times \times a_{\overline{4}|0,04} = 925,98$ €.

***B*) Valor final**

Teniendo en cuenta que el valor final o valor en n se obtiene a partir del valor actual capitalizándolo durante n períodos al tipo i, tenemos:

$$\ddot{V}_n = \ddot{V}_0(1 + i)^n = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1 + i)^n = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

También podemos obtener el valor final, relacionándolo con el de la renta pospagable. Así, tenemos:

$$\ddot{V}_n = V_n(1 + i) = C \times s_{\overline{n}|i}(1 + i) = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

En consecuencia, para $C = 1$ obtenemos el valor final de una renta temporal, inmediata, unitaria, prepagable, de n términos, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, verificándose:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1 + i)^n; \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1 + i)$$

Ejercicio 6.9

Calcular el valor final, al 8 % anual, de una renta inmediata de cuantía 6 euros, con vencimiento al principio de cada uno de los 10 años de duración.

Resolución

El valor final verifica:

$$\ddot{V}_{10} = 6 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,08} = 6 \times s_{\overline{10}|0,08} \times 1,08 = 93,87 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

6.2.3. Renta constante, inmediata, perpetua y pospagable

El esquema gráfico de dicha renta es el siguiente:

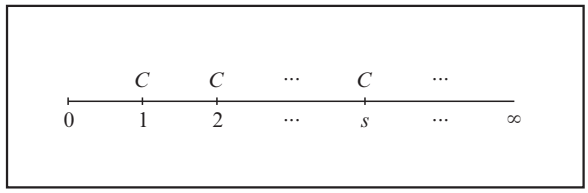


Figura 6.7.

En las rentas perpetuas, al tener duración infinita, no tiene sentido el cálculo del valor final, pues el punto final de las mismas no existe.

Al ser la duración infinita, calculamos el valor actual de la renta perpetua como el límite del valor actual de la renta temporal cuando n tiende a infinito:

$$V_0 = C \times a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} C \times a_{\overline{n}|i} = C\frac{1}{i}$$

puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}, \text{ ya que } (1+i)^{-n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

En consecuencia, el valor actual de la renta unitaria perpetua es $a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$.

EJERCICIO 6.10

Un inversor va a recibir de forma indefinida y al final de cada año una cuantía de 300 euros. Calcular su valor actual al 5% de interés anual.

Resolución

De acuerdo con la fórmula deducida, tenemos: $V_0 = 300\frac{1}{0{,}05} = 6.000$ euros.

© Ediciones Pirámide

6.2.4. Renta constante, inmediata, perpetua y prepagable

El esquema gráfico de dicha renta es el siguiente:

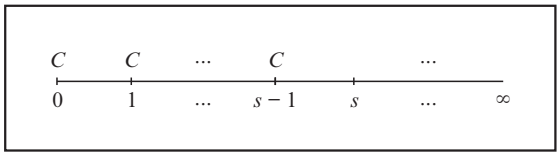


Figura 6.8.

Teniendo en cuenta la relación entre el valor actual de la renta prepagable y el de la pospagable, se verifica:

$$\ddot{V}_0 = V_0(1 + i) \quad \Rightarrow \quad \ddot{V}_0 = C\frac{(1 + i)}{i}$$

Por tanto, el valor actual de la renta unitaria prepagable perpetua es:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i}(1 + i) = \frac{1 + i}{i}$$

EJERCICIO 6.11

Un inversor realiza cierta inversión por la que va a recibir de forma indefinida y al principio de cada año una cuantía de 300 euros. Calcular la cuantía invertida para un 5% de interés anual.

Resolución

El valor actual de la renta citada nos da la cuantía invertida: $\ddot{V}_0 = 300\frac{(1 + 0{,}05)}{0{,}05} =$ = 6.300 €.

6.3. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONSTANTES DIFERIDAS

Una renta es diferida con respecto a un determinado punto en el que se desea calcular su valor actual, si comienza a devengarse una vez transcurridos *d* períodos desde dicho punto. Por tanto, su origen se encuentra *d* períodos a la derecha

© Ediciones Pirámide

del punto de valoración, por lo que su valor actual se determina d períodos antes del origen. El diferimiento sólo tiene sentido en cuanto al cálculo del valor inicial.

6.3.1. Renta constante, diferida, temporal y pospagable

Se trata de una renta pospagable que comienza a devengarse después de transcurridos d períodos desde el momento en el que se desea calcular su valor actual. Por tanto, su primer término vence en el período $d + 1$, y, por ser pospagable, al final del mismo. El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos es el siguiente:

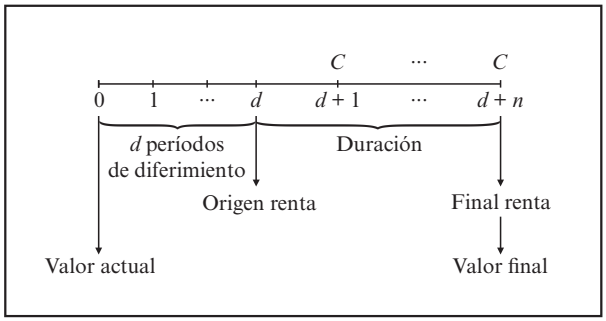


Figura 6.9.

A) Valor actual

El valor actual se obtiene como la suma del valor en 0 de cada uno de los términos. Para ello, podemos valorar todos los términos en el punto d, con lo que consideramos la renta como inmediata pospagable, y a continuación actualizamos d períodos hasta el punto 0. Por tanto:

$$V_0 = V_d(1 + i)^{-d} = C \times a_{\overline{n}|i}(1 + i)^{-d}$$

Cuando $C = 1$, tenemos la renta unitaria, cuyo valor es: $d|a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1 + i)^{-d}$.

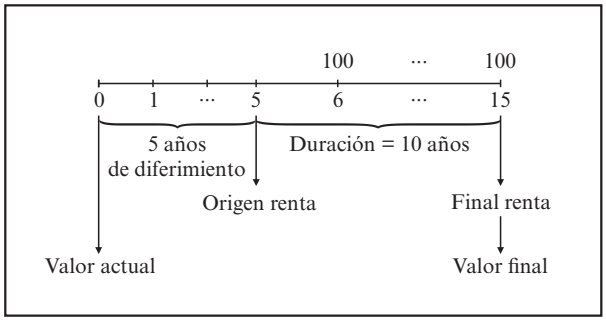
Ejercicio 6.12

Calcular el valor actual, al 4% anual, de una renta pospagable de cuantía 100 euros que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La renta está diferida en 5 años, por lo que el primer término vence en el año 6, y por ser pospagable al final del mismo. Gráficamente, tenemos:



$$V_0 = V_5(1 + i)^{-5} = 100 \times a_{\overline{10}|0,04} \times 1{,}04^{-5} = 666{,}66\ €$$

***B*) Valor final**

El final de esta renta está en el punto $d + n$, por lo que podemos calcular el valor final como el de una renta inmediata de n términos, de manera que se verifica:

$$V_f = V_{d+n} = C \times s_{\overline{n}|i}$$

También podemos calcular este valor relacionándolo con el valor actual, de modo que el valor final se obtiene al capitalizar el valor actual $d + n$ períodos:

$$V_f = V_a(1 + i)^{d+n}$$

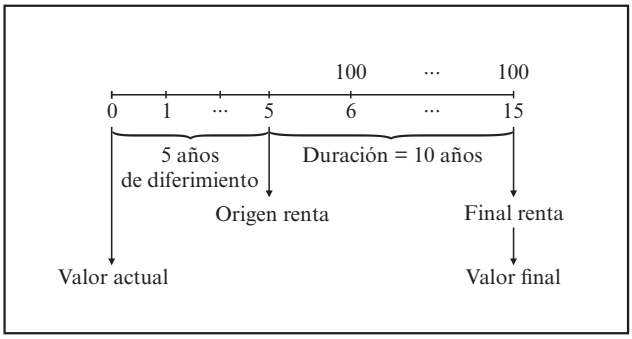
EJERCICIO 6.13

Calcular el valor final, al 4% anual, de una renta pospagable de cuantía 100 euros que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

Resolución

La renta está diferida 5 años, por lo que el primer término vence al final del año 6, y gráficamente tenemos:

© Ediciones Pirámide



$$V_f = V_{15} = 100 \times s_{\overline{10}|0,04} = 1.200,62 \text{ €}$$

También podemos calcularlo en función del valor actual determinado anteriormente:

$$V_{15} = V_0(1 + i)^{15} = 666,66 \times 1,04^{15} = 1.200,62 \text{ €}$$

6.3.2. Renta constante, diferida, temporal y prepagable

Se trata de una renta prepagable que comienza a devengarse después de transcurridos d períodos desde el momento en el que se desea calcular su valor actual. Por tanto, su primer término vence en el período $d + 1$, y, por ser prepagable, al principio del mismo. El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos es el siguiente:

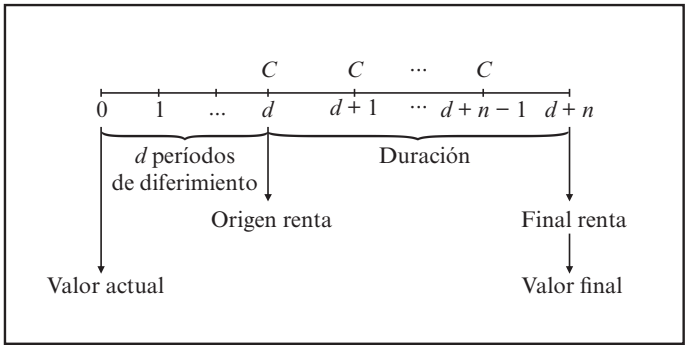


Figura 6.10.

© Ediciones Pirámide

A) Valor actual

Del mismo modo que en el caso de la renta pospagable, podemos valorar todos los términos en el punto d, con lo que el valor en dicho punto se determina como el de una renta inmediata prepagable, y después actualizamos este valor d períodos hasta el punto 0. Por tanto:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{V}_d(1+i)^{-d} = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$$

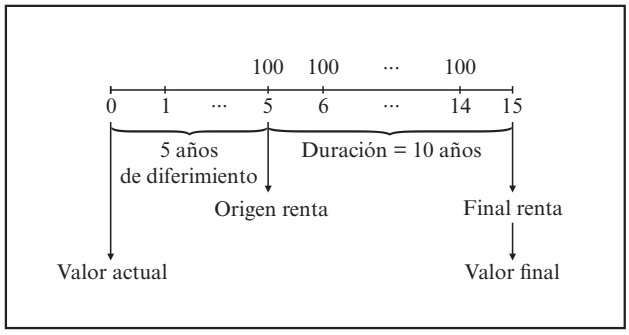
Cuando $C = 1$, tenemos la renta unitaria, cuyo valor es: $d/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$.

EJERCICIO 6.14

Calcular el valor actual, al 4 % anual, de una renta prepagable de cuantía 100 € que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

Resolución

La renta está diferida en 5 años, por lo que el primer término se devenga en el año 6, y, por ser prepagable, vence al inicio del mismo. Gráficamente, tenemos:



$$\ddot{V}_0 = \ddot{V}_5(1+i)^{-5} = 100 \times \ddot{a}_{\overline{10}|0,04} \times 1{,}04^{-5} = 693{,}32\ €$$

B) Valor final

El final de la renta está en el punto $d + n$, por lo que podemos calcular el valor final como el de una renta inmediata de n términos, de manera que se verifica:

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_{d+n} = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

© Ediciones Pirámide

También podemos calcular este valor relacionándolo con el valor actual, de modo que el valor final se obtiene al capitalizar el valor actual $d + n$ períodos:

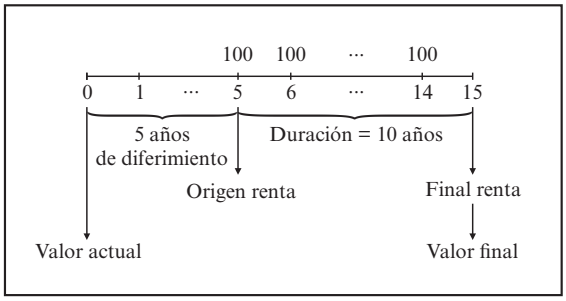
$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1 + i)^{d+n}$$

EJERCICIO 6.15

Calcular el valor final, al 4% anual, de una renta prepagable de cuantía 100 euros, que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

Resolución

La renta está diferida en 5 años, por lo que al ser prepagable, el primer término vence al principio del año 6. Gráficamente, tenemos:



$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_{15} = 100 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,04} = 1.248{,}63\ €$$

También lo podemos calcular en función del valor actual determinado anteriormente:

$$\ddot{V}_{15} = \ddot{V}_0(1 + i)^{15} = 693{,}32 \times 1{,}04^{15} = 1.248{,}63\ €$$

6.4. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONSTANTES ANTICIPADAS

Una renta es anticipada con respecto a un determinado punto en el que se desea calcular su valor final, si finaliza h períodos antes de dicho punto. La anticipación sólo hace referencia al cálculo del valor final, por lo que el mismo se determina después de transcurridos h períodos desde el final.

6.4.1. Renta constante, anticipada, temporal y pospagable

El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

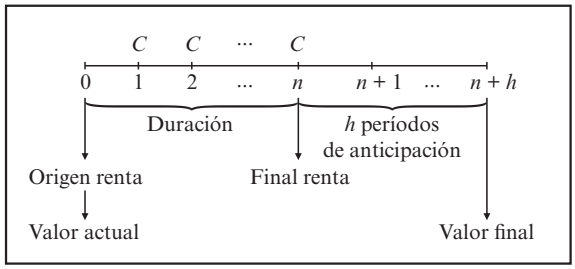


Figura 6.11.

El valor actual de esta renta coincide con el de la inmediata pospagable, mientras que el valor final se obtiene a partir del valor final de la renta inmediata pospagable, capitalizándolo *h* períodos:

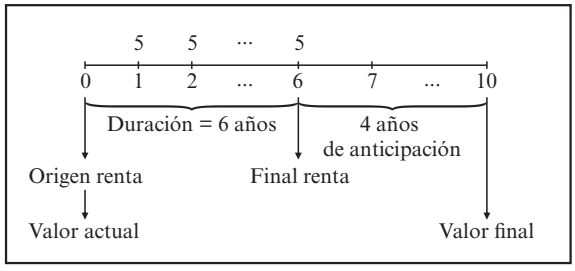
$$V_f = V_{n+h} = C \times s_{\overline{n}|i}(1 + i)^h$$

EJERCICIO 6.16

Calcular el valor actual y el valor al final del año 10 de una renta pospagable de seis años de duración, siendo la cuantía de los términos 5 euros y el tipo de interés de valoración el 3% anual.

Resolución

La renta tiene una duración de 6 años y nos piden que calculemos el valor al final del año 10, por lo que la renta está anticipada en 4 años. Gráficamente, tenemos:



$$V_0 = 5 \times a_{\overline{6}|0,03} = 27{,}09\ €$$

$$V_{10} = 5 \times s_{\overline{6}|0,03} \times 1{,}03^4 = 36{,}40\ €, \text{ o también } V_{10} = V_0(1 + i)^{10} =$$
$$= 27{,}09 \times 1{,}03^{10} = 36{,}40\ €.$$

© Ediciones Pirámide

6.4.2. Renta constante, anticipada, temporal y prepagable

El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos, es el siguiente:

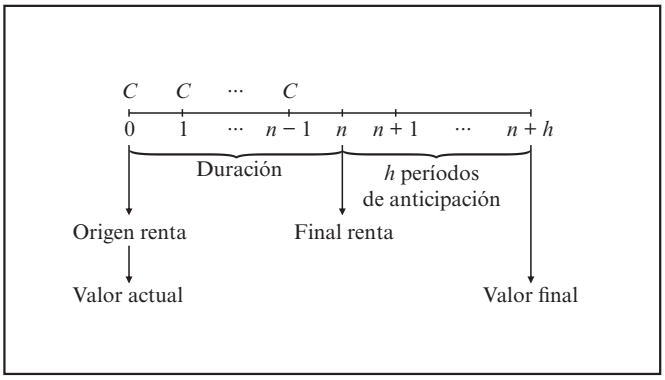


Figura 6.12.

El valor actual de esta renta coincide con el de la inmediata prepagable, obteniéndose el valor final a partir del valor final de la renta inmediata prepagable, capitalizándolo h períodos:

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_{n+h} = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}(1 + i)^h$$

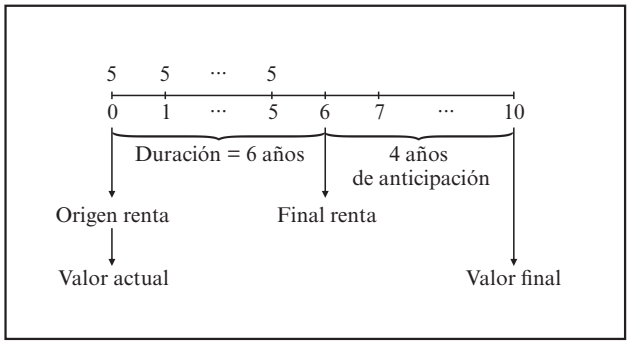
EJERCICIO 6.17

Calcular el valor actual y el valor al final del año 10 de una renta prepagable de seis años de duración, siendo la cuantía de los términos 5 € y el tipo de interés de valoración el 3% anual.

Resolución

La renta tiene una duración de 6 años, y al ser prepagable el primer término vence al principio del primer año y el último al principio del año 6. Como nos piden que calculemos el valor al final del año 10, la renta está anticipada en 4 años. Gráficamente, tenemos:

© Ediciones Pirámide



$$\ddot{V}_0 = 5 \times \ddot{a}_{\overline{6}|0,03} = 27{,}90\ €$$

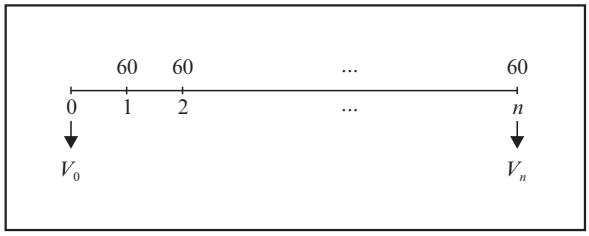
$$\ddot{V}_0 = 5 \times \ddot{s}_{\overline{6}|0,03} \times 1{,}03^4 = 37{,}49\ €, \text{ o también } \ddot{V}_{10} = \ddot{V}_0(1+i)^{10} =$$
$$= 27{,}90 \times 1{,}03^{10} = 37{,}49\ €$$

6.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el valor final de una renta constante inmediata de términos anuales pospagables de cuantía 60 €, cuyo valor actual es 981,09 €, valorada al 2% de interés anual.

Resolución

De acuerdo con el enunciado, el gráfico de la renta es el siguiente:



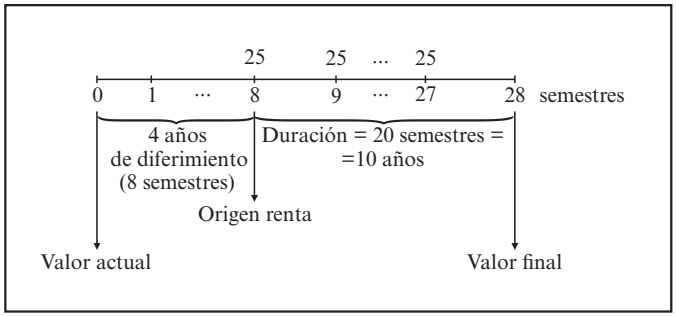
Para determinar el valor final es preciso conocer el número de términos, el cual podemos obtener a partir del valor actual: $V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$, por lo que al sustituir se llega a: $V_0 = 981{,}09 = 60 \times a_{\overline{n}|0,02} \Rightarrow n = 20$. En consecuencia, el valor final es: $V_n =$ $= 981{,}09 \times \times 1{,}02^{20} = 60 \times s_{\overline{20}|0,02} = 1.457{,}85$ €.

© Ediciones Pirámide

2. Calcular el valor actual y el valor final de una renta prepagable de 10 años de duración, diferida en 4 años, con términos semestrales de cuantía 25 €, siendo el tipo de valoración el 6,09 % anual.

Resolución

De acuerdo con el enunciado, tenemos que calcular el valor en 0 de la siguiente renta:



Por tanto, tenemos una renta semestral prepagable diferida, cuyo valor actual calcularemos como el valor actual de una renta inmediata de 20 términos prepagables semestrales trasladado ocho semestres o cuatro años a la izquierda. Al ser la renta de periodicidad semestral, es preciso disponer del tipo de interés semestral equivalente al 6,09 % anual, que se obtiene de la ecuación: $1{,}0609 = (1 + i^{(m)})^2 \Rightarrow i^{(m)} = 0{,}03$.

El valor actual verifica:

$$\ddot{V}_0 = 25 \times \ddot{a}_{\overline{20}|0{,}03}(1{,}03)^{-8} = 25 \times \ddot{a}_{\overline{20}|0{,}03}(1{,}0609)^{-4} = 302{,}42\ €$$

El valor final es: $\ddot{V}_f = \ddot{V}_{28} = 25 \times \ddot{s}_{\overline{20}|0{,}03} = 302{,}42 \times 1{,}03^{28} = 302{,}42 \times 1{,}0609^{14} =$ $= 691{,}92$ €.

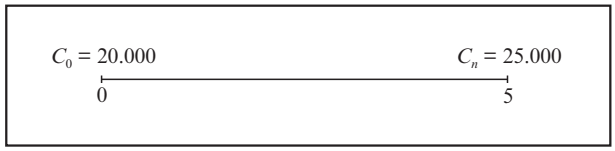
3. Un inversor realiza un depósito de 20.000 €, a 5 años, en una entidad financiera. Dicha entidad le propone dos alternativas de devolución: *a*) un pago de 25.000 € al cabo de los 5 años, y *b*) cinco pagos anuales constantes de 4.700 € al final de cada uno de los cinco años de duración de la operación. Determinar la alternativa más rentable para el inversor.

Resolución

Para comparar ambas alternativas plantearemos la ecuación de equivalencia entre los conjuntos prestación y contraprestación de cada una de ellas. La que mayor tipo de interés ofrezca, será la más rentable para el inversor.

© Ediciones Pirámide

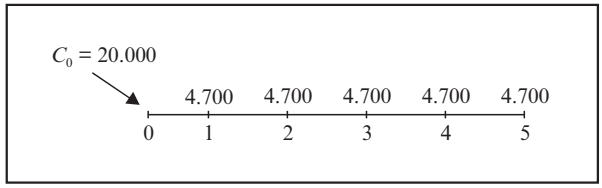
a) En este caso nos encontramos con la siguiente operación:



La ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta verifica:

$$C_n = C_0(1 + i)^n, \text{ por lo que sustituyendo: } 25.000 = 20.000(1 + i)^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = 4{,}563\% \text{ anual}$$

b) La operación es:



Para calcular la rentabilidad planteamos la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta, de modo que se verifica:

$$20.000 = 4.700 \times a_{\overline{5}|i} \quad \Rightarrow \quad i = 5{,}628\% \text{ anual}$$

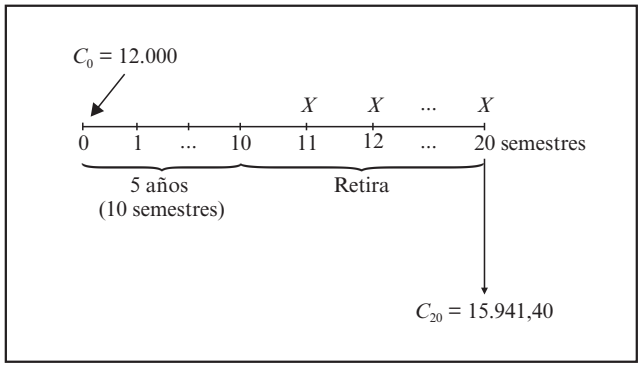
Por tanto, le interesa más la alternativa *b*), ya que es la de mayor tipo de interés.

4. Una persona impone en cierta entidad financiera un capital de 12.000 € a un tipo de interés del 6,09% anual en capitalización compuesta durante 10 años. Con el fin de atender a diversos gastos, al final de cada semestre de los últimos cinco años retira una cuantía constante *X*. Sabiendo que al final del año 10, tras retirar la correspondiente cuantía *X*, el montante que queda en la entidad financiera es de 15.941,40 €, calcular la cuantía *X*.

Resolución

Conocemos el saldo al final de la operación, por lo que a partir del mismo podemos determinar la cuantía constante *X* que retira semestralmente en los últimos cinco años. Gráficamente, tenemos:

© Ediciones Pirámide



El montante, al cabo de los 10 años de imposición, está constituido por la diferencia entre el valor final de la cuantía impuesta y el valor final de la renta semestral que retira en los 10 últimos semestres. Hay que tener en cuenta que para determinar el valor final de la renta semestral es preciso calcular el tipo de interés semestral equivalente al anual dado. Dicho tipo es el 3% semestral. En consecuencia, se verifica:

$$C_{20} = 15.941{,}40 = 12.000(1 + 0{,}0609)^{10} - X \times s_{\overline{10}|0{,}03} \quad \Rightarrow \quad X = 500\ €$$

5. En el momento actual, un sujeto pacta con una entidad financiera la siguiente operación, valorándola al 8,16% anual: depositar un capital de 1.000 € dentro de 7 meses, y una renta pospagable de 80 € semestrales durante 6 años. Sabiendo que el quinto término de la citada renta vence transcurridos 39 meses desde el inicio de la operación, determinar el valor de toda la operación al final del año 15.

Resolución

Para poder calcular el valor solicitado al final del año 15, o sea, concluido el mes 180, hemos de determinar los vencimientos de los términos de la renta semestral, que, al tener una duración es de 6 años, consta de 12 términos. Al ser los términos semestrales, sus vencimientos varían en progresión aritmética de razón 6 meses, por lo que los vencimientos primero y último verifican[1]:

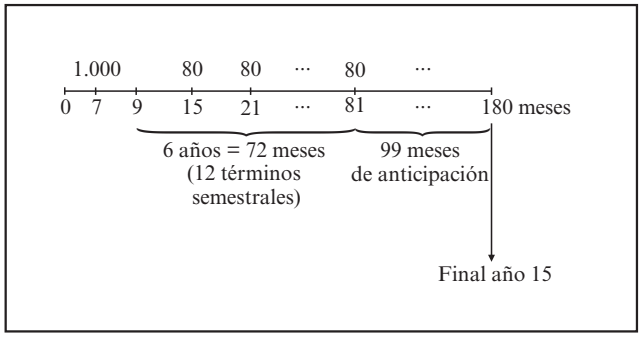
$$t_5 = t_1 + (5 - 1) \times 6 \quad \Rightarrow \quad 39 = t_1 + 24 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 15$$

$$t_{12} = t_1 + (12 - 1) \times 6 \quad \Rightarrow \quad t_{12} = 81$$

[1] Recordemos que los términos de una progresión aritmética verifican: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

© Ediciones Pirámide

El gráfico de la operación es:



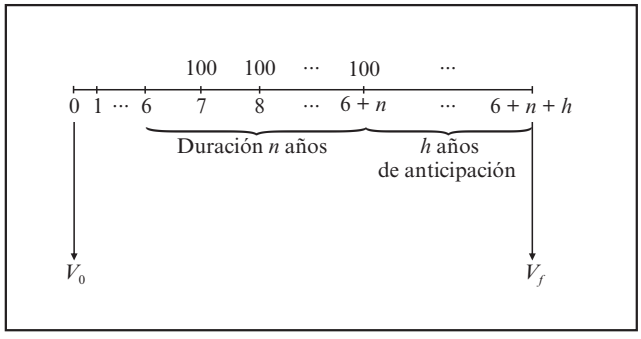
El valor al final del mes 180 de toda la operación es la suma en dicho momento de los 1.000 € impuestos en el mes 7, más el valor final de la renta semestral pospagable, anticipada en 99 meses. Siendo el 4% semestral el tipo de interés equivalente al 8,16% anual, se verifica:

$$V_{180} = 1.000(1 + 0{,}0816)^{\frac{180-7}{12}} + 80 \times s_{\overline{12}|0{,}04} \times 1{,}0816^{\frac{180-81}{12}} = 5.394{,}36\ €$$

6. Sea una renta anual pospagable de cuantía 100 € y n términos, diferida en 6 años, valorada al 3% anual y anticipada en h años. Sabemos que su valor actual es 946,03 €, y su valor final asciende a 1.980,77. Calcular el número h de años de anticipación.

Resolución

El gráfico de la operación es:



© Ediciones Pirámide

Para calcular el número de períodos de anticipación es preciso determinar previamente el número de términos de la renta. De la ecuación del valor actual podemos determinar la duración n:

$$946{,}03 = 100 \times a_{\overline{n}|0{,}03} \times 1{,}03^{-6} \quad \Rightarrow \quad n = 14$$

El valor final verifica:

$$1.980{,}77 = 946{,}03 \times 1{,}03^{n+h+6} \quad \Rightarrow \quad h = 5 \text{ años}$$

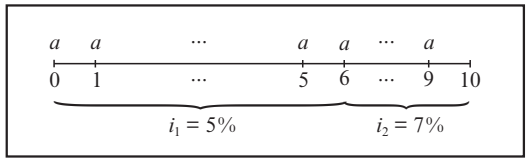
También podemos determinar h a través de la ecuación:

$$1.980{,}77 = 100 \times s_{\overline{14}|0{,}03} \times 1{,}03^{h} \qquad h = 5 \text{ años}$$

7. Una persona tiene derecho a percibir durante 10 años una cuantía de 10.000 € al inicio de cada año. Si en lugar de los capitales anteriores desease recibir una cuantía constante pospagable durante 12 años, determinar dicha cuantía en el supuesto de que el intercambio citado se valore con un tipo de interés del 5% anual durante los primeros 6 años, y del 7% anual para los restantes.

Resolución

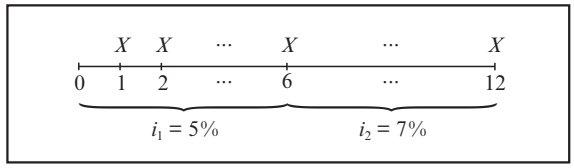
Siendo a = 10.000, podemos representar gráficamente la renta inicial de 10 años:



El valor actual de dicha renta es:

$$V_{0,1} = 10.000 \times \ddot{a}_{\overline{6}|5\%} + 10.000 \times \ddot{a}_{\overline{4}|7\%} \times 1{,}05^{-6} = 80.339{,}97$$

La renta anterior se sustituye por otra renta de 12 años, cuyo valor actual ha de coincidir con el de la renta a la que sustituye. El gráfico de la nueva renta es:



© Ediciones Pirámide

Denominando X a la cuantía del término anual de la nueva renta, su valor actual verifica:

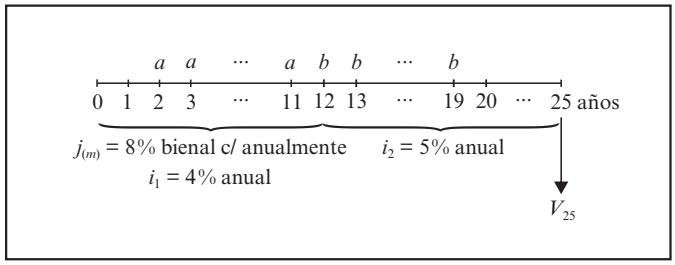
$$V_{0,2} = X \times a_{\overline{6}|5\%} + X \times a_{\overline{6}|7\%} \times 1{,}05^{-6} = 80.339{,}97$$

Al realizar operaciones se obtiene que el término de la segunda renta vale 9.306,62 €.

8. Una empresa deposita en una entidad financiera las siguientes rentas anuales: una prepagable de 10 términos de cuantía 4.000 €, venciendo el primero al inicio del año 3; y otra de 8 términos de cuantía 6.000 €, venciendo el primero al principio del año 13. Calcular el montante disponible dentro de 25 años, siendo el tipo de valoración para los primeros doce años el 8% bienal pagadero anualmente y para el resto de los años el 5% anual.

Resolución

El tipo de interés para los doce primeros años es el 4% anual, deducido del tanto nominal dado del 8% bienal pagadero anualmente. Denotando por a la cuantía anual prepagable de 4.000 € y por b la de 6.000, el gráfico de la operación es el siguiente:



El valor final verifica:

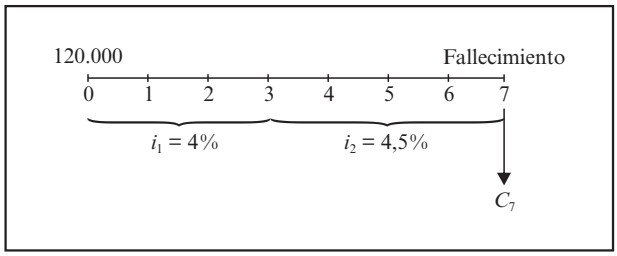
$$V_{25} = 4.000 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,04} \times 1{,}05^{13} + 6.000 \times \ddot{s}_{\overline{8}|0,05} \times 1{,}05^{5} = 170.959{,}83\ €$$

9. Una persona, con el fin de dejar en herencia a su hijo un cierto capital, decide depositar hoy 120.000 € en una entidad financiera que le retribuye al 4% anual durante los primeros tres años, y después al 4,5% anual. Transcurridos 7 años desde la imposición, se produce el fallecimiento de dicha persona. El hijo, ya en posesión del capital acumulado, decide retirar el 10% del mismo y percibir el resto mediante una renta de cuantía constante al final de cada mes y durante 8 años. Si la entidad financiera le abona un tipo de interés del 3,5% anual, determinar dicha cuantía constante.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El gráfico hasta el momento del fallecimiento es:



El fallecimiento se produce al cabo de 7 años desde el momento de realizar la imposición. Dicha imposición está 3 años al 4% anual y 4 años al 4,5% anual, por lo que el montante disponible al final del año 7 asciende a:

$$C_7 = 120.000 \times 1{,}04^3 \times 1{,}045^4 = 160.970{,}55$$

Del citado montante retira el 10% de forma inmediata, percibiendo el resto, o sea, 144.873,50 €, a través de una renta mensual de cuantía X durante 8 años. Gráficamente:

El valor actual de dicha renta al tipo de interés mensual del 0,287090% equivalente al 3,5% anual, verifica:

$$144.873{,}50 = X \times a_{\overline{96}|0{,}287090\%} \quad \Rightarrow \quad X = 1.728{,}75\ €$$

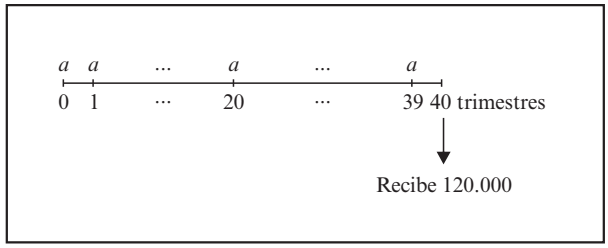
10. Un padre desea que su hijo perciba una determinada cuantía dentro de 10 años. Para ello acuerda con cierta entidad financiera ingresar en una cuenta bancaria, al principio de cada trimestre, una cantidad constante durante los citados 10 años, de tal forma que al finalizar el último trimestre el hijo pueda retirar la cantidad de 120.000 €. La entidad le ofrece un tipo de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente, ingresándole en la citada cuenta los intereses corres-

© Ediciones Pirámide

pondientes hasta el final de la operación. Después de transcurridos 5 años, y antes de ingresar la cuantía correspondiente al primer trimestre del año 6, la entidad le sube el tipo de interés al 8% efectivo anual, pero con la condición de que la operación se finalice pasados 4 años después del vencimiento inicial previsto. El padre acepta, pero con la condición de que el capital a retirar sea de 200.000 €. Determinar la nueva cuantía trimestral que deberá ingresar.

Resolución

Denominando a a la cuantía prepagable de la operación inicial, el gráfico correspondiente es:



El tipo de interés equivalente al tanto nominal dado es el 1,5% trimestral, verificándose que el valor final de la renta prepagable ha de coincidir con la cuantía a retirar por el hijo:

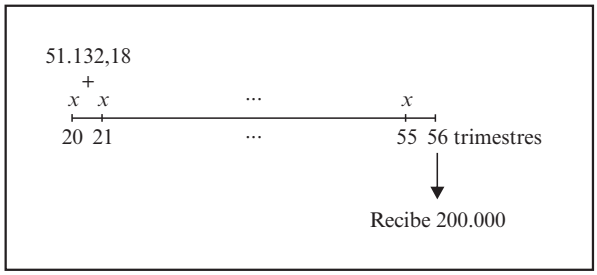
$$a \times \ddot{s}_{\overline{40}|1,5\%} = 120.000 \quad \Rightarrow \quad a = 2.178,57$$

Transcurridos 5 años, y antes de ingresar la cantidad del primer trimestre del año 6, las condiciones de la operación se modifican, por lo que procede determinar el montante disponible en dicho momento, es decir, el valor al final del trimestre 20 de la mencionada renta trimestral:

$$\ddot{V}_{20} = 2.178,57 \times \ddot{s}_{\overline{20}|1,5\%} = 51.132,18$$

Con las nuevas condiciones, se modifica el tipo de interés, que pasa a ser del 8% anual, siendo su equivalente trimestral el 1,9426547%; la duración final, que se incrementa en 4 años, así como el capital a retirar, que pasa a ser de 200.000 €. En consecuencia, faltan 9 años para poder retirar, los 200.000 €, los cuales se obtendrán como el valor final de la cuantía $\ddot{V}_{20} = 51.132,18$ más el valor final de una renta trimestral prepagable de término x, que es preciso determinar. El gráfico es:

© Ediciones Pirámide



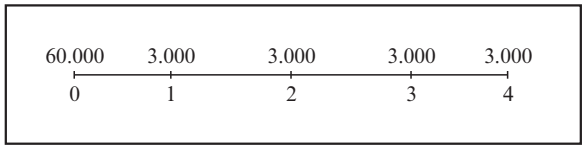
La ecuación de equivalencia verifica:

$$200.000 = 51.132{,}18 \times 1{,}08^{9} + x \times \ddot{s}_{\overline{36}|1{,}9426547\%} \quad \Rightarrow \quad x = 1.865{,}31\ €$$

11. Una empresa realiza la siguiente inversión: desembolsa 60.000 € al contado y pagos de 3.000 € al final de los cuatro años siguientes. Calcular el importe de los cobros prepagables trimestrales que debe recibir la empresa durante 10 años, contados una vez transcurridos 3 años desde el final de los cuatro anteriores, para que la rentabilidad de la operación sea del 12% anual.

Resolución

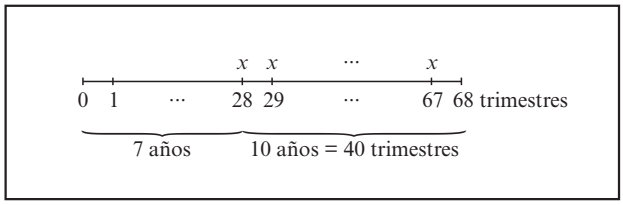
El gráfico del conjunto de pagos o conjunto de la prestación es:



El valor actual del conjunto anterior verifica:

$$V_0 = 60.000 + 3.000 \times a_{\overline{4}|12\%} = 69.112{,}05$$

El conjunto de cobros o contraprestación es:



© Ediciones Pirámide

El valor actual al 2,873734472% trimestral, equivalente al 12% anual, es:

$$V_0 = x \times \ddot{a}_{\overline{40}|2{,}873734472\%} \times 1{,}12^{-7}$$

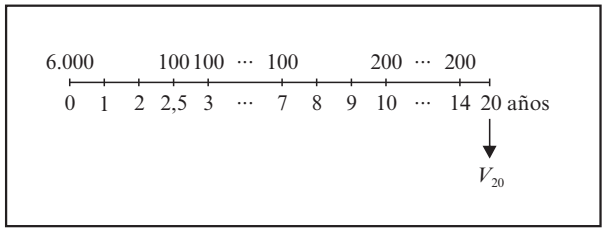
De acuerdo con el postulado de equivalencia financiera, podemos plantear la ecuación:

$$69.112{,}05 = x \times \ddot{a}_{\overline{40}|2{,}873734472\%} \times 1{,}12^{-7} \quad \Rightarrow \quad x = 6.294{,}70\ €$$

12. Un individuo deposita en una entidad financiera las siguientes cantidades: 6.000 € en el momento inicial; dos años después comienza a pagar al final de cada semestre 100 € durante 5 años; transcurridos dos años desde la última imposición semestral, comienza a depositar 200 € anuales pospagables durante otros 5 años. Si el tipo de interés es del 4,04% anual, determinar el importe del montante que puede retirar dicho individuo al cabo de 20 años desde el inicio de la operación.

Resolución

El gráfico de la operación es el siguiente:



El montante disponible al finalizar la operación está constituido por el valor al final del año 20 de todas las cuantías impuestas:

$$V_{20} = 6.000 \times 1{,}0404^{20} + 100 \times s_{\overline{10}|2\%} \times 1{,}0404^{13} + 200 \times s_{\overline{5}|4{,}04\%} \times$$
$$\times\ 1{,}0404^{6} = 16.455{,}53\ €$$

6.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar el valor actual y el valor final de una renta de 8 términos anuales constantes de cuantía 20 €, siendo el tipo de interés el 5% anual, en los siguientes casos:

© Ediciones Pirámide

a) Renta inmediata pospagable.
b) Renta inmediata prepagable.
c) Renta diferida 4 años pospagable.
d) Renta diferida 4 años prepagable.
e) Renta anticipada 4 años pospagable.
f) Renta anticipada 4 años prepagable.

2. Un individuo quiere cancelar una deuda de 27.022,04 € mediante pagos constantes al final de cada mes durante 10 años. Determinar la cuantía de cada mensualidad, si el tipo de interés es del 6,17% anual.

3. Un sujeto adquiere un coche y le ofrecen dos alternativas de pago:

a) Entregar 3.000 € de entrada y el resto mediante aportaciones mensuales de 300 € durante 3 años.
b) Entregar 3.000 € de entrada y el resto mediante aportaciones mensuales de 230 € durante 5 años.

Determinar qué alternativa le interesa más al comprador, sabiendo que en ambas la primera aportación se realiza al final del mes en el que realiza la entrada y el tipo de interés es del 1% mensual.

4. Un individuo realiza la siguiente operación financiera. Entrega un apartamento con unos rendimientos netos mensuales pospagables de 800 € a cambio de 30.000 € en efectivo en el momento de la operación y de dos rentas: una renta trimestral constante inmediata, pospagable, de cuantía X durante cuatro años, y otra renta de términos semestrales pospagables, de cuantía $3X$ durante tres años, que comenzará a recibir transcurrido un año desde el final de la renta trimestral. Sabiendo que el tipo de interés de la operación es el 0,4% mensual, calcular el valor de X.

5. Una persona va a adquirir una vivienda y le ofrecen dos alternativas de pago:

a) Una entrada de 60.000 € y pagos mensuales pospagables durante 15 años de cuantía 1.463,56 €.
b) Una entrada de 12.000 €, pagos semestrales pospagables de 6.000 € durante 3 años, y el resto abonando 4.892,35 € cada dos meses durante 15 años, realizándose el primer pago bimestral un año y medio después del último pago semestral.

Determinar qué alternativa le interesa más al inversor, si el tipo de interés a aplicar es el 6,5% anual.

© Ediciones Pirámide

6. Un individuo comienza a ahorrar con el objetivo de adquirir un barco, para lo cual deposita en una entidad financiera cuantías trimestrales pospagables de 1.000 € durante cuatro años a un tipo de interés del 1% trimestral. El montante formado lo entrega como entrada en la compra del barco y el resto lo financia mediante pagos mensuales de 433,35 € durante 5 años a un tanto nominal del 5,4% anual pagadero mensualmente. Determinar en el momento de la compra el precio del barco.

© Ediciones Pirámide

7 Valoración de rentas financieras (II)

OBJETIVOS

- Establecer el concepto de renta variable y diferenciar entre los distintos tipos.
- Calcular el valor financiero en cualquier momento del tiempo de las rentas variables, y en particular de las rentas variables en progresión aritmética y geométrica.

SUMARIO

7.1. Concepto y valoración de las rentas variables.
7.2. Rentas de términos variables en progresión aritmética.
7.3. Rentas de términos variables en progresión geométrica.
7.4. Ejercicios y problemas resueltos.
7.5. Ejercicios y problemas propuestos.

7.1. CONCEPTO Y VALORACIÓN DE LAS RENTAS VARIABLES

De acuerdo con la clasificación de las rentas, y atendiendo a la cuantía de los términos, podemos distinguir entre rentas constantes y rentas variables. En general, decimos que una renta es variable cuando sus términos no tienen la misma cuantía.

Tal y como hemos señalado en lecciones precedentes, el valor actual y el valor final de una renta variable inmediata se obtienen valorando en el origen y en el final, respectivamente, cada uno de los términos de la misma. Gráficamente, para una renta inmediata pospagable, tenemos:

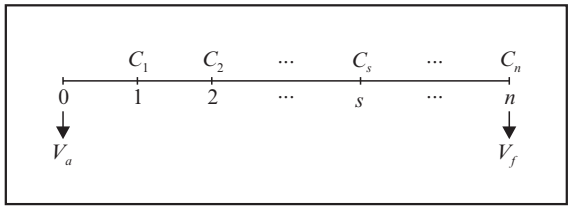


Figura 7.1.

Las cuantías de los términos de una renta variable pueden ser cualesquiera, pero es posible distinguir tres modalidades:

a) Rentas cuyos términos no siguen ninguna ley de formación. Para su valoración es preciso trasladar cada término por separado hasta el punto de valoración.

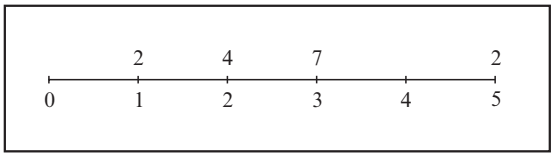
© Ediciones Pirámide

b) Rentas cuyos términos son constantes por intervalos de tiempo. En estas rentas, y para aquellos períodos con términos constantes entre sí, es posible aplicar lo señalado para las rentas constantes.

c) Rentas cuyos términos siguen algún criterio de variabilidad o ley de formación. En este caso, lo más usual es la variabilidad de los términos en progresión aritmética o en progresión geométrica.

EJERCICIO 7.1

Calcular el valor actual y el valor final, para un tipo de interés del 3% anual, de la siguiente renta inmediata, anual y pospagable:



Resolución

$$V_0 = 2(1{,}03)^{-1} + 4(1{,}03)^{-2} + 7(1{,}03)^{-3} + 2(1{,}03)^{-5} = 13{,}84$$

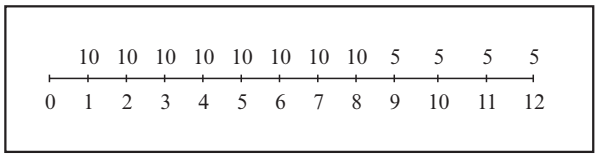
$$V_5 = 13{,}84 \times 1{,}03^5 = 16{,}04$$

EJERCICIO 7.2

Sea una renta inmediata, pospagable, de 12 términos anuales, valorada al 4% anual. La cuantía de los ocho primeros términos es de 10 € y la de los cuatro últimos 5 €. Determinar el valor actual, el valor final y el valor en 6.

Resolución

El gráfico de la renta es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

Los ocho primeros términos los podemos considerar como los de una renta constante inmediata, y los cuatro últimos como los de una renta diferida en 8 períodos. Por tanto, el valor actual total es:

$$V_0 = 10 \times a_{\overline{8}|0,04} + 5 \times a_{\overline{4}|0,04} \times 1,04^{-8} = 80,59 \text{ €}$$

El valor final lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta el final del período 12, o bien directamente relacionándolo con el valor actual, de manera que:

$$V_{12} = 10 \times s_{\overline{8}|0,04} \times 1,04^4 + 5 \times s_{\overline{4}|0,04} = 129,03 \text{ €}$$

o bien

$$V_{12} = V_0(1 + i)^{12} = 80,59\,(1,04)^{12} = 129,03 \text{ €}$$

Del mismo modo, el valor en 6 lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta dicho período, o bien directamente relacionándolo con el valor actual o con el valor final, de manera que se verifica:

$$V_6 = 10 \times s_{\overline{6}|0,04} + 10 \times a_{\overline{2}|0,04} + 5 \times a_{\overline{4}|0,04} \times 1,04^{-2} = 101,97$$

o bien

$$V_6 = V_0(1 + i)^6 = 80,59\,(1,04)^6 = 101,97 \text{ €}$$

o también

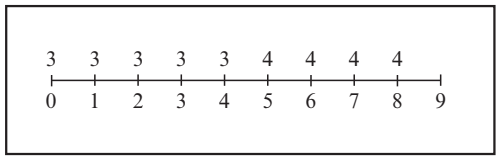
$$V_6 = V_{12}(1 + i)^{-6} = 129,03\,(1,04)^{-6} = 101,97 \text{ €}$$

EJERCICIO 7.3

Sea una renta temporal, anual, inmediata y prepagable, cuyos cinco primeros términos son de cuantía 3 €, y los cuatro restantes de cuantía 4 €. Para un tipo de interés del 3% anual, determinar el valor actual, el valor final y el valor en 3.

Resolución

Se trata de una renta cuyo gráfico es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

El valor actual es:

$$\ddot{V}_0 = 3 \times \ddot{a}_{\overline{5}|0,03} + 4 \times \ddot{a}_{\overline{4}|0,03} \times 1{,}03^{-5} = 27{,}36\ €$$

El valor final lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta el final del período 9, o bien directamente relacionándolo con el valor actual, de manera que:

$$\ddot{V}_9 = 3 \times \ddot{s}_{\overline{5}|0,03} \times 1{,}03^4 + 4 \times \ddot{s}_{\overline{4}|0,03} = 35{,}70\ €$$

o bien

$$\ddot{V}_9 = \ddot{V}_0(1 + i)^9 = 27{,}36(1{,}03)^9 = 35{,}70\ €$$

Del mismo modo, el valor en 3 lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta dicho período, o bien directamente relacionándolo con el valor actual o con el valor final, de manera que:

$$\ddot{V}_3 = 3 \times \ddot{s}_{\overline{3}|0,03} + 3 \times \ddot{a}_{\overline{2}|0,03} + 4 \times \ddot{a}_{\overline{4}|0,03} \times 1{,}03^{-2} = 29{,}90\ €$$

o bien

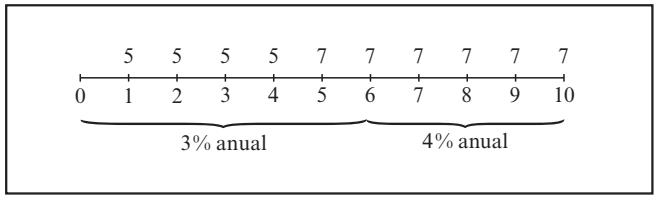
$$\ddot{V}_3 = \ddot{V}_0(1 + i)^3 = 27{,}36(1{,}03)^3 = 29{,}90\ €$$

o también

$$\ddot{V}_3 = \ddot{V}_9(1 + i)^{-6} = 35{,}70(1{,}03)^{-6} = 29{,}90\ €$$

EJERCICIO 7.4

Calcular el valor actual y el valor final de la siguiente renta anual inmediata pospagable, siendo el tipo de interés para los primeros seis años del 3% anual y del 4% anual para los restantes:



© Ediciones Pirámide

Resolución

Es preciso valorar cada tramo de renta según su cuantía y el tipo de interés a aplicar. Así, el valor actual y el final verifican:

$$V_0 = 5 \times a_{\overline{4}|0,03} + 7 \times a_{\overline{2}|0,03} \times 1,03^{-4} + 7 \times a_{\overline{4}|0,04} \times 1,03^{-6} = 51,77\ €$$

$$V_{10} = 5 \times s_{\overline{4}|0,03} \times 1,03^2 \times 1,04^4 + 7 \times s_{\overline{2}|0,03} \times 1,04^4 + 7 \times s_{\overline{4}|0,04} =$$
$$= 51,77 \times 1,03^6 \times 1,04^4 = 72,32\ €$$

7.2. RENTAS DE TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En una renta de términos variables en progresión aritmética, la cuantía de cada término, excepto el primero, se obtiene añadiendo al anterior una determinada cuantía constante d llamada razón. Por tanto, para cualquier término s se verifica: $C_s = C_{s-1} + d$. En función del primer término tenemos: $C_s = C_1 + (s-1)\,d$. El primer término ha de ser positivo, y la razón puede ser positiva o negativa[1].

Vamos a plantear el cálculo del valor actual de la renta temporal, inmediata, pospagable, y a partir de ella se deducirán los valores actuales y finales de cualquier otra renta, teniendo en cuenta las relaciones analizadas en la lección anterior.

7.2.1. Renta temporal, inmediata y pospagable

El gráfico de esta renta es el siguiente:

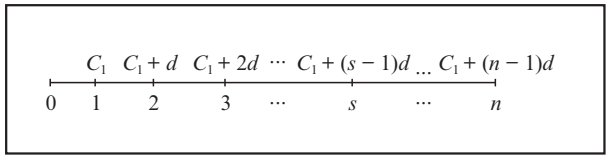


Figura 7.2.

[1] En el caso que la razón sea negativa, el último término será el de menor cuantía, pero ha de ser positivo, por lo que se verificará: $C_n = C_1 + (n-1)\,d > 0$, y por tanto la razón ha de verificar: $d > \dfrac{-C_1}{n-1}$.

© Ediciones Pirámide

El valor actual para un tipo de interés constante verifica:

$$V_a = A_{(C_1,\, d)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$$

Teniendo en cuenta que los términos cumplen la relación $C_s = C_1 + (s-1)\,d$, al sustituir se llega a:

$$A_{(C_1,\, d)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} [C_1 + (s-1)\,d](1+i)^{-s}$$

Desarrollando la expresión anterior, tenemos:

$$A_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} [C_1(1+i)^{-s} + (s-1)\,d(1+i)^{-s}] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_1(1+i)^{-s} + d\sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s} - d\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s}$$

Teniendo en cuenta que se verifica:

$$\sum_{s=1}^{n} C_1(1+i)^{-s} = C_1 \times a_{\overline{n}|i};\; d\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = d \times a_{\overline{n}|i}$$

y denominando

$$B = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s}$$

tenemos:

$$A_{(C_1,\, d)\overline{n}|i} = C_1 \times a_{\overline{n}|i} + d \times B - d \times a_{\overline{n}|i}$$

En la expresión de B multiplicamos ambos miembros por el factor de capitalización y le restamos B, obteniendo:

$$B(1+i) = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s+1} = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-(s-1)}$$

$$B(1+i) - B = B \times i = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-(s-1)} - \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s}$$

© Ediciones Pirámide

Desarrollando los sumatorios, se tiene:

$$B \times i = [(1+i)^0 + 2(1+i)^{-1} + 3(1+i)^{-2} + \ldots + n(1+i)^{-(n-1)}] -$$
$$-[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \ldots + (n-1) \times (1+i)^{-(n-1)} + n(1+i)^{-n}]$$

Efectuando las diferencias, se llega a:

$$B \times i = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)} - n(1+i)^{-n} =$$
$$= [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)}] - n(1+i)^{-n}$$

Ahora bien, la expresión anterior entre corchetes es el valor actual de una renta temporal, unitaria y prepagable:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)}$$

Pero $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,a_{\overline{n}|i}$, por lo que tenemos: $B \times i = (1+i)\,a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}$. De donde se llega a:

$$B = \frac{(1+i) \times a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \times a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - \frac{n(1+i)^{-n}}{i}$$

Al ser $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, obtenemos: $\dfrac{(1+i)^{-n}}{i} = \dfrac{1}{i} - a_{\overline{n}|i}$. Y al sustituir queda:

$$B = \frac{1}{i} \times a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - n\left(\frac{1}{i} - a_{\overline{n}|i}\right) = \frac{a_{\overline{n}|i}}{i} + a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{i} + n \times a_{\overline{n}|i}$$

Y en consecuencia, la expresión que ya tenemos del valor actual sería:

$$A_{(C_1,\,d)\overline{n}|i} = C_1 \times a_{\overline{n}|i} + d \times B - d \times a_{\overline{n}|i} =$$
$$= C_1 \times a_{\overline{n}|i} + d\left[\frac{a_{\overline{n}|i}}{i} + a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{i} + n \times a_{\overline{n}|i}\right] - d \times a_{\overline{n}|i}$$

Efectuando operaciones, se llega a:

$$A_{(C_1,\,d)\overline{n}|i} = \left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

Teniendo en cuenta las relaciones generales obtenidas, el valor final verifica:

$$S_{(C_1,\,d)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\,d)\overline{n}|i}(1+i)^n$$

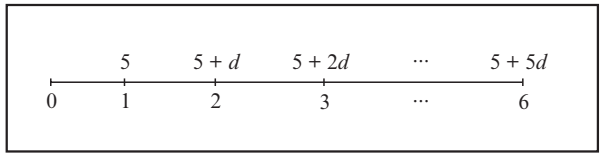
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 7.5

Calcular el valor actual y el valor final de una renta inmediata de 6 términos anuales pospagables, sabiendo que la cuantía del primer término es de 5 € y que el importe de los siguientes términos aumenta anualmente en 10 € con respecto al anterior, siendo el tipo de interés el 5% anual.

Resolución

La representación gráfica de esta renta es la siguiente:



El valor actual es:

$$A_{(C_1=5,\ d=10)\overline{n=6}|i=5\%} = \left(5 + 10 \times 6 + \frac{10}{0{,}05}\right) \times a_{\overline{6}|5\%} - \frac{10 \times 6}{0{,}05} = 145{,}06\ €$$

A partir del valor actual, calculamos el valor final:

$$S_{(C_1=5,\ d=10)\overline{n=6}|5\%} = A_{(C_1=5,\ d=10)\overline{n=6}|5\%}(1 + i)^n = 145{,}06(1 + 0{,}05)^6 = 194{,}39\ €$$

7.2.2. Renta temporal, inmediata y prepagable

El valor actual y el final de esta renta se calculan teniendo en cuenta las relaciones establecidas con las rentas pospagables, de modo que se verifica:

$$\ddot{A}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\ d)\overline{n}|i}(1 + i) = \left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right] \times (1 + i)$$

$$\ddot{S}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i} = S_{(C_1,\ d)\overline{n}|i}(1 + i)$$

También se cumple:

$$\ddot{S}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 7.6

Calcular el valor actual y el valor final de una renta inmediata de 20 términos anuales prepagables, sabiendo que la cuantía del primer término es de 600 € y que anualmente aumenta en 50 € con respecto a la cuantía del año anterior, siendo el tipo de interés del 5% anual.

Resolución

Se trata de una renta prepagable, de términos variables en progresión aritmética, cuyo primer término vale 600 € y la razón es de 50 €. Tenemos:

$$\ddot{A}_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right](1+i) =$$

$$= \left[\left(600 + 50 \times 20 + \frac{50}{0{,}05}\right)a_{\overline{20}|5\%} - \frac{50 \times 20}{0{,}05}\right](1 + 0{,}05) = 13.021{,}84\ €$$

El valor final es:

$$\ddot{S}_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,d)\overline{n}|i}(1+i)^n = 13.021{,}84 \times 1{,}05^{20} = 34.550{,}81\ €$$

7.2.3. Renta perpetua, inmediata y pospagable

El valor actual de la renta perpetua se obtiene como el límite del valor actual de la renta temporal cuando el número de períodos tiende a infinito. Así, en la renta perpetua, inmediata y pospagable, se verifica:

$$A_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} A_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(C_1 + \frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} + d \times n \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right]$$

Tal y como señalamos en las rentas unitarias, perpetuas, constantes e inmediatas, su valor actual verifica: $\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}$, por lo que tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$A_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} + \lim_{n\to\infty}\left[d \times n\left(a_{\overline{n}|i} - \frac{1}{i}\right)\right]$$

Para calcular el límite de la expresión anterior, hemos de desarrollarla antes:

$$d \times n\left(a_{\overline{n}|i} - \frac{1}{i}\right) = d \times n\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{1}{i}\right] = -d \times n \times \frac{(1+i)^{-n}}{i} = \frac{-d}{i} \times \frac{n}{(1+i)^n}$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n}$, al ser de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, utilizamos la regla de L´Hopital, llegándose a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n \times \log_e (1+i)} = 0$$

En consecuencia, queda:

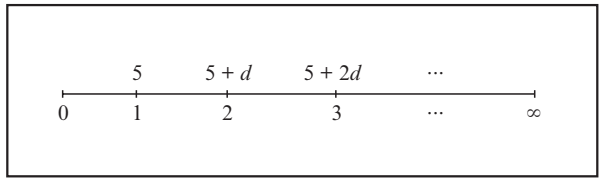
$$A_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$$

EJERCICIO 7.7

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, pospagable y perpetua, sabiendo que la cuantía del primer término es de 5 € y que anualmente aumenta 10 € con respecto al período anterior, siendo el tipo de interés el 5% anual.

Resolución

La representación gráfica de esta renta es la siguiente:



El valor actual es:

$$A_{(C_1=5,\ d=10)\overline{\infty}|5\%} = \left(5 + \frac{10}{0{,}05}\right)\frac{1}{0{,}05} = 4{,}100\ €$$

© Ediciones Pirámide

7.2.4. Renta perpetua, inmediata y prepagable

Teniendo en cuenta la relación entre el valor actual de la renta prepagable y el de la pospagable, se verifica:

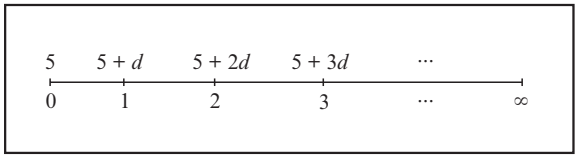
$$\ddot{A}_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} \times (1 + i)$$

EJERCICIO 7.8

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, prepagable, perpetua, sabiendo que la cuantía del primer término es de 5 € y que anualmente aumenta 10 € con respecto al período anterior, siendo el tipo de interés el 5% anual.

Resolución

La representación gráfica de esta renta es la siguiente:



El valor actual es:

$$\ddot{A}_{(C_1=5,\,d=10)\overline{\infty}|5\%} = \left(5 + \frac{10}{0{,}05}\right)\frac{1}{0{,}05} \times 1{,}05 = 4{,}305\ €$$

7.3. RENTAS DE TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una renta de términos variables en progresión geométrica es aquella en la que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cuantía constante q denominada razón. Por tanto, los términos verifican: $C_s = C_{s-1} \times q$, o bien, en función del primer término: $C_s = C_1 \times q^{s-1}$. Tanto el primer término como la razón han de ser números positivos para que los restantes términos también lo sean.

© Ediciones Pirámide

Del mismo modo que en las rentas variables en progresión aritmética, partiendo del valor actual de la renta temporal, inmediata, pospagable, calculamos el valor actual y el valor final de los otros tipos de rentas.

7.3.1. Renta temporal, inmediata y pospagable

El gráfico de esta renta es el siguiente:

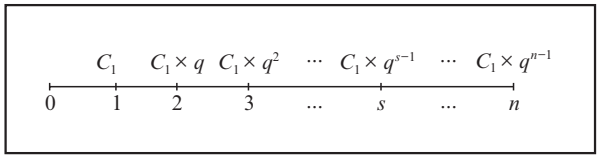


Figura 7.3.

Vamos a determinar el valor actual para un tipo de interés constante. De acuerdo con el concepto de valor actual, se verifica:

$$V_a = A_{(C_1,q)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{-s}$$

Y sustituyendo:

$$A_{(C_1,q)\overline{n}|i} = C_1(1+i)^{-1} + C_1 \times q(1+i)^{-2} + \ldots + C_1 \times q^{n-1}(1+i)^{-n} =$$
$$= C_1(1+i)^{-1}[1 + q(1+i)^{-1} + \ldots + q^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}]$$

La expresión recogida entre corchetes es la suma de una sucesión de términos variables en progresión geométrica, de primer término la unidad y razón igual a $q(1+i)^{-1}$, cuyo valor es:

$$S = \frac{a_1 - a_n \times r}{1-r} = \frac{1 - q^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}\, q(1+i)^{-1}}{1 - q(1+i)^{-1}} =$$
$$= (1+i)\frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Y al sustituir en la ecuación anterior del valor actual, se verifica:

$$A_{(C_1,q)\overline{n}|i} = C_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

© Ediciones Pirámide

El valor final se obtiene de acuerdo con la expresión:

$$S_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

Para el caso particular en el que la razón de la progresión sea $q = (1 + i)$, no se puede aplicar directamente la expresión anterior del valor actual, por lo que es preciso determinar el valor actual de cada término. Así, tenemos:

$$A_{(C_1, q)\overline{n}|i} = C_1(1 + i)^{-1} + C_1 \times q(1 + i)^{-2} + ... + C_1 \times q^{n-1}(1 + i)^{-n} =$$
$$= C_1(1 + i)^{-1}[1 + q(1 + \mathrm{i})^{-1} + ... + q^{n-1}(1 + i)^{-(\mathrm{n}-1)}]$$

Como $q = (1 + i)$, queda:

$$A_{(C_1, q=1+i)\overline{n}|i} = C_1(1 + i)^{-1}[1 + 1 + ... + 1]$$

Y en consecuencia:

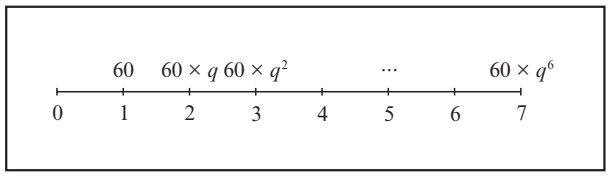
$$A_{(C_1, q=1+i)\overline{n}|i} = \frac{C_1 \times n}{1 + i}$$

EJERCICIO 7.9

Calcular el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata pospagable de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual y la duración 7 años.

Resolución

Tenemos una renta pospagable, inmediata y temporal, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, siendo su representación gráfica la siguiente:



© Ediciones Pirámide

El valor actual de esta renta es:

$$A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = 60 \times \frac{1 - 1{,}02^7(1 + 0{,}04)^{-7}}{1 + 0{,}04 - 1{,}02} = 381{,}28\ €$$

y el valor final:

$$S_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1 + i)^n = 381{,}28 \times 1{,}04^7 = 501{,}74\ €$$

EJERCICIO 7.10

Calcular el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata pospagable de primer término 60 €, sabiendo que el importe de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 2% anual y la duración 7 años.

Resolución

Tenemos una renta pospagable, inmediata y temporal, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, por lo que en este caso se verifica que $q = 1 + i$. De acuerdo con lo expuesto, el valor actual y final verifican:

$$A_{(C_1,\,q=1+i)\overline{n}|i} = \frac{60 \times 7}{1{,}02} = 411{,}76\ €$$

$$S_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1 + i)^n = 411{,}76 \times 1{,}02^7 = 472{,}98\ €$$

7.3.2. Renta temporal, inmediata y prepagable

Los valores actual y final de esta renta se calcularán teniendo en cuenta las relaciones establecidas con las rentas pospagables, de modo que se verifica:

$$\ddot{A}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1 + i) \text{ y } \ddot{S}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = S_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1 + i)$$

También se cumple:

$$\ddot{S}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

EJERCICIO 7.11

Calcular el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata prepagable de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual y la duración 7 años.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Tenemos una renta prepagable, inmediata y temporal, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$. El valor actual de esta renta es:

$$\ddot{A}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)\left[60 \times \frac{1 - 1{,}02^7(1+0{,}04)^{-7}}{1 + 0{,}04 - 1{,}02}\right]1{,}04 = 381{,}28 \times 1{,}04 = 396{,}53\ €$$

El valor final es:

$$\ddot{S}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^n = 396{,}53 \times 1{,}04^7 = 521{,}81\ €$$

7.3.3. Renta perpetua, inmediata y pospagable

El valor actual de la renta perpetua se obtiene como el límite del valor actual de la renta temporal cuando el número de períodos tiende a infinito. Así, en la renta perpetua, inmediata y pospagable, se verifica:

$$A_{(C_1,\,q)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} C_1 \times \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1 + i - q} = \lim_{n\to\infty} C_1 \times \frac{1 - \left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1 + i - q}$$

En la expresión anterior, el $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{1+i}\right)^n$, cuando $q < (1+i)$ toma valor nulo, al ser el numerador inferior al denominador. En cambio, cuando $q > (1+i)$, al ser el numerador superior al denominador, el valor del límite es infinito y la renta carece de valor actual. Para el caso en que sea $q = (1+i)$, tenemos:

$$A_{(C_1,\,q=1+i)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 \times n}{1+i} = \infty$$

En consecuencia, sólo tiene sentido hablar de valor actual de las rentas perpetuas de términos variables en progresión geométrica, si la razón es inferior al factor unitario de capitalización, o sea: $q < (1+i)$. El valor actual es:

$$A_{(C_1,\,q)\overline{\infty}|i} = \frac{C_1}{1 + i - q}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 7.12

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, perpetua y pospagable, de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual.

Resolución

Tenemos una renta pospagable, perpetua, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, por lo que al ser $q < 1 + i$, el valor actual de esta renta verifica:

$$A_{(C_1,q)\overline{\infty}|i} = \frac{60}{1 + 0{,}04 - 1{,}02} = 3.000\ €$$

7.3.4. Renta perpetua, inmediata y prepagable

Teniendo en cuenta la relación entre el valor actual de la renta prepagable y el de la pospagable, se verifica para $q < (1 + i)$:

$$\ddot{A}_{(C_1,q)\overline{\infty}|i} = \frac{C_1}{1 + i - q}(1 + i)$$

EJERCICIO 7.13

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, perpetua y prepagable, de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual.

Resolución

Tenemos una renta prepagable, perpetua, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, por lo que al ser $q < 1 + i$, el valor actual de esta renta verifica:

$$\ddot{A}_{(C_1,q)\overline{\infty}|i} = \frac{60}{1 + 0{,}04 - 1{,}02} \times 1{,}04 = 3.120\ €$$

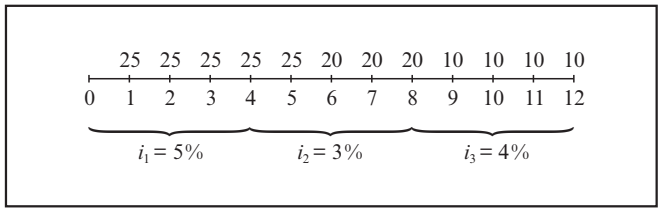
© Ediciones Pirámide

7.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata, pospagable, de 12 años de duración. Los cinco primeros términos son de cuantía 25 €, los tres siguientes de 20 € y los restantes de 10 €. El tipo de interés a aplicar en los cuatro primeros años es el 5% anual, en los cuatro siguientes el 3% anual y en los restantes el 4% anual.

Resolución

El gráfico de la renta es el siguiente:



Se trata de una renta variable, con tramos de términos constantes, que se valora con distintos tipos de interés. Por tanto, trasladando al momento 0 todos los capitales, tenemos que el valor actual es:

$$V_0 = 25 \times a_{\overline{4}|0,05} + 25(1,03)^{-1}(1,05)^{-4} + 20 \times a_{\overline{3}|0,03}(1,03)^{-1}(1,05)^{-4} + 10 \times$$
$$\times a_{\overline{4}|0,04}(1,03)^{-4}(1,05)^{-4} = 180,34 \text{ €}$$

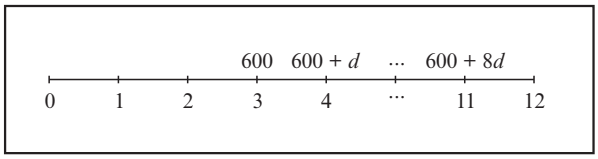
2. Determinar el valor actual y el valor final de una renta temporal, prepagable, diferida en 3 años, de nueve términos anuales variables en progresión aritmética de razón 30 €. Se sabe que el cuarto término vale 690 € y el tipo de interés es el 3% anual.

Resolución

De acuerdo con los datos, el primer capital vence al inicio del año 4 y el número de términos es 9, por lo que el último término vence al principio del año 12. Como conocemos la cuantía del cuarto término y la razón, podemos determinar la cuantía del primer término, sabiendo que: $C_s = C_1 + (s - 1)d$, de modo que se verifica: $C_4 = C_1 + (4 - 1)d \Rightarrow 690 = C_1 + 3 \times 30$, siendo por tanto $C_1 = 600$.

© Ediciones Pirámide

La representación gráfica de la renta es:



De acuerdo con el gráfico, el valor actual lo podemos calcular bien considerando una renta pospagable variable en progresión aritmética diferida dos períodos, o bien considerando una renta prepagable variable en progresión aritmética diferida tres períodos. Vamos a calcular dicho valor actual considerándola prepagable, de modo que se verifica:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{A}_{(C_1,\, d)\overline{n}|i}(1+i)^{-3} = A_{(C_1,\, d)\overline{n}|i}(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^{-3}$$

Sustituyendo los valores:

$$\ddot{V}_0 = \left[\left(600 + 30 \times 9 + \frac{30}{0{,}03}\right) a_{\overline{9}|3\%} - \frac{30 \times 9}{0{,}03}\right](1{,}03)(1{,}03)^{-3} = 5.240{,}86\ €$$

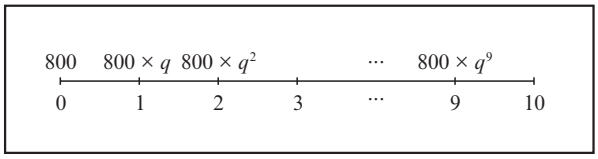
El valor final de esta renta diferida coincide con el de una renta inmediata de 9 términos, y lo calculamos a partir del valor obtenido en 0, teniendo en cuenta la relación entre el valor final y el valor actual, por lo que:

$$\ddot{V}_{12} = 5.240{,}86 \times 1{,}03^{12} = 7.472{,}21\ €$$

3. Una persona deposita en un banco el primero de enero de cierto año 800 €, y en la misma fecha de cada uno de los siguientes 10 años impone una cantidad que es un 10% mayor que la del año anterior. ¿Que capital reunirá al cabo de 10 años de efectuar la primera imposición, si la entidad capitaliza al 3% anual?

Resolución

El gráfico de la renta es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

Nos piden calcular el valor final, al 3% anual, de una renta anual de 10 años de duración, inmediata y prepagable, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}10$, por lo que:

$$\ddot{S}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^n = A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)(1+i)^n$$

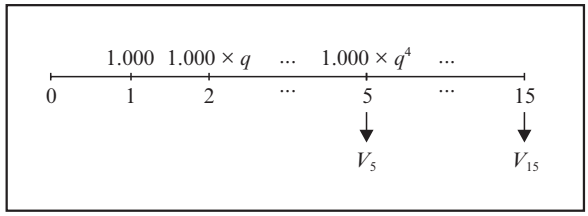
verificándose:

$$\ddot{S}_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = \left[800 \times \frac{1 - 1{,}10^{10}(1+0{,}03)^{-10}}{1+0{,}03-1{,}10}\right]1{,}03^{11} = 14.712{,}24\ €$$

4. Un individuo realiza aportaciones anuales durante 5 años, que van creciendo cada año un 5% con respecto al período anterior. La primera aportación la realiza al final del año 1 y su importe es de 1.000 €. Calcular el valor de estas aportaciones al final del año 15, si el tipo de interés es del 3% anual.

Resolución

La gráfica de la renta es:



Tenemos una renta pospagable de cinco términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1{,}05$, de la que nos piden su valor al cabo de 15 años. Se trata de una renta anticipada en 10 períodos, de manera que el valor pedido es:

$$V_{15} = S_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^{10}, \text{ siendo } S_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^n$$

de manera que el valor final, en 10, de la renta inmediata de 5 años de duración, es:

$$S_{(C_1,\,q)\overline{n}|i} = 1.000 \times \frac{1 - 1{,}05^5 \times 1{,}03^{-5}}{1+0{,}03-1{,}05} \times 1{,}03^5 = 5.850{,}37$$

De modo que el valor final en 15 es: $V_{15} = 5.850{,}37 \times 1{,}03^{10} = 7.862{,}41$ €.

© Ediciones Pirámide

5. Un inversor adquiere un piso y le ofrecen dos alternativas de pago:

a) Entregar aportaciones trimestrales crecientes un 5% con respecto a la del período anterior, durante 10 años. La primera aportación la realiza al final del primer trimestre y su importe es de 2.000 €.

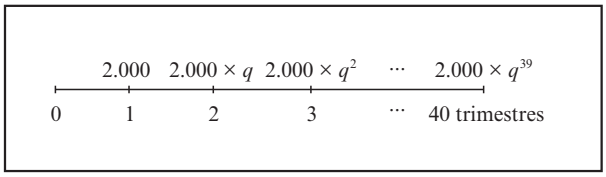
b) Entregar aportaciones trimestrales que aumentan periódicamente en 150 €, durante 10 años. La primera aportación la realiza al final del primer trimestre y su importe es de 2.000 €.

Determinar qué alternativa le interesa más al inversor, suponiendo un tipo de interés del 1% trimestral.

Resolución

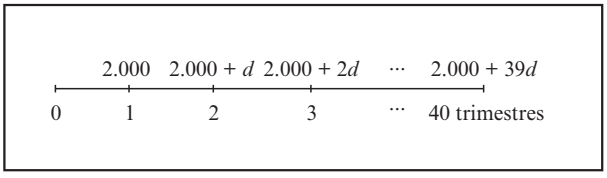
Para comparar ambas alternativas, calcularemos el valor de cada una de ellas en el momento de la compra. La que menor valor actual presente será la alternativa más ventajosa para el inversor.

a) En este caso nos encontramos con una renta trimestral variable en progresión geométrica de razón $q = 1{,}05$, cuyo valor actual verifica:



$$A_{(C_1=2.000,\,q=1{,}05)\overline{40}|1\%} = 2.000 \times \frac{1 - 1{,}50^{40} \times 1{,}01^{-40}}{1 + 0{,}01 - 1{,}05} = 186.421{,}53\ €$$

b) Nos encontramos con una renta trimestral variable en progresión aritmética de razón $d = 150$, cuyo valor actual verifica:



$$A_{(C_1=2.000,\,d=150)\overline{40}|1\%} = \left(2.000 + 150 \times 40 + \frac{150}{0{,}01}\right) a_{\overline{40}|1\%} - \frac{150 \times 40}{0{,}01} = 155.197{,}78\ €$$

© Ediciones Pirámide

La alternativa que más le interesa al inversor es la *b*, ya que su valor actual es menor.

6. Una persona adquiere un coche pagando 15.000 € de entrada y el resto mediante pagos semestrales variables que aumentan en 50 € cada semestre. Se sabe que el quinto término vence al final del año 3, y que la cuantía del último término es de 500 €, venciendo al final del año 5. Para un tipo de interés del 6,09% anual, calcular el precio del coche.

Resolución

El precio del coche es la suma de la cuantía de entrada con el valor actual de la renta semestral pospagable, de términos variables en progresión aritmética de razón 50 €. Para determinar el valor actual de dicha renta es preciso determinar la cuantía del primer término y su vencimiento, así como el número de términos.

Como el quinto término vence al final del año 3 (semestre 6), el primero vence al final del semestre 2. Como el último término vence al final del semestre 10, y los vencimientos varían en progresión aritmética de razón $t = 1$, el número de términos es 9, deducido de:

$$t_n = t_1 + (n-1)\,t \quad \Rightarrow \quad 10 = 2 + n - 1 \quad \Rightarrow \quad n = 9$$

Por otra parte, la cuantía del último término verifica la siguiente relación con la cuantía del primer término:

$$C_n = C_1 + (n-1)\,d \quad \Rightarrow \quad 500 = C_1 + 8 \times 50 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 100$$

Por tanto, el precio del coche, valorado al 3% semestral, verifica:

$$V_0 = 15.000 + A_{(C_1=100,\,d=50)\overline{9}|3\%} \times 1{,}03^{-1} = 15.000 +$$

$$+ \left[\left(100 + 50 \times 9 + \frac{50}{0{,}03}\right) a_{\overline{9}|0{,}03} - \frac{50 \times 9}{0{,}03}\right] 1{,}03^{-1} = 17.193{,}41\ €$$

7.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un inversor depositó hace tres años un capital de 12.000 € en una entidad que ofrece una rentabilidad del 3,97% anual capitalizable semestralmente. En estos momentos, acuerda recibir el montante obtenido de la siguiente manera: de forma inmediata percibe 2.031,15 €, y el resto lo recibirá mediante una renta de

© Ediciones Pirámide

términos anuales al final de cada uno de los siguientes 5 años, cuyas cuantías crecen anualmente un 10%. Determinar la cuantía del primer término de esta renta anual, si el tipo de interés de esta renta es del 2% anual.

2. Calcular el valor actual de una renta perpetua que se incrementa todos los años un 2%, sabiendo que la cuantía recibida el primer año asciende a 12.000 €, y que el tipo de interés anual es del 4%, en los siguientes casos: *a*) las cuantías se reciben al final de cada año; *b*) las cuantías se reciben al principio de cada año.

3. Determinar el valor actual y el valor final de una renta de 10 términos anuales variables en progresión aritmética de razón 90 €, sabiendo que la cuantía del primer término es de 30 € y que el tipo de interés es el 4% anual, en los siguientes casos:

a) Renta inmediata pospagable.
b) Renta inmediata prepagable.
c) Renta diferida 3 años pospagable.
d) Renta diferida 3 años prepagable.
e) Renta anticipada 3 años pospagable.
f) Renta anticipada 3 años prepagable.

4. Una persona impone en una entidad financiera 50.000 € a un tipo de interés del 5% anual en capitalización compuesta durante 5 años. Transcurrido un año desde la imposición, con el fin de atender a diversos gastos, decide retirar al final de cada mes y durante los años restantes una cuantía que va aumentando en 30 € con respecto a la del mes anterior. El importe de la primera cuantía retirada es 30 €. Calcular el montante que puede retirar al final de la operación.

5. Un individuo ha ido depositando durante 8 años una cuantía al final de cada mes, la cual se incrementa mensualmente en 10 €. El importe de la primera cuantía impuesta es de 60 € y el tipo de interés del 5% anual. En estos momentos decide retirar el montante constituido e imponerlo 5 años en otra entidad que le proporciona el 6% anual, entregando además cuantías semestrales pospagables que van aumentando un 5% respecto al semestre anterior. Calcular el importe de la primera cuantía semestral a entregar, para que el montante que pueda retirar al final de esta nueva operación sea de 550.000 €.

© Ediciones Pirámide

8 Valoración de rentas financieras (III)

OBJETIVOS

- Establecer los conceptos de renta fraccionada, continua y de periodicidad superior a la unidad de tiempo.
- Calcular el valor financiero en cualquier momento del tiempo de las rentas citadas.

SUMARIO

8.1. Introducción.
8.2. Rentas fraccionadas.
8.3. Rentas continuas.
8.4. Rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo.
8.5. Ejercicios y problemas resueltos.
8.6. Ejercicios y problemas propuestos.

8.1. INTRODUCCIÓN

Atendiendo a la clasificación de las rentas, hemos señalado que las rentas discretas pueden ser de período uniforme y de período no uniforme. Las rentas de período uniforme se caracterizan porque el tiempo transcurrido entre los vencimientos de los términos es constante. En cambio, en las de período no uniforme, el tiempo transcurrido entre cada dos vencimientos no es constante. Dentro de las rentas de período uniforme podemos distinguir a su vez entre rentas enteras, rentas fraccionadas y rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo.

Las rentas enteras son aquellas en las que la periodicidad en el vencimiento de sus términos coincide con la unidad de tiempo. Por ejemplo, si consideramos como unidad de tiempo el año, una renta anual es una renta entera; pero si consideramos como unidad de tiempo el semestre, una renta semestral también será una renta entera.

En esta lección analizaremos las rentas discretas con periodicidad distinta a la unitaria, es decir, estudiaremos las rentas fraccionadas y las rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo, así como las rentas continuas.

8.2. RENTAS FRACCIONADAS

Las rentas fraccionadas son aquellas en las que la periodicidad en el vencimiento de sus términos es inferior a la unidad de tiempo. Por tanto, dividiendo la unidad de tiempo en m partes iguales, el tiempo transcurrido entre dos vencimientos consecutivos es $1/m$ de dicha unidad, dando origen a las *rentas fraccionadas de frecuencia m*. Ahora bien, al poder tomar cualquier período de tiempo como unidad del mismo, el concepto de fraccionamiento es relativo. Así, una renta mensual es fraccionada de una renta anual, de una semestral, de una trimestral, etc., y tam-

© Ediciones Pirámide

bién una renta semestral puede ser considerada como renta entera (si tomamos el semestre como unidad de tiempo) o como fraccionada de una anual (si tomamos el año como unidad de tiempo).

En este epígrafe analizaremos las rentas con **fraccionamiento uniforme,** en las cuales tanto la cuantía como la unidad de tiempo se dividen en m partes iguales.

8.2.1. Renta fraccionada, inmediata, temporal y pospagable

Se trata de una renta cuyos términos son de cuantía $\frac{C_s}{m}$ con vencimiento al final de cada subintervalo de amplitud $1/m$ de la unidad de tiempo, cuyo gráfico es el siguiente:

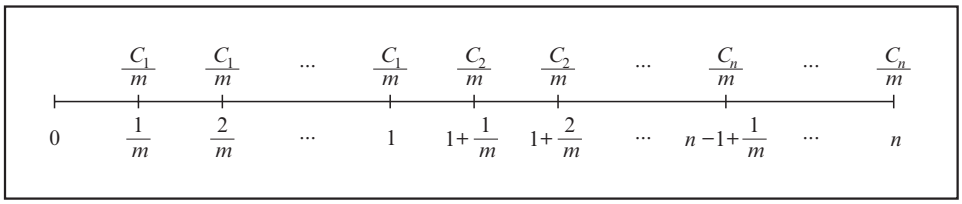


Figura 8.1.

Para valorar dicha renta nos fijamos en el período s, siendo el gráfico:

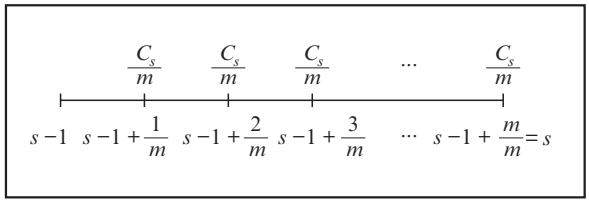


Figura 8.2.

El valor en s de los m términos del período s, es el valor final de una renta de m términos de cuantía constante, valorados al tipo $i^{(m)}$ del subperíodo. Dicho valor F_s verifica:

$$F_s = \frac{C_s}{m} \times s_{\overline{m}|i^{(m)}} = \frac{C_s}{m} \times \frac{[1 + i^{(m)}]^m - 1}{i^{(m)}} = \frac{C_s}{m} \times \frac{1 + i - 1}{i^{(m)}} = C_S \frac{i}{j_{(m)}}$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el valor final en s de los m términos del período s de la renta fraccionada es equivalente al término F_s, de modo que la renta entera cuyos términos son de cuantía F_s constituye **la renta entera equivalente** a la renta fraccionada. Podemos representar gráficamente la renta entera equivalente a la fraccionada como:

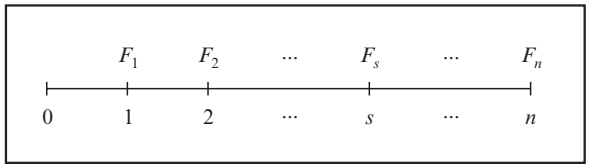


Figura 8.3.

Dado que esta renta entera es equivalente a la renta fraccionada, ambas tendrán el mismo valor actual, por lo que, valorando la renta entera equivalente, tendremos valorada la renta fraccionada. Por tanto:

$$V_a^{(m)} = \sum_{s=1}^{n} F_s\,(1+i)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} C_s \frac{i}{j_{(m)}} \times (1+i)^{-s} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{-s}$$

En la igualdad anterior tenemos la expresión $\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$, la cual constituye el valor actual de una renta entera de n términos de cuantía C_s. A dicha renta entera la denominamos **renta correspondiente.**

La **renta entera correspondiente pospagable** es aquella renta cuyos términos con vencimiento al final de la unidad de tiempo son de cuantía C_s, obteniéndose al multiplicar por m los términos de la renta fraccionada, de manera que $C_s = \frac{C_s}{m} \times m$. Gráficamente:

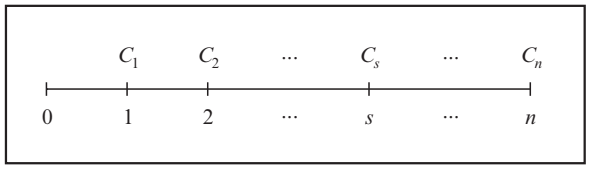


Figura 8.4.

En consecuencia, teniendo en cuenta que $\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = V_a$ es el valor actual de la renta entera correspondiente, se verifica que:

© Ediciones Pirámide

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

Por tanto, la expresión general anterior nos indica que el valor actual de una renta fraccionada pospagable se obtiene al multiplicar el factor $\frac{i}{j_{(m)}}$ por el valor actual de la renta correspondiente entera pospagable.

El valor final de la renta fraccionada verifica:

$$V_f^{(m)} = V_a^{(m)}(1+i)^n = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_f$$

8.2.2. Renta fraccionada, inmediata, temporal y prepagable

En este caso los términos vencen al principio de cada subperíodo. Por tanto, la renta prepagable sólo se diferencia de la renta pospagable en que los términos vencen un subperíodo de amplitud $1/m$ antes, tal y como se puede observar en los siguientes gráficos:

Renta prepagable:

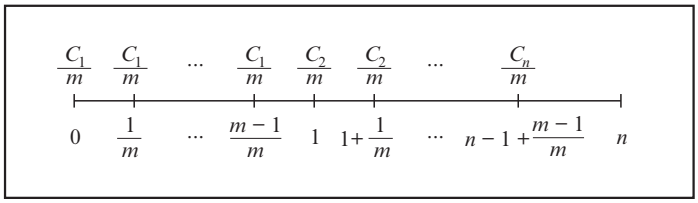


Figura 8.5.

Renta pospagable:

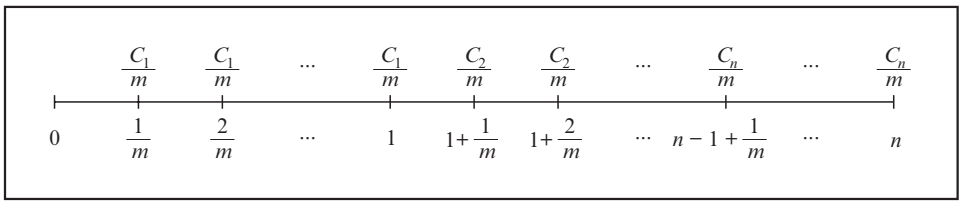


Figura 8.6.

© Ediciones Pirámide

Por tanto, podemos obtener el valor actual de la renta fraccionada prepagable capitalizando al tanto del subperíodo $i^{(m)}$ el valor actual de la renta pospagable:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)} \times (1 + i^{(m)})$$

En cuanto al valor final, tenemos:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = V_f^{(m)} \times (1 + i^{(m)})$$

8.2.3. Casos particulares

Tal y como hemos señalado, el valor actual de la una renta fraccionada viene dado por la expresión:

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{-s} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

Dependiendo de la modalidad de la renta entera correspondiente, tenemos distintos casos particulares; calcularemos su valor actual y final de acuerdo con las expresiones analizadas en las lecciones anteriores.

a) Renta temporal, inmediata y constante

Se trata de una renta fraccionada cuya renta correspondiente entera pospagable es de cuantía constante.

Si la renta fraccionada es pospagable, se verifica:

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i}$$

$$V_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_f = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times s_{\overline{n}|i}$$

Para la renta correspondiente unitaria, el valor actual y el valor final de la renta fraccionada los expresamos de la siguiente forma:

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times 1 \times a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

$$V_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times 1 \times s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

© Ediciones Pirámide

Si la renta fraccionada es prepagable, tenemos:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a \times (1 + i^{(m)}) = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)})$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_f \times (1 + i^{(m)}) = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times s_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)})$$

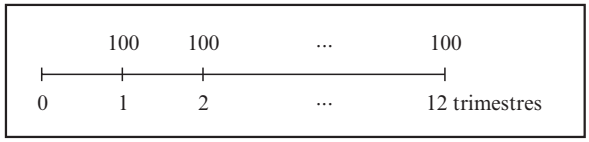
EJERCICIO 8.1

Sea una renta de 100 € trimestrales pospagables, de 3 años de duración, valorada al 4,04% anual. Determinar el valor actual de esta renta, considerándola como: *a*) entera trimestral; *b*) trimestral fraccionada de una renta entera anual, y *c*) trimestral fraccionada de una renta entera semestral.

Resolución

Vamos a determinar el valor actual para los tres apartados señalados, y comprobaremos que el resultado ha de ser el mismo.

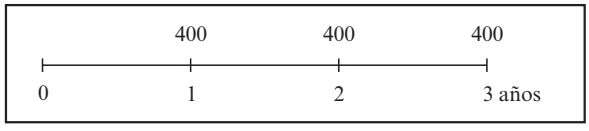
a) Si consideramos esta renta como una renta entera trimestral, temporal, inmediata y pospagable, podemos representarla gráficamente como:



Tenemos una renta de 12 términos trimestrales constantes de cuantía 100 €, siendo el tipo de interés trimestral equivalente al 4,04% anual, el 0,9950494%. Por lo que el valor actual de esta renta verifica: $V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$, y sustituyendo:

$$V_0 = 100 \times a_{\overline{12}|0,009950494} = 1.125{,}86\ €$$

b) Si la consideramos como una renta temporal, inmediata, pospagable, trimestral, fraccionada de una entera anual, la renta entera correspondiente es una renta anual, de 3 años de duración, con términos constantes de cuantía $C = \frac{C}{m} \times$ $\times\ m = 100 \times 4 = 400$ €, cuya representación gráfica es la siguiente:

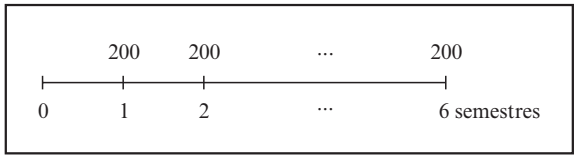


© Ediciones Pirámide

El valor actual de la renta fraccionada verifica: $V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i}$, y sustituyendo:

$$V_a^{(m)} = \frac{0{,}0404}{4 \times 0{,}009950494} \times 400 \times a_{\overline{3}|4{,}04\%} = 1.125{,}86\ €$$

c) Si la consideramos como una renta temporal, inmediata, pospagable, trimestral, fraccionada de una entera semestral, la renta entera correspondiente es una semestral, de 6 semestres de duración, con términos constantes de cuantía $C = \frac{C}{m} \times m = 100 \times 2 = 200\ €$, cuya representación gráfica es la siguiente:



El valor actual de la renta fraccionada verifica:

$$V_a^{(m)} = \frac{0{,}02}{2 \times 0{,}009950494} \times 200 \times a_{\overline{6}|2\%} = 1.125{,}86\ €$$

EJERCICIO 8.2

Determinar el valor actual y el valor final de una renta semestral prepagable, de cuantía 3.000 €, durante 5 años, al 8% anual capitalizable semestralmente.

Resolución

Considerándola como fraccionada de una anual, y teniendo en cuenta que el tipo de interés de valoración es el 4% semestral, cuyo equivalente anual es el 8,16%, el valor actual y el final verifican:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)}) = \frac{0{,}0816}{0{,}08} \times 3.000 \times 2 \times a_{\overline{5}|8{,}16\%} \times 1{,}04 = 25.305{,}99\ €$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times s_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)}) = \frac{0{,}0816}{0{,}08} \times 3.000 \times 2 \times s_{\overline{5}|8{,}16\%} \times 1{,}04 = 37.459{,}05\ €$$

También podemos calcular el valor final de la siguiente forma:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)} \times (1 + i)^n = 25.305{,}99 \times 1{,}0816^5 = 37.459{,}05\ €$$

© Ediciones Pirámide

b) Renta temporal, inmediata y de términos variables en progresión aritmética

Se trata de una renta fraccionada, cuya renta correspondiente entera pospagable es de términos variables en progresión aritmética.

Si la renta fraccionada es pospagable, tenemos:

$$V_a^{(m)} = A^{(m)}_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\, d)\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}}\left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right]$$

$$V_f^{(m)} = V_a^{(m)}(1 + i)^n$$

Si la renta fraccionada es prepagable, se tiene:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \ddot{A}^{(m)}_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)}) = \frac{i}{j_{(m)}}\left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \right.$$

$$\left. - \frac{d \times n}{i}\right](1 + i^{(m)})$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)} \times (1 + i)^n$$

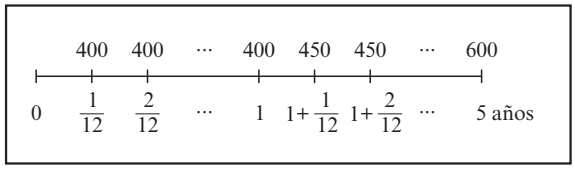
EJERCICIO 8.3

Un individuo tiene derecho a percibir durante un período de 5 años, al final de cada mes, una cuantía de 400 € durante el primer año, que se incrementa de año en año en 50 € mensuales. Para un tipo de interés del 3% anual, calcular el valor actual de todos los cobros que va a recibir.

Resolución

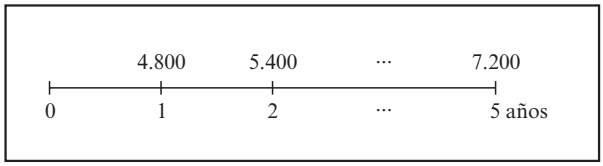
Tenemos una renta temporal, pospagable, con términos mensuales de cuantía constante dentro de cada año, pero que se incrementa de año en año en 50 € mensuales. Se trata de una renta mensual fraccionada, cuya renta correspondiente es una renta anual de 5 términos variables en progresión aritmética, de primer término $C_1 = 400 \times 12 = 4.800$; de segundo término $C_2 = 450 \times 12 = 5.400$, por lo que la razón es: $d = C_2 - C_1 = 5.400 - 4.800 = 600$, o bien $d = 50 \times 12 = 600$.

Gráficamente, podemos expresar la renta como:



© Ediciones Pirámide

Podemos representar gráficamente la renta correspondiente como:



Para calcular el valor actual según la expresión ya señalada, hemos de calcular el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 3% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,246627%. Por lo que sustituyendo, tenemos que:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{0{,}03}{12 \times 0{,}00246627}\left[\left(4.800 + 600 \times 5 + \frac{600}{0{,}03}\right)a_{\overline{5}|0{,}03} - \frac{600 \times 5}{0{,}03}\right] =$$

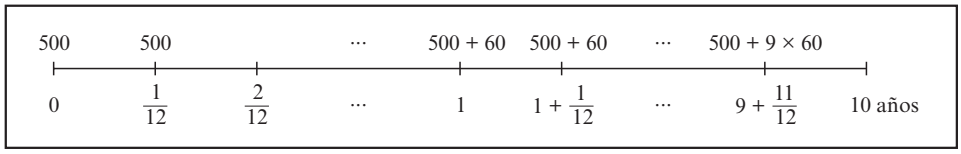
$$= 27{,}689{,}45\ €$$

EJERCICIO 8.4

Un inversor tiene derecho a percibir durante 10 años, al principio de cada mes, una cuantía de 500 € durante el primer año, que se incrementa anualmente en 60 € mensuales. Para un tipo de interés del 3% anual, calcular el valor actual de todos los cobros a recibir, así como su valor final.

Resolución

Tenemos una renta temporal, prepagable, con términos mensuales de cuantía constante dentro de cada año, que anualmente varían en progresión aritmética. Se trata de una renta mensual fraccionada de una anual. Gráficamente podemos expresar la renta como:



La renta correspondiente es una renta anual de 10 términos pospagables variables en progresión aritmética, de primer término $C_1 = 500 \times 12 = 6.000$; de segundo término $C_2 = 560 \times 12 = 6.720$, por lo que la razón es igual a $d = C_2 - C_1 = 6.720 - 6.000 = 720$, o bien $d = 60 \times 12 = 720$. El valor actual de esta renta, tal y como hemos indicado, se calcula según la expresión: $\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)}(1 + i^{(m)})$. Para

© Ediciones Pirámide

ello hemos de calcular el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 3% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,246627%. Por lo que, sustituyendo, tenemos que:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{0{,}03}{12 \times 0{,}00246627}\left[\left(6.000 + 720 \times 10 + \frac{720}{0{,}03}\right)a_{\overline{10}|0{,}03} - \frac{720 \times 10}{0{,}03}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}00246627 = 78.574{,}37\ €$$

El valor final de la renta o valor al final del año 10 es:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_{10}^{(m)} = 78.574{,}37 \times 1{,}03^{10} = 105.597{,}38\ €$$

---

c) Renta temporal, inmediata y de términos variables en progresión geométrica

Se trata de una renta fraccionada cuya renta correspondiente entera pospagables es de términos variables en progresión geométrica.

Si la renta fraccionada es pospagable, tenemos:

$$V_a^{(m)} = A^{(m)}_{(c_1,\, q)\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\, q)\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}}\left[C_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1 + i - q}\right]$$

Para el caso particular de $q = 1 + i$, se verifica: $V_a^{(m)} = \dfrac{i}{j_{(m)}} \times \dfrac{C_1 \times n}{1 + i}$

En cualquier caso, podemos obtener el valor final a través de la expresión: $V_f^{(m)} = V_a^{(m)} \times (1 + i)^n$.

Para la prepagable, se tiene:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \ddot{A}^{(m)}_{(c_1,\, q)\,\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\, q)\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)})$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)} \times (1 + i)^n$$

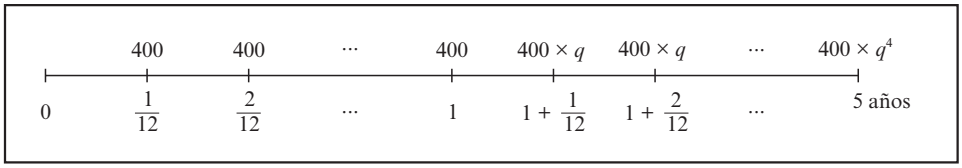
EJERCICIO 8.5

Un individuo compra una plaza de garaje, comprometiéndose a pagar durante 5 años, al final de cada mes, una cuantía de 400 € durante el primer año, y cada año el importe mensual se incrementará un 5%. Para un tipo de interés del 3% anual, calcular el valor actual de todos los pagos que va a realizar.

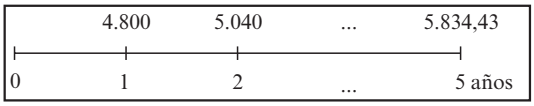
© Ediciones Pirámide

Resolución

Tenemos una renta temporal, pospagable, con términos mensuales de cuantía constante dentro de cada año, que anualmente varía en progresión geométrica. Se trata, pues, de una renta mensual fraccionada de una anual. Gráficamente, tenemos:



La renta correspondiente es una renta anual de 5 términos variables en progresión geométrica, de primer término $C_1 = 400 \times 12 = 4.800$; de segundo término $C_2 = 400 \times 1{,}05 \times 12 = 5.040$, por lo que la razón es igual a $q = \dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{5.040}{4.800} = 1{,}05$. Su representación gráfica es la siguiente:



Para calcular el valor actual, determinamos previamente el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 3% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,246627%. Por lo que, sustituyendo, tenemos:

$$V_a^{(m)} = \frac{0{,}03}{12 \times 0{,}00246627}\left[4.800\frac{1 - 1{,}05^5(1{,}03)^{-5}}{1{,}03 - 1{,}05}\right] = 24.554{,}90\ €$$

EJERCICIO 8.6

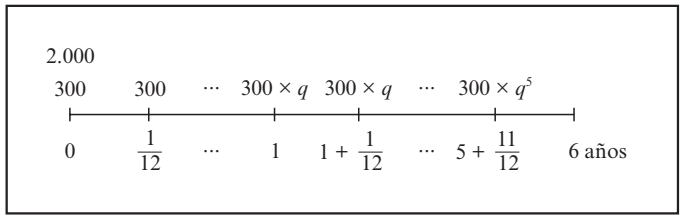
Un individuo adquiere un coche, comprometiéndose a pagar 2.000 € al contado y el resto a lo largo de 6 años, mediante cuantías constantes prepagables mensuales de 300 € durante el primer año, que se incrementan anualmente un 10%. Calcular el valor actual de todos los pagos que va a realizar, si el tipo de interés es del 5% anual.

Resolución

El valor actual de todos los pagos a realizar lo obtenemos a través de la suma de la cantidad entregada como entrada en el momento inicial y el valor actual de

© Ediciones Pirámide

una renta prepagable, con términos mensuales constantes que anualmente varían en progresión geométrica, tratándose, pues, de una renta mensual fraccionada de una anual. Gráficamente, tenemos:



Hemos de calcular el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 5% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,4074124%. El valor actual de toda la operación, tal y como hemos indicado, verifica:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = 2.000 + \frac{0,05}{12 \times 0,004074124}\left[300 \times 12\frac{1 - 1,1^6 \times 1,05^{-6}}{1,05 - 1,1}\right] \times$$

$$\times\ 1,004074124 = 25.804,71\ €$$

8.3. RENTAS CONTINUAS

De acuerdo con la clasificación de las rentas, teniendo en cuenta la medida o amplitud de los intervalos, hemos señalado que las **rentas continuas** son aquellas en las que la medida de los subintervalos en los que vencen los términos es infinitésima, es decir, tiende a cero. Por tanto, cuando en las rentas fraccionadas o de frecuencia m, el número de fraccionamientos tiende a infinito, tenemos las rentas continuas.

En este epígrafe analizaremos las rentas continuas derivadas de las rentas fraccionadas con fraccionamiento uniforme.

8.3.1. Renta continua pospagable

Podemos calcular el valor actual de esta renta como el límite cuando $m \to \infty$ de la renta fraccionada; expresando ésta en función de la renta entera correspondiente, queda:

$$\bar{V}_a = \lim_{m \to \infty} V_a^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta que en capitalización compuesta el $\lim_{m\to\infty} j_{(m)}$ coincide con el tanto instantáneo de capitalización, es decir, $\lim_{m\to\infty} j_{(m)} = log_e(1 + i) = k$, se verifica:

$$\bar{V}_a = \frac{i}{k} \times V_a$$

En la igualdad anterior, V_a es el valor actual de la renta correspondiente, la cual puede ser de términos constantes o variables.

Por tanto, la expresión general anterior nos indica que el valor actual de una renta continua se obtiene multiplicando el valor actual de la renta entera pospagable correspondiente por el factor $\frac{i}{k}$.

8.3.2. Renta continua prepagable

La relación entre el valor actual de una renta fraccionada prepagable y el de una pospagable, verifica:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)}(1 + i^{(m)}) = V_a^{(m)}(1 + i)^{1/m} = (1 + i)^{1/m}\frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

En consecuencia, el valor actual de una renta continua prepagable lo obtenemos como:

$$\bar{\ddot{V}}_a = \lim_{m\to\infty} \ddot{V}_a^{(m)} = \lim_{m\to\infty} (1 + i)^{1/m}\frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

Siendo $\lim_{m\to\infty} (1 + i)^{1/m} = (1 + i)^0 = 1$, tenemos: $\bar{\ddot{V}}_a = \frac{i}{k} \times V_a = \bar{V}_a$. Por consiguiente, en las rentas continuas coincide el valor actual de la renta pospagable y el de la prepagable.

Ejercicio 8.7

Calcular el valor actual de una renta diaria de 200 € de 5 años de duración, valorada al 4,04% anual.

Resolución

En la práctica, una renta diaria puede considerarse como una renta continua. Si consideramos la renta correspondiente anual, tenemos una renta constante de

© Ediciones Pirámide

5 años de duración, cuyos términos son de importe $C = 200 \times 365 = 73.000$ €, siendo el tanto instantáneo anual $k = log_e(1 + 0{,}0404) = 0{,}039605254$, verificándose:

$$\bar{V}_a = \frac{i}{k} \times V_a = \frac{i}{k} \times C \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_0 = \frac{0{,}0404}{0{,}039605254} \times$$

$$\times\ 73.000 \times a_{\overline{5}|4{,}04\%} = 331.132{,}18\ €$$

8.4. RENTAS DE PERIODICIDAD SUPERIOR A LA UNIDAD DE TIEMPO

En este apartado analizamos las rentas cuya periodicidad es superior a la unidad de tiempo que tomemos. Partimos de una renta temporal de n términos, inmediata, pospagable, de período uniforme, con términos constantes de cuantía C que vencen cada t períodos, cuya representación gráfica es la siguiente:

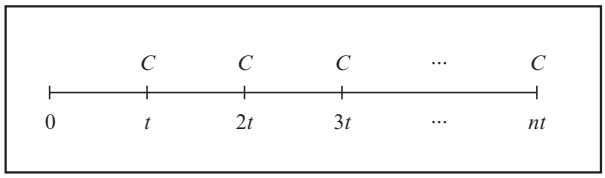


Figura 8.7.

El valor actual de esta renta, al tipo de interés i' de periodicidad t períodos, es el siguiente:

$$V_0 = C \times a_{\overline{n}|i'}$$

Vamos a deducir una expresión analítica para la citada renta cuyos términos vencen cada t años, en función del tipo de interés anual, sabiendo que se verifica: $(1 + i)^t = 1 + i'$. De manera que, desarrollando y sustituyendo en la ecuación anterior, se verifica:

$$V_0 = C \times a_{\overline{n}|i'} = C\frac{1 - (1 + i')^{-n}}{i'} = C\frac{1 - (1 + i)^{-t \times n}}{(1 + i)^t - 1} = C\frac{i}{(1 + i)^t - 1} \times$$

$$\times \frac{1 - (1 + i)^{-t \times n}}{i} = \frac{C}{s_{\overline{t}|i}} \times a_{\overline{nt}|i}$$

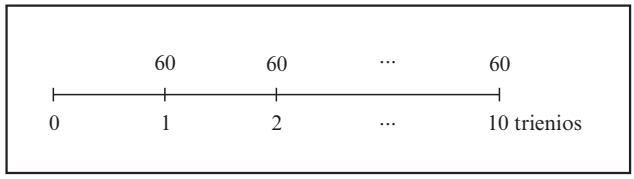
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 8.8

Calcular el valor actual de una renta pospagable de 10 términos trienales de 60 €, siendo el tipo de interés de valoración el 4% anual.

Resolución

Gráficamente, tenemos la siguiente renta:



Podemos calcular el valor actual, considerando una renta de 10 términos trienales pospagables valorados al tipo de interés trienal del 12,4864% equivalente al 4% anual dado. Por lo que se verifica:

$$V_0 = 60 \times a_{\overline{10}|12{,}4864\%} = 332{,}37\ €$$

También podemos calcular el valor actual de esta renta, valorándola al tipo anual del 4%, de acuerdo con la expresión señalada, verificándose:

$$V_0 = \frac{60}{s_{\overline{3}|4\%}} a_{\overline{10\times 3}|4\%} = 332{,}37\ €$$

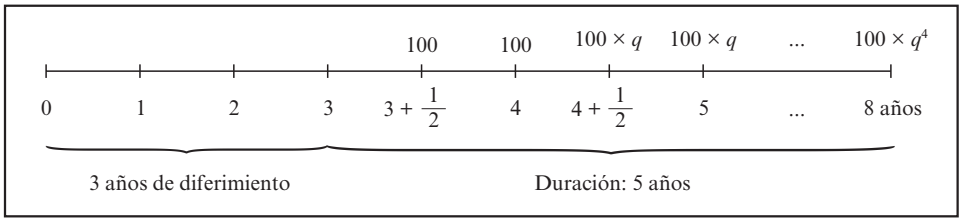
8.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor actual y el valor final de una renta pospagable, de 5 años de duración, diferida en 3 años, con términos semestrales constantes dentro de cada año que aumentan de año en año un 5%, siendo la cuantía de cada uno de los términos semestrales del primer año de 100 € y el tipo de interés el 4% anual.

Resolución

Tenemos una renta diferida, pospagable, semestral, fraccionada de una anual con términos variables en progresión geométrica. Su representación gráfica es la siguiente:

© Ediciones Pirámide



El valor actual de esta renta, tal y como hemos indicado, se calcula a través de la expresión:

$$V_0^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_3(1+i)^{-3} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^{-3} = \frac{i}{j_{(m)}} C_1 \frac{1-q^n-(1+i)^{-n}}{1+i-q}(1+i)^{-3}$$

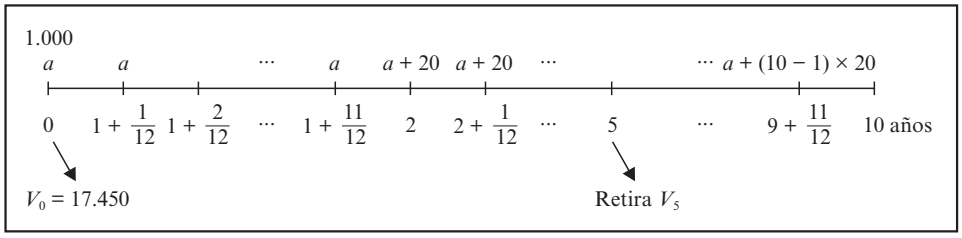
La renta correspondiente es una renta anual de 5 términos variables en progresión geométrica, de primer término $C_1 = 100 \times 2 = 200$ €, de razón $q = 1{,}05$. Hemos de calcular el tanto anual convertible semestralmente equivalente al 4% anual, siendo el tipo de interés semestral del 1,9803903%. Por lo que, sustituyendo, tenemos que:

$$V_0^{(m)} = \frac{0{,}04}{2 \times 0{,}019803903} \times 200 \times \frac{1-1{,}05^5 \times 1{,}04^{-5}}{1{,}04-1{,}05} \times (1{,}04)^{-3} = 880{,}03\ €$$

2. Una persona contrata un plan de ahorro de 10 años de duración, a un tipo de interés del 6% anual, cuyo valor actual hoy es 17.450 €. El plan de ahorro consiste en depositar de entrada 1.000 € y cada año una cuantía constante al principio de cada mes. Cada año la cuantía mensual aumenta en 20 €. Al final del quinto año decide retirar el montante constituido hasta ese momento y depositarlo en otra entidad, a un tipo de interés del 8% anual durante 5 años, entregando también una cuantía de 400 € al final de cada semestre de ese año, la cual aumentará anualmente un 10%. Calcular la cuantía que tendrá ahorrada al cabo de los 10 años desde el origen de la operación inicial.

Resolución

El gráfico del plan de ahorro inicial es:



© Ediciones Pirámide

Como las cuantías mensuales que entrega son constantes dentro de cada año, aumentando de año en año en 20 €, nos encontramos con una renta mensual prepagable, fraccionada de una correspondiente anual variable en progresión aritmética, de primer término $C_1 = 12 \times a$, y de razón $d = 12 \times 20 = 240$ €. Para calcular el valor actual necesitamos determinar el tipo mensual equivalente al 6% anual, que es el 0,4867551%, al que corresponde un tanto nominal del 5,8410612% anual acumulable mensualmente.

El valor actual verifica:

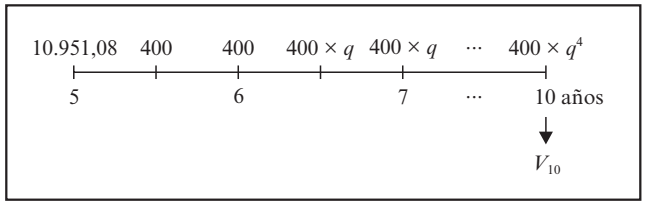
$$V_0 = 17.450 = 1.000 + \frac{0,06}{0,058410612}\left[\left(C_1 + 240 \times 10 + \frac{240}{0,06}\right)a_{\overline{10}|0,06} - \frac{240 \times 10}{0,06}\right] \times \\ \times 1,004867551$$

Despejando obtenemos el valor de $C_1 = 1.200$, por lo que cada imposición mensual prepagable del primer año fue de 100 €.

Al cabo de 5 años decide rescindir la operación, de manera que el montante constituido hasta ese momento lo podemos calcular como el valor final de las imposiciones realizadas durante tales años, o sea, el valor final del depósito inicial y el valor final de una renta fraccionada mensual prepagable, cuya correspondiente anual pospagable consta de 5 términos variables en progresión aritmética, siendo el primero $C_1 = 1.200$, y la razón $d = 12 \times 20 = 240$, verificándose:

$$V_5 = \left\{1.000 + \frac{0,06}{0,058410612}\left[\left(1.200 + 240 \times 5 + \frac{240}{0,06}\right)a_{\overline{5}|0,06} - \frac{240 \times 5}{0,06}\right] \times \right. \\ \left. 1,004867551\right\} \times 1,06^5 = 10.951,08$$

Dicho montante lo deposita en otra entidad, junto a una renta semestral pospagable, fraccionada de una anual variable en progresión geométrica, de primer término 800 y razón $q = 1,1$, cuyo gráfico es:



El valor final transcurridos los cinco años restantes, verifica:

$$V_{10} = 10.951,08 \times 1,08^5 + \frac{i}{j_{(m)}} \times S_{(C_1 = 800,\ q = 1,1)\overline{5}|0,08}$$

© Ediciones Pirámide

Siendo $\frac{i}{j_{(m)}} \times S_{(C_1=800,\ q=1,1)\overline{5}|0,08} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(C_1=800,\ q=1,1)\overline{5}|0,08} \times (1+i)^n$. Para calcular el valor final citado debemos determinar el tanto semestral equivalente al 8% anual, que es el 3,92305%, por lo que tenemos:

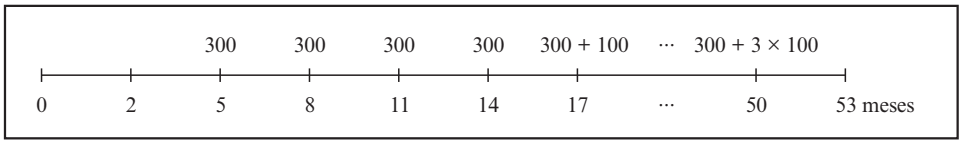
$$V_{10} = 10.951{,}08 \times 1{,}08^5 = \frac{0{,}08}{2 \times 0{,}0392305} \times 800 \times \frac{1 - 1{,}1^5 \times 1{,}08^{-5}}{1{,}08 - 1{,}1} \times$$

$$\times\ 1{,}08^5 = 21.848{,}78\ €$$

3. Una persona acepta en concepto de herencia recibir las siguientes rentas. A los 5 meses desde la aceptación de la herencia comienza a recibir durante los cuatro años siguientes cuantías trimestrales constantes cada año que aumentan de año en año en 100 €. El importe de las cuantías trimestrales del primer año ascienden a 300 €. Seis meses después de recibir la última cuantía trimestral, comienza a recibir cuantías mensuales que crecen un 10% semestralmente, durante 5 años. La cuantía constante mensual del primer semestre es de 500 €. Calcular el valor actual de la herencia para un tipo de interés del 4,04% anual.

Resolución

El valor actual de la herencia lo obtenemos como suma del valor actual de dos rentas. Vamos a calcular el valor actual de cada una de ellas por separado. Podemos representar gráficamente la primera renta:



Podemos valorar esta renta como una renta trimestral fraccionada de una anual variable en progresión aritmética, pospagable y diferida 2 meses, o bien como una prepagable diferida 5 meses. En cualquier caso, la renta correspondiente tiene como primer término $C_1 = 300 \times 4 = 1.200$, y razón $d = 100 \times 4 = 400$. Para calcular el valor actual necesitamos calcular los tipos trimestral y mensual equivalentes al 4,04% anual, que son el 0,9950494% y el 0,330589%, respectivamente.

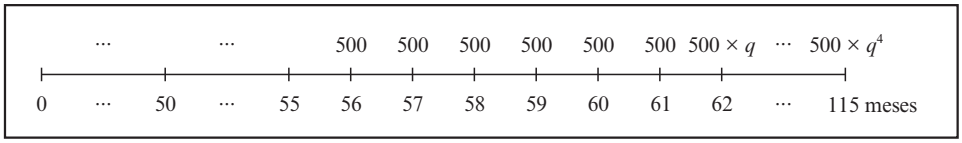
El valor actual de la primera renta verifica:

$$V_{0,1} = \frac{0{,}0404}{4 \times 0{,}009950494}\left[\left(1.200 + 400 \times 4 + \frac{400}{0{,}0404}\right) a_{\overline{4}|0,0404} - \frac{400 \times 4}{0{,}0404}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}00330589^{-2} = 6.509{,}76$$

© Ediciones Pirámide

Podemos representar gráficamente la segunda renta:



Podemos valorar esta renta como una renta mensual fraccionada de una semestral variable en progresión geométrica, pospagable y diferida 55 meses, cuya renta correspondiente es semestral y su primer término es $C_1 = 500 \times 6 = 3.000$, y la razón $d = 1{,}1$. Para calcular el valor actual necesitamos calcular el tipo semestral equivalente al 4,04% anual, que es el 2%.

El valor actual de la segunda renta verifica:

$$V_{0,2} = \frac{0{,}02}{6 \times 0{,}00330589} \times 3.000 \times \frac{1 - 1{,}1^{10} \times 1{,}02^{-10}}{1{,}02 - 1{,}1} \times 1{,}00330589^{-55} = 35.563{,}80$$

De modo que el valor actual total de la herencia es la suma de los valores actuales de las dos rentas anteriores; por tanto:

$$V_0 = 6.509{,}76 + 35.563{,}80 = 42.073{,}56 \text{ €}$$

4. Una persona va a financiar la compra de una vivienda y le ofrecen dos alternativas:

a) Entregar 60.000 € de entrada; una renta mensual prepagable de cuantías constantes dentro de cada año, y que anualmente aumentan un 3%, durante 20 años, siendo el importe de los términos mensuales del primer año 500 €, y una renta de 10.000 € al final de cada uno de los cinco primeros años de la operación.

b) Entregar 40.000 € de entrada; 40.000 € dentro de dos años; y el resto abonando durante 15 años, y comenzando en el año 3, cuantías mensuales pospagables de 200 € durante el primer semestre de dicho año, las cuales van aumentando por períodos semestrales a razón de un 10%.

Calcular qué alternativa le interesa al comprador, siendo el tipo de interés del 6% anual.

Resolución

Para ver qué alternativa resulta más conveniente, es preciso determinar el valor actual del conjunto de pagos de cada una. Así, la alternativa *a*) supone un

© Ediciones Pirámide

pago inicial de 60.000 €, más el valor actual de una renta mensual prepagable, fraccionada de una anual, de términos variables en progresión geométrica de razón 1,03 durante 20 años, y una renta anual de 10.000 € durante 5 años.

Teniendo en cuenta que el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual es el 0,4867551%, el valor actual de todos los capitales de esta alternativa es:

$$V_{o,\,a} = 60.000 + \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(C_1 = 500 \times 12,\ q = 1{,}03)\overline{20}|6\%} \times (1 + i^{(m)}) + 10.000 \times a_{\overline{5}|6\%} =$$

$$= 60.000 + \frac{0{,}06}{12 \times 0{,}004867551} \times 500 \times 12 \frac{1 - 1{,}03^{20} \times 1{,}06^{-20}}{1{,}06 - 1{,}03} \times 1{,}004867551 +$$

$$+ 10.000 \times a_{\overline{5}|6\%} = 192.307{,}05\ €$$

La alternativa *b*) consta del valor actual de dos pagos de 40.000 €, más el valor actual de una renta diferida en 2 años, mensual y pospagable, fraccionada de una semestral variable en progresión geométrica de razón 1,1 y de duración 30 semestres. Para calcular el valor actual de dicha renta es preciso determinar el tipo de interés semestral y el mensual equivalentes al 6% anual, los cuales son, respectivamente, 2,9563014% y 0,4867551%. En consecuencia, el valor actual de todos los capitales de la alternativa *b*) es:

$$V_{o,\,b} = 40.000 + 40.000 \times 1{,}06^{-2} + \frac{i^{(m)}}{j_{(k)}} \times A_{(C_1 = 200 \times 6,\ q = 1{,}1)\overline{30}|i^{(m)} = 2{,}9563014\%} \times 1{,}06^{-2} =$$

$$= 75.599{,}86 + \frac{0{,}029563014}{6 \times 0{,}004867551} \times 200 \times 6 \frac{1 - 1{,}1^{30} \times 1{,}029563014^{-30}}{1{,}029563014 - 1{,}1} \times$$

$$\times 1{,}06^{-2} = 172.001{,}91\ €$$

En consecuencia, le resulta más ventajosa la alternativa *b*).

5. A una persona le ofrecen dos alternativas para financiar la ortodoncia de su hijo:

a) Pagar 100 € al final de cada mes durante el primer año, aumentando cada año dicha cuantía mensual en 30 €, durante 4 años.

b) Empezar a pagar dentro de 3 meses 250 € bimestrales, que anualmente aumentan en un 5%, durante 4 años.

Determinar qué alternativa le interesa más si el tipo de interés es el 5 % anual.

Resolución

Para ver qué alternativa resulta más conveniente, es preciso determinar el valor actual del conjunto de pagos de cada una.

© Ediciones Pirámide

En la alternativa *a*) calculamos el valor actual de una renta pospagable mensual, fraccionada de una anual, cuya renta correspondiente es de cuatro términos variables en progresión aritmética de razón $d = 30 \times 12 = 360$. El tipo de interés mensual equivalente al 5% anual es el 0,4074124%. El valor actual verifica:

$$V_0 = \frac{0{,}05}{12 \times 0{,}004074124}\left[\left(1.200 + 360 \times 4 + \frac{360}{0{,}05}\right)a_{\overline{4}|5\%} - \frac{360 \times 4}{0{,}05}\right] = 6.230{,}53\ €$$

En la alternativa *b*) tenemos una renta pospagable bimestral, fraccionada de una anual, cuya renta correspondiente es una de cuatro términos variables en progresión geométrica, de razón $q = 1 + i = 1{,}05$, diferida 1 mes. El tipo de interés bimestral equivalente al 5% anual es el 0,8164846%. El valor actual verifica:

$$V_0 = \frac{0{,}05}{6 \times 0{,}008164846} \times \frac{250 \times 6 \times 4}{1{,}05} \times 1{,}004074124^{-1} = 5.808{,}54\ €$$

Por tanto, le interesa más la alternativa *b*), al ser su valor actual menor.

6. Un padre, al nacer su hijo, con el objetivo de disponer de un capital para pagar sus estudios universitarios, decide comenzar a imponer cuantías constantes al final de cada trimestre, las cuales irán aumentando en 100 € cada dos años. De este modo, la cuantía de cada trimestre de los dos primeros años es de 300 €, la cuantía de cada trimestre de los dos siguientes años es de 400 €, y así sucesivamente. Calcular el valor del capital que dispondrá cuando el hijo cumpla 18 años, para un tipo de interés del 5% anual.

Resolución

Las imposiciones constituyen una renta trimestral pospagable, fraccionada de una bienal variable en progresión aritmética. La renta correspondiente es una bienal de 9 términos. La cuantía del primer término es $C_1 = 300 \times 8 = 2.400$, y la razón vale $d = 100 \times 8 = 800$. Los tipos de interés a utilizar son: el 10,25% bienal, y el 1,2272234% trimestral, equivalentes al 5% anual. Además, el tanto bienal acumulable trimestralmente es $j_{(m)} = 8 \times 0{,}012272234 = 0{,}098177872$.

El valor final al cabo de 18 años (9 bienios) verifica:

$$V_{18} = A^{(m)}_{(c_1 = 2.400,\ d = 800)\overline{9}|10{,}25\%} \times 1{,}05^{18} =$$

$$= \frac{0{,}1025}{0{,}098177872}\left[\left(2.400 + 800 \times 9 + \frac{800}{0{,}1025}\right)a_{\overline{9}|10{,}25\%} - \frac{800 \times 9}{0{,}1025}\right] \times 1{,}05^{18}$$

Al realizar operaciones, se obtiene 72.871,59 €.

© Ediciones Pirámide

8.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor actual y el valor al final del año 20, para un tipo de interés del 6% anual, de una renta prepagable de términos cuatrimestrales de 15 años de duración. Los términos son constantes dentro de cada año, incrementándose de un año a otro en un 4%, siendo el término cuatrimestral del tercer año igual a 32.448 €.

2. Sea una renta prepagable de 8 años de duración, anticipada 7 años y términos trimestrales constantes dentro de cada semestre, variando de semestre en semestre en 30 €. Sabiendo que la cuantía de cada uno de los términos trimestrales del cuarto semestre es 390 € y que el tipo de interés es el 2,5% semestral, calcular el valor actual y el valor final.

3. Una persona impone en cierta entidad financiera un capital de 60.000 € a un tipo de interés del 5% anual durante 10 años. Al cabo de dos años, decide retirar al principio de cada cuatrimestre una cantidad constante dentro de cada año, aumentando dicha cantidad en un 2% anual, retirándose en el primer año 100 € cada cuatrimestre. Calcular el montante del que dispondrá al final de la operación.

4. Una persona recibe en concepto de herencia las siguientes rentas:

a) Una renta de 6 términos de 3.000 € bienales, que comenzará a recibir al año de la aceptación de la herencia.
b) Una renta de cuantías trimestrales constantes cada año, que aumentan de año en año en 100 €, que comenzará a recibir inmediatamente y durante 10 años.

Sabiendo que el valor actual de la herencia en el momento de la aceptación es de 48.193,75 €, calcular el importe de la primera cuantía de la renta trimestral para un tipo de valoración del 4% anual.

5. Una persona alquila una vivienda con un contrato por tiempo indefinido por el que paga 900 € al principio de cada mes durante el primer año, cantidad mensual que aumenta en 100 € de año en año. Determinar, para un tipo de interés del 3,5% anual, cuál sería la cuantía que debería entregar al principio de cada mes del primer año, si las cuantías mensuales constantes de cada año aumentasen un 2% de año en año.

© Ediciones Pirámide

PARTE TERCERA
Operaciones de constitución

9 Operaciones de constitución

OBJETIVOS

- Conocer los conceptos básicos de las operaciones de constitución de capitales.
- Entender la problemática de las operaciones con imposiciones prepagables.
- Plantear y resolver la problemática en cada uno de los casos particulares.
- Construir el cuadro de constitución de una operación con imposiciones prepagables.

SUMARIO

9.1. Concepto y modalidades.
9.2. Planteamiento general de las operaciones con imposiciones prepagables.
9.3. Casos particulares.
9.4. Cuadro de constitución.
9.5. Ejercicios y problemas resueltos.
9.6. Ejercicios y problemas propuestos.

9.1. CONCEPTO Y MODALIDADES

Las operaciones de constitución tienen por objeto la formación de un capital (C_n, t_n) mediante la entrega de n capitales financieros o imposiciones, cuyas cuantías $a_1, a_2, ..., a_n$ vencen, respectivamente, en los intervalos temporales (t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n).

En estas operaciones el acreedor inicial o prestamista, que denominamos impositor, entrega al deudor inicial o prestatario un conjunto de capitales, denominados términos constitutivos, con la finalidad de constituir o formar un determinado capital. Por tanto, se trata de una operación financiera de prestación múltiple y contraprestación única en la que se distinguen dos modalidades según el vencimiento de los términos constitutivos:

a) Operaciones de constitución con imposiciones prepagables en las que los términos constitutivos vencen al inicio de cada intervalo temporal.

b) Operaciones de constitución con imposiciones pospagables en las que los términos constitutivos vencen al final de cada intervalo temporal.

Dado que las imposiciones prepagables son las más habituales en las operaciones de constitución, dedicamos esta lección al estudio de las mismas.

9.2. PLANTEAMIENTO GENERAL DE LAS OPERACIONES CON IMPOSICIONES PREPAGABLES

Sea una operación con términos constitutivos y tipos de interés variables, en la que los términos a_s vencen al principio del respectivo período, indicándonos C_n^- el capital constituido al final de la operación. Gráficamente:

© Ediciones Pirámide

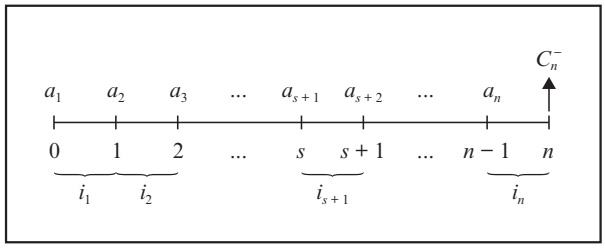


Figura 9.1.

En las operaciones de constitución, C_s^- nos indica el capital constituido o formado hasta el final del período s. Se trata de un saldo a la izquierda, es decir, calculado antes del vencimiento del término constitutivo a_{s+1}.

a) Ecuación dinámica de constitución

Esta ecuación nos permite calcular el capital constituido al final de un determinado período en función del capital constituido en el período inmediatamente anterior. Así, en el momento inicial de la operación no hay capital alguno constituido, por lo que $C_0^- = 0$. Al final del primer período, el capital formado o constituido está integrado por el término constitutivo inicialmente entregado, así como por los intereses producidos en dicho período, por lo que se verifica: $C_1^- = a_1(1 + i_1)$. Al finalizar el segundo período, el capital formado será el del período precedente junto al segundo término constitutivo entregado y los intereses producidos por ambos en dicho período: $C_2^- = (C_1^- + a_2)(1 + i_2)$. Y así sucesivamente hasta el último período temporal en el que se verifica que $C_n^- = (C_{n-1}^- + a_n)(1 + i_n)$.

En general, la **ecuación dinámica de constitución** o ecuación que permite determinar el capital formado al final del período s o saldo a la izquierda de s, es:

$$C_s^- = (C_{s-1}^- + a_s)(1 + i_s)$$

Si despejamos en la ecuación dinámica de constitución, llegamos a:

$$C_s^- - C_{s-1}^- = (C_{s-1}^- + a_s)\, i_s + a_s$$

La expresión $C_s^- - C_{s-1}^-$ es la diferencia entre los capitales constituidos en el período s y en el período $(s - 1)$, y recibe el nombre de **cuota de constitución** del período s, que denominamos Δ_s^-, indicándonos la variación del capital constituido durante dicho período:

$$\Delta_s^- = C_s^- - C_{s-1}^-$$

© Ediciones Pirámide

La expresión $(C_{s-1}^{-} + a_s)\, i_s$ que recoge los intereses generados en el período s por el capital constituido C_{s-1}^{-} y el término constitutivo a_s, recibe el nombre de **cuota de interés,** la cual denominamos I_s^{-}:

$$I_s^{-} = (C_{s-1}^{-} + a_s)\, i_s$$

De manera que la cuota de constitución Δ_s^{-}, se obtiene como la suma del término constitutivo a_s y la cuota de interés del período s, I_s^{-}, es decir:

$$\Delta_s^{-} = a_s + I_s^{-}$$

b) Ecuación de equivalencia financiera

Sabemos que en toda operación financiera se debe verificar la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación. Teniendo en cuenta que la prestación en una operación de constitución con imposiciones prepagables es $\{(a_1, 0), (a_2,1), ..., (a_n, n-1)\}$, y la contraprestación es $\{(C_n^{-}, n)\}$, se puede plantear la ecuación de equivalencia financiera en cualquier momento de la operación.

Si se plantea la ecuación de equivalencia financiera en el origen, utilizando la capitalización compuesta, tenemos:

$$a_1 + a_2(1 + i_1)^{-1} + a_3(1 + i_2)^{-1}(1 + i_1)^{-1} + ... + a_n(1 + i_{n-1})^{-1}(1 + i_{n-2})^{-1} ... (1 + i_1)^{-1} = \\ = C_n^{-}(1 + i_n)^{-1}(1 + i_{n-1})^{-1} ... (1 + i_1)^{-1}$$

O bien de forma sintética:

$$a_1 + \sum_{s=2}^{n} a_s \prod_{r=1}^{s-1}(1 + i_r)^{-1} = C_n^{-} \prod_{r=1}^{n}(1 + i_r)^{-1}$$

En el supuesto de que el tipo de interés de la operación de constitución sea constante, la ecuación precedente es:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s(1 + i)^{-(s-1)} = C_n^{-}(1 + i)^{-n}$$

Si se plantea la ecuación de equivalencia financiera al final de la operación, tenemos:

$$a_1(1 + i_1)(1 + i_2) ... (1 + i_n) + a_2(1 + i_2)(1 + i_3) ... (1 + i_n) + ... + a_n(1 + i_n) = C_n^{-}$$

© Ediciones Pirámide

O bien de forma sintética:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{r=s}^{n} (1 + i_r) = C_n^-$$

En el caso de que el tipo de interés sea constante, la ecuación de equivalencia anterior es:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s (1 + i)^{n-(s-1)} = C_n^-$$

c) Saldo financiero o reserva matemática

El saldo financiero de la operación de constitución en un determinado momento s, C_s^-, recibe el nombre de capital constituido, y se calcula como un saldo a la izquierda, es decir, antes del vencimiento del término constitutivo a_{s+1}.

Para obtener el saldo por el método retrospectivo, tenemos:

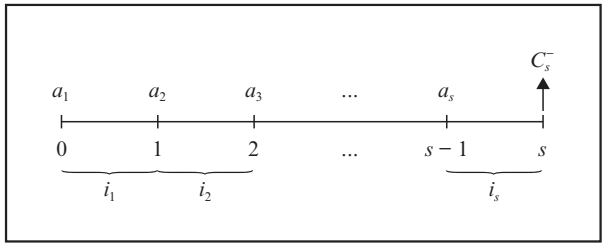


Figura 9.2.

$$C_s^- = a_1(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_s) + a_2(1 + i_2)(1 + i_3) \ldots (1 + i_s) + \ldots + a_s(1 + i_s) =$$

$$= \sum_{h=1}^{s} a_h \prod_{r=h}^{s} (1 + i_r)$$

En el supuesto de que el tipo de interés sea constante, tenemos:

$$C_s^- = \sum_{h=1}^{s} a_h (1 + i)^{s-(h-1)}$$

Para utilizar el método prospectivo, vamos a representar gráficamente la operación pendiente de vencimiento al final del período s:

© Ediciones Pirámide

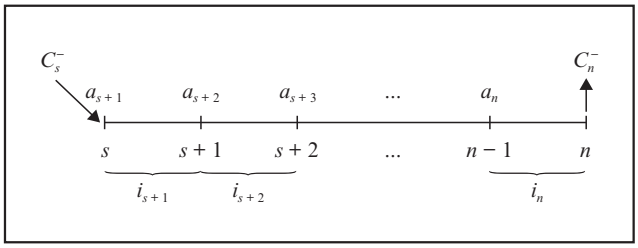


Figura 9.3.

$$C_s^- = C_n^-(1 + i_n)^{-1}(1 + i_{n-1})^{-1} \dots (1 + i_{s+1})^{-1} - [a_{s+1} + a_{s+2}(1 + i_{s+1})^{-1} + \dots + a_n(1 + i_{n-1})^{-1}(1 + i_{n-2})^{-1} \dots (1 + i_{s+1})^{-1}]$$

O bien:

$$C_s^- = C_n^- \prod_{k=1}^{n-s}(1 + i_{s+k})^{-1} - \left[a_{s+1} + \sum_{h=s+2}^{n} a_h \prod_{r=s+1}^{h-1}(1 + i_r)^{-1}\right]$$

Si el tipo de interés es constante, tenemos:

$$C_s^- = C_n^-(1 + i)^{-(n-s)} - \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + i)^{-(h-1)}$$

***d*) Capital pendiente de constituir**

El capital pendiente de constituir transcurrido s períodos, M_s^-, se obtiene como la diferencia entre el capital que debe estar constituido al final de la operación y el formado hasta el final del período s:

$$M_s^- = C_n^- - C_s^-$$

Sabemos que las cuotas de constitución verifican:

$$\begin{aligned}
\Delta_1^- &= C_1^- - C_0^- \\
\Delta_2^- &= C_2^- - C_1^- \\
\Delta_3^- &= C_3^- - C_2^- \\
&\vdots \\
\Delta_s^- &= C_s^- - C_{s-1}^- \\
&\vdots \\
\Delta_n^- &= C_n^- - C_{n-1}^-
\end{aligned}$$

© Ediciones Pirámide

Al sumar las primeras s expresiones, y teniendo en cuenta que $C_0^- = 0$, se obtiene que el capital constituido al final del período s es la suma aritmética de las primeras s cuotas de constitución:

$$\sum_{h=1}^{s} \Delta_h^- = C_s^-$$

Y si sumamos las n cuotas de constitución, llegamos a la consecuencia lógica de que el capital constituido al final de la operación es la suma aritmética de las n cuotas de constitución:

$$\sum_{h=1}^{n} \Delta_h^- = C_n^-$$

Al sustituir en la ecuación $M_s^- = C_n^- - C_s^-$, se llega a:

$$M_s^- = \sum_{h=1}^{n} \Delta_h^- - \sum_{h=1}^{s} \Delta_h^- \Rightarrow M_s^- = \sum_{h=1}^{n-s} \Delta_{s+h}^-$$

Por tanto, el capital pendiente de constituir al final del período s se puede obtener también a través de la suma aritmética de las últimas $(n - s)$ cuotas de constitución. Además, la relación que se debe cumplir entre el capital pendiente de constituir en dos períodos consecutivos es:

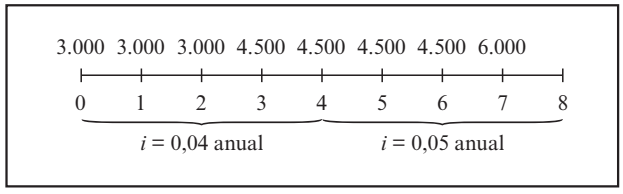
$$M_{s+1}^- = M_s^- - \Delta_{s+1}^-$$

EJERCICIO 9.1

Un individuo pretende formar un capital dentro de 8 años realizando las siguientes imposiciones prepagables: durante los tres primeros años entrega 3.000 euros, en los cuatro años siguientes entrega 4.500 euros y en el último año entrega 6.000 euros. Sabiendo que el tipo de interés es el 4% anual para los 4 primeros años y el 5% para los restantes años, calcular el capital constituido al final de la operación y el capital pendiente de constituir al final del sexto año.

Resolución

El gráfico de la operación es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

El capital formado al final de los 8 años es:

$$C_8^- = 3.000 \times \ddot{s}_{\overline{3}|0,04} \times 1,04 \times 1,05^4 + 4.500 \times s_{\overline{2}|0,04} \times 1,05^4 + 4.500 \times \ddot{s}_{\overline{2}|0,05} \times$$
$$\times 1,05 + 6.000 \times 1,05 = 39.940,73 \text{ €}$$

El capital constituido al final del año 6 a través del método retrospectivo se obtiene a través de la expresión:

$$C_6^- = 3.000 \times \ddot{s}_{\overline{3}|0,04} \times 1,04 \times 1,05^2 + 4.500 \times s_{\overline{2}|0,04} \times 1,05^2 + 4.500 \times 1,05 = 26.013,14$$

De manera que el capital pendiente de constituir al final del año 6 es:

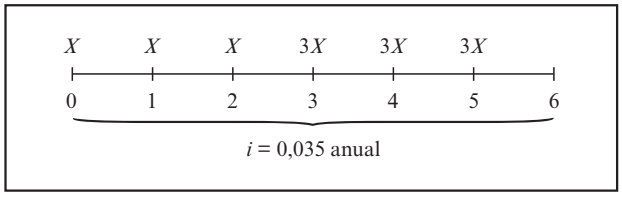
$$M_6^- = C_8^- - C_6^- = 39.940,73 - 26.013,14 = 13.927,59 \text{ €}$$

EJERCICIO 9.2

Una persona desea constituir un capital dentro de 6 años, mediante imposiciones prepagables de cuantía X en los tres primeros años y $3X$ en los restantes años. Sabiendo que el tipo de interés es del 3,5% anual y que el capital constituido al final del quinto año es 11.715,12 €, calcular la cuota de constitución del sexto año.

Resolución

El gráfico de la operación es:



El capital constituido al final del año 5 es el valor final de los cinco primeros términos constitutivos:

$$C_5^- = X \times \ddot{s}_{\overline{3}|0,035} \times 1,035^2 + 3X \times \ddot{s}_{\overline{2}|0,035} = 11.715,12 \Rightarrow X = 1.200$$

Por tanto, el importe de los tres primeros términos es 1.200 euros, siendo los tres restantes términos constitutivos de cuantía 3.600 euros.

© Ediciones Pirámide

La cuota de constitución del último año es Δ_6^- y se obtiene como $C_6^- - C_5^-$. Por ello, vamos a calcular previamente el capital constituido al final de la operación a través de la ecuación dinámica:

$$C_6^- = (C_5^- + a_6)(1 + i) \quad \Rightarrow \quad C_6^- = (11.715{,}12 + 3.600)\,1{,}035 = 15.851{,}15$$

Finalmente determinamos la cuota de constitución Δ_6^-:

$$\Delta_6^- = C_6^- - C_5^- = 15.851{,}15 - 11.715{,}12 \quad \Rightarrow \quad \Delta_6^- = 4.136{,}03\ €$$

Otra forma de obtener la cuota pedida es la siguiente:

$$\Delta_6^- = a_6 + I_6^- = a_6 + (C_5^- + a_6)\,i$$

$$\Delta_6^- = 3.600 + (11.715{,}12 + 3.600)\,0{,}035 = 4.136{,}03\ €$$

9.3. CASOS PARTICULARES

En función de las cuantías de los términos constitutivos o bien de las correspondientes a las cuotas de constitución, se pueden distinguir distintos casos particulares. Así, y en primer lugar, se expone el método de constitución con términos constitutivos constantes, y en segundo lugar se muestra el método de constitución con cuotas de constitución constantes.

9.3.1. Términos constitutivos constantes

En este caso particular se verifica: $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$, y si además consideramos que el tipo de interés también es constante, el gráfico de la operación es:

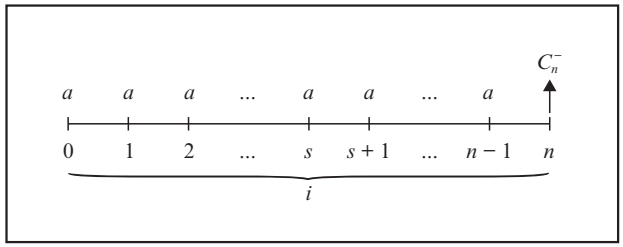


Figura 9.4.

© Ediciones Pirámide

La ecuación de equivalencia financiera al final del período n es:

$$C_n^- = a \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

El capital constituido al final del período s puede obtenerse por cualquiera de los métodos mencionados. Por el método retrospectivo se verifica:

$$C_s^- = a \times \ddot{s}_{\overline{s}|i}$$

El capital constituido hasta el final del período s por el método prospectivo es:

$$C_s^- = C_n^-(1 + i)^{-(n-s)} - a \times \ddot{a}_{\overline{n-s}|i}$$

El capital constituido hasta el final del período s, de acuerdo con la ecuación dinámica de constitución, verifica:

$$C_s^- = (C_{s-1}^- + a)(1 + i)$$

Un aspecto importante a considerar en este caso particular es deducir cómo varían las cuotas de constitución. Teniendo en cuenta que para dos períodos consecutivos se verifica:

$$C_{s+1}^- = (C_s^- + a)(1 + i)$$
$$C_s^- = (C_{s-1}^- + a)(1 + i)$$

Restando ambas expresiones, se llega a:

$$C_{s+1}^- - C_s^- = (C_s^- - C_{s-1}^-)(1 + i)$$

Ahora bien, la expresión $C_{s+1}^- - C_s^-$ nos indica la cuota de constitución del período $(s + 1)$, y $C_s^- - C_{s-1}^-$ la del período s, por lo que se obtiene:

$$\Delta_{s+1}^- = \Delta_s^-(1 + i)$$

En consecuencia, si los términos constitutivos son constantes y también lo es el tipo de interés, las cuotas de constitución varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

Además, sabemos que es posible obtener el capital constituido al final de la operación como suma aritmética de las n cuotas de constitución. En consecuencia, como varían en progresión geométrica, se verifica:

$$C_n^- = \Delta_1^- + \Delta_1^-(1 + i) + \Delta_1^-(1 + i)^2 + \ldots + \Delta_1^-(1 + i)^{n-1} =$$
$$= \Delta_1^-[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1}]$$

© Ediciones Pirámide

La expresión entre corchetes constituye el valor final de una renta unitaria, inmediata, pospagable, de n términos valorada al tipo i, por lo que finalmente se tiene:

$$C_n^- = \Delta_1^- \times s_{\overline{n}|i}$$

De forma análoga se obtendría el capital constituido al final del período s:

$$C_s^- = \Delta_1^- \times s_{\overline{s}|i}$$

EJERCICIO 9.3

A través de imposiciones constantes anuales prepagables se desea formar al cabo de 8 años un capital de 60.000 €, en una entidad financiera que abona un tipo de interés constante del 4% anual. Determinar: *a*) cuantía del término constitutivo; *b*) capital pendiente de constituir una vez transcurridos 5 años; *c*) si la operación fuese a 12 años, ¿cuál es la cuota de constitución del año 9?

Resolución

a) La cuantía del término constitutivo anual es:

$$C_8^- = 60.000 = a \times \ddot{s}_{\overline{8}|0,04} \quad \Rightarrow \quad a = 6.261,22 \text{ €}$$

b) El capital pendiente de constituir al final del año 5 se determina a través de la expresión $M_5^- = C_8^- - C_5^-$, siendo el capital constituido al final de dicho año: $C_5^- = 6.261,22 \times \ddot{s}_{\overline{5}|0,04} = 35.269,30$. Por tanto, tenemos:

$$M_5^- = 60.000 - 35.269,30 = 24.730,70 \text{ €}$$

c) La cuota de constitución Δ_9^- se puede obtener a partir de la cuota Δ_1^-, verificándose la siguiente relación: $\Delta_9^- = \Delta_1^-(1 + i)^8$. Por lo que es preciso determinar previamente la primera cuota de constitución, teniendo en cuenta que la duración de la operación es de 12 años: $C_n^- = 60.000 = \Delta_1^- \times s_{\overline{12}|0,04} \Rightarrow \Delta_1^- = 3.993,13$. En consecuencia, el importe de la novena cuota de constitución es: $\Delta_9^- = 3.993,13 \times \times 1,04^8 = 5.464,87$ €.

EJERCICIO 9.4

Se desea constituir un capital mediante 10 aportaciones anuales prepagables de 2.500 euros en una entidad financiera que ofrece un tipo de interés fijo del 5% anual. Calcular: *a*) capital constituido al final de la operación; *b*) cuota de interés del año 6; *c*) cuota de constitución del año 8.

© Ediciones Pirámide

Resolución

a) El capital constituido al final de la operación es:

$$C_{10}^{-} = 2.500 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,05} = 33.016,97 \text{ €}$$

b) La cuota de interés correspondiente al sexto año se obtiene a través de la siguiente expresión: $I_6^{-} = (C_5^{-} + a)\,i$. Por ello, vamos a calcular previamente el capital constituido al final del año 5:

$$C_5^{-} = 2.500 \times \ddot{s}_{\overline{5}|0,05} = 14.504,78$$

Por tanto, la cuota de interés es:

$$I_6^{-} = (14.504,78 + 2.500)\,0,05 = 850,24$$

c) Para obtener la cuota de constitución Δ_8^{-}, vamos a calcular primeramente el importe de la primera cuota Δ_1^{-}:

$$\Delta_1^{-} = C_1^{-} - C_0^{-} = a_1(1 + i) - 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1^{-} = 2.500 \times 1,05 = 2.625$$

Al verificarse la relación $\Delta_8^{-} = \Delta_1^{-}(1 + i)^7$, obtenemos: $\Delta_8^{-} = 2.625 \times 1,05^7 = 3.693,64$ €.

9.3.2. Cuotas de constitución constantes

En este caso particular se verifica: $\Delta_1^{-} = \Delta_2^{-} = \ldots = \Delta_n^{-} = \Delta^{-}$, de manera que el capital constituido al final de la operación es:

$$C_n^{-} = \sum_{h=1}^{n} \Delta_h^{-} = n \times \Delta^{-} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{-} = \frac{C_n^{-}}{n}$$

El capital constituido al final del período *s* se obtiene a través de la expresión:

$$C_s^{-} = \sum_{h=1}^{s} \Delta_h^{-} = s \times \Delta^{-}$$

Y el capital pendiente de constituir al final del período *s* es:

$$M_s^{-} = C_n^{-} - C_s^{-} = (n - s)\,\Delta^{-}$$

© Ediciones Pirámide

Si añadimos la hipótesis de tipos de interés constantes, es posible obtener la ley de variación de los términos constitutivos a través de la expresión de la ecuación dinámica de constitución para dos períodos consecutivos:

$$C_{s+1}^{-} = (C_s^{-} + a_{s+1})(1 + i)$$
$$C_s^{-} = (C_{s-1}^{-} + a_s)(1 + i)$$

Al restar ambas expresiones, obtenemos:

$$C_{s+1}^{-} - C_s^{-} = (C_s^{-} - C_{s-1}^{-} + a_{s+1} - a_s)(1 + i)$$

Al sustituir $C_{s+1}^{-} - C_s^{-}$ y $C_s^{-} - C_{s-1}^{-}$ por Δ^{-}, tenemos:

$$\Delta^{-} = (\Delta^{-} + a_{s+1} - a_s)(1 + i)$$

De donde se obtiene la siguiente relación:

$$a_{s+1} = a_s - \frac{\Delta^{-} \times i}{1 + i}$$

Poniéndose de manifiesto que los términos constitutivos varían en progresión aritmética de razón $-\dfrac{\Delta^{-} \times i}{1 + i}$.

Por otro lado, sabemos que la primera cuota de constitución verifica:

$$\Delta^{-} = a_1 + I_1^{-} = a_1 + (C_0^{-} + a_1)\, i = a_1(1 + i)$$

En consecuencia, el primer término constitutivo de la operación es:

$$a_1 = \frac{\Delta^{-}}{1 + i}$$

Y dado que los términos constitutivos varían en progresión aritmética, se verifica para el último: $a_n = a_1 - (n - 1)\dfrac{\Delta^{-} \times i}{1 + i}$, por lo que se llega a:

$$a_n = \frac{\Delta^{-}}{1 + i} - (n - 1)\frac{\Delta^{-} \times i}{1 + i} = \frac{\Delta^{-} - n \times \Delta^{-} \times i + \Delta^{-} \times i}{1 + i} = \frac{\Delta^{-}[1 - i(n - 1)]}{1 + i}$$

Para que la operación de constitución sea viable, el último término constitutivo ha de ser positivo, por lo que se ha de verificar:

$$\frac{\Delta^{-}[1 - i(n - 1)]}{1 + i} > 0 \quad \Rightarrow \quad i(n - 1) < 1$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 9.5

Se pretende formar un capital de 30.000 € mediante la entrega de 6 imposiciones anuales prepagables. Sabiendo que el tipo de interés es el 6% anual y que las cuotas de constitución son constantes, calcular: *a*) cuota de constitución constante; *b*) término constitutivo del último año; *c*) cuota de interés del tercer año.

Resolución

a) La cuota constante de constitución es:

$$\Delta^- = \frac{C_n^-}{n} = \frac{30.000}{6} = 5.000\ €$$

b) El término constitutivo del sexto año se puede obtener a través de la relación siguiente: $a_6 = a_1 + d(6 - 1)$, siendo la razón $d = -\dfrac{\Delta^- \times i}{1 + i}$. Por ello, vamos a calcular el término constitutivo del primer año y la razón de la progresión:

$$a_1 = \frac{\Delta^-}{1 + i} = \frac{5.000}{1 + 0{,}06} = 4.716{,}98;\ d = -\frac{50.000 \times 0{,}06}{1 + 0{,}06} = -283{,}02$$

El importe del término a_6 es:

$$a_6 = 4.716{,}98 - 283{,}02\,(6 - 1) = 3.301{,}88\ €$$

c) La cuota de interés correspondiente al año 3 verifica: $I_3^- = (C_2^- + a_3)\,i$. Teniendo en cuenta que el capital constituido al final del año 2 es $C_2^- = 5.000 \times 2 = 10.000$, y que el término constitutivo del tercer año importa $a_3 = 4.716{,}98 - 283{,}02 \times 2 = 4.150{,}94$, nos queda:

$$I_3^- = (10.000 + 4.150{,}94)\,0{,}06 = 849{,}06\ €$$

9.4. CUADRO DE CONSTITUCIÓN

En el cuadro de constitución se recogen los diversos valores que a lo largo del tiempo van tomando las distintas magnitudes que intervienen en el proceso de constitución de un capital. La estructura del cuadro de constitución es la siguiente:

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés	Término constitutivo	Cuota de interés	Cuota de constitución	Capital constituido	Capital pendiente de constituir
0	—	a_1	—	—	—	$M_0^- = C_n^-$
1	i_1	a_2	I_1^-	Δ_1^-	C_1^-	M_1^-
2	i_2	a_3	I_2^-	Δ_2^-	C_2^-	M_2^-
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	i_{n-1}	a_n	I_{n-1}^-	Δ_{n-1}^-	C_{n-1}^-	M_{n-1}^-
n	i_n	—	I_n^-	Δ_n^-	C_n^-	0

Para completar el cuadro de constitución se han tener en cuenta las siguientes relaciones ya analizadas:

Cuota de interés: $I_s^- = (C_{s-1}^- + a_s)\, i_s$; cuota de constitución: $\Delta_s^- = a_s + I_s^-$; capital constituido: $C_s^- = C_{s-1}^- + \Delta_s^-$; capital pendiente de constituir: $M_s^- = C_n^- - C_s^-$.

EJERCICIO 9.6

Elaborar el cuadro de constitución de una operación en la que se entregan 5 imposiciones prepagables de cuantía 1.000 €, sabiendo que el tipo de interés para los dos primeros años es el 2% anual y para los restantes años el 3% anual.

Resolución

Para elaborar el cuadro es preciso previamente determinar las distintas cuantías que en el mismo intervienen. Así, sabiendo que el término constitutivo es de 1.000 €, el capital constituido al final de la operación es:

$$C_5^- = 1.000 \times \ddot{s}_{\overline{2}|0,02} \times 1,03^3 + 1.000 \times \ddot{s}_{\overline{3}|0,03} = 5.435,08$$

Para el primer año se verifica: cuota de interés: $I_1^- = (C_0^- + a_1)\, i_1 = 1.000 \times \times 0,02 = 20$; cuota de constitución: $\Delta_1^- = a_1 + I_1^- = 1.000 + 20 = 1.020$; capital constituido: $C_1^- = C_0^- + \Delta_1^- = 0 + 1.020 = 1.020$. Para el capital pendiente de constituir tenemos: $M_1^- = C_5^- - C_1^- = 5.435,08 - 1.020 = 4.415,08$.

Para el segundo año, se verifica:

$$I_2^- = (C_1^- + a_2)\, i_2 = (1.020 + 1.000) \times 0,02 = 40,40$$

$$\Delta_2^- = a_2 + I_2^- = 1.000 + 40,40 = 1.040,40$$

$$C_2^- = C_1^- + \Delta_2^- = 1.020 + 1.040,40 = 2.060,40$$

$$M_2^- = C_5^- - C_2^- = 5.435,08 - 2.060,40 = 3.374,68$$

© Ediciones Pirámide

El cuadro de constitución completo se muestra a continuación:

Período	Tipo de interés	Término constitutivo	Cuota de interés	Cuota de constitución	Capital constituido	Capital pendiente de constituir
0	—	1.000,00	—	—	—	5.435,08
1	0,020	1.000,00	20,00	1.020,00	1.020,00	4.415,08
2	0,020	1.000,00	40,40	1.040,40	2.060,40	3.374,68
3	0,030	1.000,00	91,81	1.091,81	3.152,21	2.282,87
4	0,030	1.000,00	124,57	1.124,57	4.276,78	1.158,30
5	0,030	—	158,30	1.158,30	5.435,08	0,00

9.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea una operación de constitución con imposiciones prepagables cuya duración es de 10 años. El término constitutivo del primer año es de 3.846,15 € y el tipo de interés constante es el 4% anual. Sabiendo que las 5 primeras cuotas de constitución son de cuantía X y que las restantes son de cuantía $2X$, calcular el capital pendiente de constituir al final del octavo año.

Resolución

Sabiendo que se verifica en el primer año: $\Delta_1^- = a_1(1 + i)$, se puede calcular el importe de la primera cuota de constitución:

$$\Delta_1^- = 3.846{,}15 \times 1{,}04 = 4.000$$

Por consiguiente, las primeras 5 cuotas de constitución tienen un importe de 4.000 euros y las restantes 5 cuotas ascienden a 8.000 euros. Dado que la suma aritmética de todas las cuotas de constitución ha de ser igual al capital constituido al final de la operación, tenemos:

$$C_n^- = C_{10}^- = 4.000 \times 5 + 8.000 \times 5 = 60.000$$

El capital constituido al final del octavo año se obtiene como la suma aritmética de las primeras ocho cuotas de constitución:

$$C_8^- = 4.000 \times 5 + 8.000 \times 3 = 44.000$$

© Ediciones Pirámide

De manera que el capital pendiente de constituir en el año 8 se puede obtener como:

$$M_8^- = C_{10}^- - C_8^- = 60.000 - 44.000 = 16.000 \text{ €}$$

Otra forma de obtener M_8^- es: $M_8^- = \Delta_9^- + \Delta_{10}^- = 16.000$ €.

2. Con el fin de disponer dentro de 6 años de cierto capital, se pacta una operación de constitución prepagable con cuotas de constitución constantes. Calcular el capital constituido al final de la operación y la cuota de interés del penúltimo año, sabiendo que el tipo de interés es el 10% anual y que el antepenúltimo término constitutivo asciende a 1.590,91 €.

Resolución

Al tratarse de una operación con cuotas de constitución constantes, los términos constitutivos varían en progresión aritmética de razón $-\dfrac{\Delta^- \times i}{1+i}$, por lo que se tiene que $a_4 = a_1 + d(4-1)$. Teniendo en cuenta que el primer término constitutivo verifica $a_1 = \dfrac{\Delta^-}{1+i}$, se tiene:

$$1.590,91 = \frac{\Delta^-}{1,10} - (4-1)\frac{\Delta^- \times 0,1}{1,10} \quad \Rightarrow \quad \Delta^- = 2.500$$

Por lo que el capital constituido al final del sexto año es: $C_6^- = 6 \times 2.500 = 15.000$ €.

La cuota de interés del quinto año se obtiene a través de la expresión $I_5^- = (C_4^- + a_5)\,i$. El capital constituido en el año 4 es $C_4^- = 2.500 \times 4 = 10.000$, y el término constitutivo del año 5 se puede obtener a partir del inmediato anterior a través de la relación $a_5 = a_4 - \dfrac{\Delta^- \times i}{1+i}$, por lo que tenemos $a_5 = 1.590,91 - \dfrac{2.500 \times 0,1}{1,1} = 1.363,64$. Por tanto, la cuota de interés es:

$$I_5^- = (10.000 + 1.363,64)\,0,1 = 1.136,36 \text{ €}$$

3. Se pretende constituir un capital con imposiciones prepagables trimestrales durante 6 años. Sabiendo que el tipo de interés es el 1% trimestral y que la octava cuota de constitución asciende a 162,43 €, calcular el término constitutivo constante y el capital constituido al final del cuarto año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Nos encontramos ante una operación de constitución con 24 términos constitutivos constantes y tipo de interés constante, por lo que las cuotas de constitución varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)$, verificándose:

$$A_8^- = \Delta_1^-(1 + i)^7 \quad \Rightarrow \quad 162{,}43 = \Delta_1^- \times 1{,}01^7 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1^- = 151{,}50$$

Una vez obtenido el importe de la primera cuota de constitución, se puede calcular el capital constituido al final de los 6 años:

$$C_n^- = \Delta_1^- \times s_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad C_n^- = 151{,}50 \times s_{\overline{24}|0{,}01} = 4.086{,}48$$

El término constitutivo se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera al final de la operación:

$$C_{24}^- = 4.086{,}48 = a \times \ddot{s}_{\overline{24}|0{,}01} \quad \Rightarrow \quad a = 150\ €$$

El capital constituido al final del cuarto año calculado a través del método retrospectivo es:

$$C_{16}^- = 150 \times \ddot{s}_{\overline{16}|0{,}01} = 2.614{,}57\ €$$

4. Se desea constituir un capital mediante 20 imposiciones anuales prepagables que varían a razón de un 10% anual acumulativo. Sabiendo que la cuantía del tercer término constitutivo asciende a 968 euros y que el tipo de interés es el 6% anual, calcular el importe de la cuota de interés del año 15.

Resolución

Los términos constitutivos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}1$, por lo que la relación entre el término del año 3 y el del año 1 es:

$$a_3 = a_1 \times q^2 \quad \Rightarrow \quad 968 = a_1 \times 1{,}10^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 800$$

La cuota de interés correspondiente al año 15 se obtiene a través de la expresión $I_{15}^- = (C_{14}^- + a_{15})\, i$, siendo el término constitutivo del año 15:

$$a_{15} = a_1 \times q^{14} \quad \Rightarrow \quad a_{15} = 800 \times 1{,}10^{14} = 3.038{,}00$$

Como los términos constitutivos varían en progresión geométrica, el capital constituido al final del año 14 se obtiene como el valor final de una renta prepa-

© Ediciones Pirámide

gable de 14 términos anuales variables en progresión geométrica, cuya expresión general es:

$$C_{14}^{-} = \ddot{S}_{(a_1,\,q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(a_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^n = a_1 \times \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \times (1+i)(1+i)^n$$

Al sustituir, tenemos:

$$C_{14}^{-} = 800\left[\frac{1 - 1{,}10^{14}(1+0{,}06)^{-14}}{1+0{,}06-1{,}10}\right]1{,}06^{15} = 32.575{,}80$$

De manera que la mencionada cuota de interés es:

$$I_{15}^{-} = (32.575{,}80 + 3.038)\,0{,}06 = 2.136{,}83\ €$$

5. Se desea obtener un capital al cabo de 7 años mediante una operación de constitución con términos anuales prepagables y cuotas de constitución que aumentan anualmente en un 5%. Elaborar el cuadro de constitución de dicha operación, sabiendo que la primera cuota de constitución asciende a 2.500 euros y que el tipo de interés anual es el 4% para los dos primeros años y el 5% para los restantes.

Resolución

El capital constituido al final de la operación es la suma de las 7 cuotas de constitución, las cuales varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}05$. Para ello se utiliza la expresión $S = \dfrac{\Delta_1^{-} - \Delta_7^{-} \times q}{1-q}$, que recoge la suma de términos de una progresión geométrica de razón q. Al sustituir, y teniendo en cuenta que $\Delta_7^{-} = 2.500 \times 1{,}05^6 = 3.350{,}24$, se obtiene:

$$C_7^{-} = \frac{2.500 \times 3.350{,}24 \times 1{,}05}{1-1{,}05} = 20.355{,}04$$

Para el primer año se tiene que el capital constituido es: $C_1^{-} = \Delta_1^{-} = 2.500$; el capital pendiente de constituir es: $M_1^{-} = C_7^{-} - C_1^{-} = 20.355{,}04 - 2.500 = 17.855{,}04$; el término constitutivo verifica $a_1 = \dfrac{\Delta^{-}}{1+i} = \dfrac{2.500}{1+0{,}04} = 2.403{,}85$, y la cuota de interés es:

$$I_1^{-} = \Delta_1^{-} - a_1 = 2.500 - 2.403{,}85 = 96{,}15$$

© Ediciones Pirámide

Para el año 2, tenemos:

$$\Delta_2^- = \Delta_1^- \times 1{,}05 = 2.625$$

$$C_2^- = \Delta_1^- + \Delta_2^- = 2.500 + 2.625 = 5.125$$

$$M_2^- = C_7^- - C_2^- = 20.355{,}04 - 5.125 = 15.230{,}04$$

$$C_2^- = (C_1^- + a_2)(1 + i_2) \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2.427{,}88$$

$$I_2^- = \Delta_2^- - a_2 = 2.625 - 2.427{,}88 = 197{,}12$$

Y así sucesivamente en los restantes años, por lo que el cuadro de constitución es:

Período	Tipo de interés	Término constitutivo	Cuota de interés	Cuota de constitución	Capital constituido	Capital pendiente de constituir
0	—	2.403,85	—	—	—	20.355,04
1	0,04	2.427,88	96,15	2.500,00	2.500,00	17.855,04
2	0,04	2.380,95	197,12	2.625,00	5.125,00	15.230,04
3	0,05	2.380,95	375,30	2.756,25	7.881,25	12.473,79
4	0,05	2.380,95	513,11	2.894,06	10.775,31	9.579,73
5	0,05	2.380,96	657,81	3.038,77	13.814,08	6.540,96
6	0,05	2.380,96	809,75	3.190,71	17.004,79	3.350,25
7	0,05	—	969,29	3.350,25	20.355,04	0,00

6. Una persona que acaba de cumplir 55 años de edad concierta un plan de jubilación en una entidad financiera que ofrece un tipo de interés del 7% anual. Desea obtener un capital de 60.000 euros dentro de 10 años mediante la entrega de imposiciones prepagables anuales variables en progresión aritmética de razón 500 euros. Elaborar el cuadro de constitución de dicha operación.

Resolución

La cuantía del término constitutivo del primer año se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$60.000 \times 1{,}07^{-10} = \left[\left(a_1 + 500 \times 10 + \frac{500}{0{,}07}\right) a_{\overline{10}|0{,}07} - \frac{500 \times 10}{0{,}07}\right] \times 1{,}07 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 2.085{,}52$$

© Ediciones Pirámide

El cuadro de constitución es el siguiente:

Período	Tipo de interés	Término constitutivo	Cuota de interés	Cuota de constitución	Capital constituido	Capital pendiente de constituir
0	—	2.085,52	—	—	—	60.000,00
1	0,07	2.585,52	145,99	2.231,50	2.231,50	57.768,50
2	0,07	3.085,52	337,19	2.922,71	5.154,21	54.845,79
3	0,07	3.585,52	576,78	3.662,30	8.816,51	51.183,49
4	0,07	4.085,52	868,14	4.453,66	13.270,16	46.729,84
5	0,07	4.585,52	1.214,90	5.300,41	18.570,58	41.429,42
6	0,07	5.085,52	1.620,93	6.206,44	24.777,02	35.222,98
7	0,07	5.585,52	2.090,38	7.175,89	31.952,91	28.047,09
8	0,07	6.085,52	2.627,69	8.213,21	40.166,12	19.833,88
9	0,07	6.585,52	3.237,61	9.323,13	49.489,25	10.510,75
10	0,07	—	3.925,23	10.510,75	60.000,00	0,00

7. Una persona que actualmente tiene una edad de 60 años ha realizado durante 10 años imposiciones semestrales constantes y prepagables en una entidad financiera que le remuneraba al 4% anual, con la finalidad de tener constituido un capital de 500.000 euros llegado el momento de su jubilación. En estos momentos, faltándole 5 años para jubilarse, la entidad financiera le modifica el tipo de interés al 4,8% anual capitalizable mensualmente. El inversor desea ahora realizar aportaciones mensuales en lugar de semestrales. ¿Cuál ha de ser la cuantía mensual prepagable que tiene que desembolsar si su objetivo varía y desea tener constituido un capital de 600.000 euros?

Resolución

El tipo de interés semestral equivalente al 4% anual es $i^{(m)}$ =0,019803903, por lo que la cuantía semestral que ha de aportar durante 15 años para alcanzar un capital de 500.000 euros a la edad de 65 años es:

$$C_{65}^{-} = 500.000 = a \times \ddot{s}_{\overline{30}|0,019803903} \quad \Rightarrow \quad a = 12.122,78$$

Al transcurrir 10 años desde que se inició la operación de constitución, el capital constituido hasta este momento actual, en el que el inversor tiene una edad de 60 años, asciende a:

$$C_{60}^{-} = 12.122,78 \times \ddot{s}_{\overline{20}|0,019803903} = 299.799,09$$

© Ediciones Pirámide

Ahora se modifican las condiciones de la operación, variando el tipo de interés futuro, que pasa a ser del 0,4% mensual, el capital final a obtener, que es de 600.000 €, y la periodicidad de los términos constitutivos, que pasa a ser mensual. Por tanto, la ecuación de equivalencia financiera es:

$$C_{65}^{-} = 600.000 = 299.799{,}09 \times 1{,}004^{60} + a' \times \ddot{s}_{\overline{60}|0{,}4\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 3.224{,}80 \text{ €}$$

8. Se desea constituir un capital en 15 años mediante la entrega de términos constitutivos mensuales prepagables. En el primer año el importe de las aportaciones es de 600 euros, en el segundo año las cuantías mensuales son de 700 euros, en el tercer año las cuantías mensuales ascienden a 800 euros, y así sucesivamente hasta el final de la operación. Sabiendo que el tipo de interés es del 3% anual, calcular el montante constituido al final del año 15 y la cuota de interés del primer mes del año 5.

Resolución

Los términos constitutivos forman una renta mensual prepagable y fraccionada de una anual variable en progresión aritmética, por lo que el capital constituido al final del año 15 se obtiene como el valor final de dicha renta:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)}(1+i)^n = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a(1+i^{(m)})(1+i)^n$$

Sabiendo que el tipo de interés mensual equivalente al 3% anual es 0,246627%; que el primer término anual de la renta correspondiente asciende a 7.200 euros, y que la razón es 1.200, el valor actual de la renta fraccionada prepagable es:

$$\ddot{V}_0^{(m)} = \frac{0{,}03}{0{,}00246627 \times 12}\left[\left(7.200 + 1.200 \times 15 + \frac{1.200}{0{,}03}\right)a_{\overline{15}|0{,}03} - \frac{1.200 \times 15}{0{,}03}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}00246627$$

$$\ddot{V}_0^{(m)} = 181.238{,}58$$

Por lo que el capital constituido al final del año 15 (180 meses) es:

$$C_{180}^{-} = \ddot{V}_0^{(m)}(1+0{,}03)^{15} = 282.363{,}80$$

La cuota de interés del primer mes del año 5, o sea, del mes 49, verifica:

$$I_{49}^{-} = (C_{48}^{-} + a_{49})\,0{,}00246627$$

© Ediciones Pirámide

El capital constituido al final del año 4 (mes 48) se determina como el valor final de una renta mensual prepagable, fraccionada de una anual, de términos variables en progresión aritmética, por lo que se verifica:

$$C_{48}^{-} = \frac{0{,}03}{0{,}00246627 \times 12}\left[\left(7.200 + 1.200 \times 4 + \frac{1.200}{0{,}03}\right)a_{\overline{4}|3\%} - \frac{1.200 \times 4}{0{,}03}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}00246627 \times 1{,}03^4$$

Se obtiene $C_{48}^{-} = 38.073{,}28$ €. Teniendo en cuenta que el término mensual a abonar en cada mes del año 5 es de 1.000 €, se cumple:

$$I_{49}^{-} = (38.073{,}28 + 1.000)\,0{,}00246627 = 96{,}37 \text{ €}$$

9.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se desea constituir un capital dentro de 10 años con los siguientes términos constitutivos anuales prepagables: durante los cinco primeros años, 12.000 euros y en los restantes, 18.000 euros. El tipo de interés es el 2% anual para los tres primeros años, el 3% para los siguientes cuatro años y el 4% anual para los tres últimos años. Determinar la cuota de interés correspondiente al año 10.

2. Se pretende constituir un capital en 8 años con la entrega de imposiciones semestrales constantes y prepagables, siendo el tipo de interés de la operación el 8,16% anual. Calcular la cuota de constitución del último semestre, sabiendo que el capital constituido al final del segundo año es de 9.728,67 €.

3. Con la finalidad de formar un capital se realizan imposiciones trimestrales prepagables durante 5 años. El tipo de interés es el 4% trimestral y las cuotas de constitución son constantes. Sabiendo que capital pendiente de constituir al final del tercer año es de 104.000 €, determinar el importe del sexto término constitutivo trimestral.

4. Un individuo pretende constituir un capital de 175.000 euros mediante 12 imposiciones prepagables anuales, las cuales aumentan de año en año en 1.500 euros. Sabiendo que el tipo de interés es del 5% anual, calcular el importe de la cuota de constitución del año 9.

5. Se desea constituir dentro de 15 años un capital de 90.000 € mediante la entrega de imposiciones trimestrales prepagables constantes dentro de cada año y que aumentan de año en año en un 3% acumulativo. Calcular el término cons-

© Ediciones Pirámide

titutivo trimestral correspondiente al último año, sabiendo que el tipo de interés es el 5% anual.

6. Se desea constituir un capital dentro de 7 años mediante una operación de constitución con términos anuales prepagables y cuotas de constitución que aumentan anualmente en un 10% acumulativo. Calcular el capital constituido al final de la operación, sabiendo que en el primer año el tipo de interés es el 4% anual y la cuota de interés correspondiente asciende a 230,77 €.

7. Sea una operación de constitución de duración 25 años en la que se desea obtener un capital de 75.000 € mediante la entrega de imposiciones mensuales constantes y prepagables en una entidad financiera que ofrece un tipo de interés del 3% anual. Si transcurridos 8 años, la entidad aumenta el tipo de interés al 5% anual, ¿cuál ha de ser el importe del nuevo término constitutivo mensual prepagable si se desea constituir el mismo capital final de 75.000 €?

8. Con la finalidad de constituir un capital de 36.000 € en 12 años, un individuo realiza aportaciones trimestrales prepagables. Las imposiciones son constantes dentro de cada año, aumentando de año en año en un 2% acumulativo. Sabiendo que la entidad financiera ofrece un tipo de interés del 6% anual, calcular la cuota de constitución correspondiente al primer trimestre del sexto año.

© Ediciones Pirámide

PARTE CUARTA
Operaciones de amortización

10 Operaciones de amortización de préstamos

OBJETIVOS

- Describir las operaciones de amortización de préstamos y enumerar las modalidades de préstamos, destacando sus características básicas.
- Realizar un planteamiento general del estudio de una operación de préstamo de contraprestación múltiple e intereses vencidos.
- Confeccionar el cuadro de amortización de una operación de préstamo.

SUMARIO

10.1. Concepto.
10.2. Modalidades.
10.3. Estudio general de las operaciones de amortización de préstamos con contraprestación múltiple e intereses vencidos.
10.4. Cuadro de amortización.
10.5. Ejercicios y problemas resueltos.
10.6. Ejercicios y problemas propuestos.

10.1. CONCEPTO

Los **préstamos** son operaciones financieras de amortización en las que **un sujeto denominado prestamista se compromete a entregar un determinado capital (C_0, 0) a otro sujeto denominado prestatario, el cual a su vez se compromete a devolverlo en un período (0, n) y a pagar los intereses que se generen**. Por tanto, podemos decir que amortizar un préstamo implica devolver el capital recibido C_0 y pagar los intereses correspondientes.

De la definición anterior se desprende que en toda operación de préstamo intervienen dos sujetos, prestamista y prestatario:

— El **prestamista** es el acreedor inicial, es decir, la persona que concede el préstamo de cuantía C_0 y, por ello, percibirá a cambio los intereses correspondientes y la devolución de dicho capital.

— El **prestatario** es el deudor inicial, esto es, la persona que recibe el préstamo de cuantía C_0 y a cambio abonará los intereses que se generen y devolverá el capital recibido.

De acuerdo con lo expuesto, en esta operación financiera la prestación está constituida por la cuantía entregada por el prestamista al inicio de la operación, momento 0, y la contraprestación está compuesta por los importes entregados por el prestatario, esto es, la devolución del capital recibido y el pago de los intereses.

Tal y como hemos descrito la operación de préstamo, se trata de una operación pura, ya que las cuantías que un sujeto desembolsa las percibe íntegramente el otro y, además, el deudor abona capitales sólo en concepto de intereses y devolución del principal o cuantía recibida en préstamo.

© Ediciones Pirámide

Sin embargo, cuando, vinculados a la operación pura, existan otros capitales que no correspondan ni a intereses ni a devolución del principal, estaremos ante una operación con características comerciales. Por ejemplo, operaciones de préstamos que conllevan comisiones bancarias, gastos de formalización, impuestos, etc.

10.2. MODALIDADES

En términos generales, las operaciones de préstamo las podemos agrupar en dos grandes bloques: préstamos elementales o simples y préstamos de contraprestación múltiple.

10.2.1. Préstamos elementales o simples

Los préstamos elementales o simples son operaciones financieras en las que tanto la prestación como la contraprestación están integradas por un solo capital. En función del momento del tiempo en el que el prestatario ha de abonar los intereses, podemos distinguir entre préstamos simples con intereses pospagables y préstamos simples con intereses anticipados.

a) Los **préstamos simples con intereses pospagables** son aquellas operaciones de préstamo en las que al final de la operación el prestatario devolverá el capital pactado y abonará los intereses acumulados hasta dicho momento.

Para valorar dicha operación financiera, los sujetos pueden pactar cualquier ley financiera, aunque normalmente utilizan la ley de valoración de capitalización compuesta. En este caso, la operación es:

Prestación: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación: $\{(C_n, n)\}$

Figura 10.1.

Donde C_0 es el principal o la cuantía nominal del préstamo, C_n el montante que ha de abonar el prestatario al final de la operación, i el tipo de interés unitario y n la duración de la operación, estando n e i expresados en la misma unidad de tiempo.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 10.1

Una persona obtiene un préstamo a 10 años de 60.000 € al 3,50% de interés anual a amortizar a través de un solo pago al finalizar su duración. Calcular la cuantía que debe pagar el prestatario, señalando cuánto corresponde al abono de los intereses.

Resolución

Transcurridos los 10 años de duración del préstamo, el prestatario abonará los intereses acumulados hasta dicho momento y devolverá el principal recibido, siendo la cuantía total a pagar la siguiente: $C_{10} = 60.000(1 + 0{,}035)^{10} = 84.635{,}93$ €. De la citada cuantía, 24.635,93 € corresponden al abono de los intereses acumulados: $I = 84.635{,}93 - 60.000 = 24.635{,}93$.

b) Los **préstamos simples con intereses anticipados o prepagables** son aquellas operaciones elementales de préstamo que se pactan con abono anticipado de intereses. En consecuencia, el prestatario debe pagar el precio financiero o los intereses del préstamo al principio de la operación, es decir, en el momento en el que el prestamista le cede el principal o nominal del préstamo C_0^*. Por tanto, la cuantía neta o líquida C_0 que percibe el prestatario en el origen de la operación es el resultado de detraer a la cuantía nominal del préstamo C_0^* los intereses anticipados I^*, esto es: $C_0 = C_0^* - I^*$, poniéndose de manifiesto que la cuantía neta que percibe el prestatario es inferior a la cuantía nominal del préstamo.

En consecuencia, al final de la operación el único pago que debe realizar el prestatario es el correspondiente a la devolución del capital pactado, es decir, el nominal del préstamo: $C_n = C_0^*$. En este caso, la operación financiera de préstamo es:

Prestación neta: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación neta: $\{(C_n, n)\}$

Figura 10.2.

Si esta operación se pacta de acuerdo con la ley financiera de capitalización compuesta, la cuantía neta es: $C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$. Ahora bien, en la expresión pre-

© Ediciones Pirámide

cedente el tipo de interés utilizado es un tipo pospagable, pero estas operaciones se pactan fijando un tipo de interés prepagable o anticipado i^*. Por tanto, teniendo en cuenta la expresión analizada en la lección 4, $(1 - i^*)(1 + i) = 1$, que relaciona el tanto unitario de capitalización o tipo de interés pospagable i con el tipo unitario de interés prepagable i^*, la ecuación de equivalencia financiera se puede expresar a través del tipo de interés prepagable de la siguiente forma: $C_0 = C_n(1 + i)^{-n} = C_n\,[(1 - i^*)^{-1}]^{-n} = C_n(1 - i^*)^n$.

El importe total de los intereses prepagables se puede obtener a través de la expresión:

$$I^* = C_n - C_0 = C_n[1 - (1 - i^*)^n]$$

EJERCICIO 10.2

Una persona obtiene un préstamo de 40.000 € con pago de intereses anticipados al 4% anual y duración de 5 años. Si el préstamo se amortiza a través de un único reembolso, calcular la cuantía neta que percibe el prestatario, así como el importe total de los intereses anticipados.

Resolución

Al tratarse de un préstamo con pago anticipado de intereses y amortizable a través de un solo pago, al principio de la operación el sujeto debe abonar todos los intereses de la misma, es decir, el precio financiero total prepagable. Por ello, la cuantía neta que percibe es: $C_0 = 40.000(1 - 0{,}04)^5 = 32.614{,}91$ € La diferencia entre la cuantía neta y el importe nominal del préstamo corresponde al abono del precio financiero total de la operación o intereses anticipados: $I^* = C_0^* - C_0 = 40.000 - 32.614{,}91 = 7.385{,}09$ €

10.2.2. Préstamos de contraprestación múltiple

Los préstamos de contraprestación múltiple son operaciones financieras en las que la prestación está integrada por un solo capital, el principal que entrega el prestamista al prestatario $(C_0, 0)$, y la contraprestación, constituida por un conjunto de capitales que entrega el prestatario al prestamista, denominados términos amortizativos: $\{(a_1, 1); (a_2, 2); \ldots (a_n, n)\}$. La operación queda definida de la siguiente forma:

$$\text{Prestación: } \{(C_0, 0)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(a_1, 1); (a_2, 2); \ldots (a_n, n)\}$$

© Ediciones Pirámide

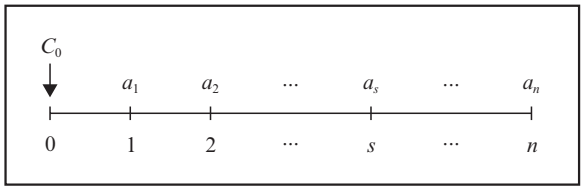


Figura 10.3.

Supongamos, por ejemplo, un préstamo de 30.000 € que se amortiza en 4 años a través de pagos mensuales pospagables de 677,37 €. En este caso, el prestatario recibiría 30.000 € al inicio de la operación y, a cambio de ello, mensualmente pagaría 677,37 € al prestamista durante 4 años, es decir, el prestatario realizaría 48 pagos mensuales de 677,37 €.

De acuerdo con lo expuesto, podemos afirmar que los préstamos de contraprestación múltiple se caracterizan por amortizarse a través de una renta pospagable, cuyos términos son los términos amortizativos. Tales términos tienen como misión la de amortizar o extinguir el préstamo recibido por el prestatario, es decir, devolver al prestamista el capital recibido C_0 y abonarle los intereses devengados.

Una de las principales problemáticas en las operaciones de préstamo es la determinación de la cuantía de los términos amortizativos, pudiéndose distinguir diversos sistemas o métodos de amortización en función de las hipótesis que se tengan en cuenta para su cálculo.

10.3. ESTUDIO GENERAL DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS CON CONTRAPRESTACIÓN MÚLTIPLE E INTERESES VENCIDOS

En este epígrafe analizamos, desde un punto de vista general, las operaciones de préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses vencidos o pospagables. En concreto, se plantea la ecuación dinámica del capital vivo, la ecuación fundamental de equivalencia financiera, diversas formas de calcular el saldo financiero o capital vivo y el capital total amortizado hasta un determinado momento.

Si partimos de la hipótesis de que el tipo de interés varía de un período a otro, lo podemos expresar gráficamente como aparece en la figura 10.4.

a) Ecuación dinámica del capital vivo

En general, el capital vivo al final de un determinado período, y una vez abonado el término amortizativo correspondiente, es igual al capital vivo al principio

© Ediciones Pirámide

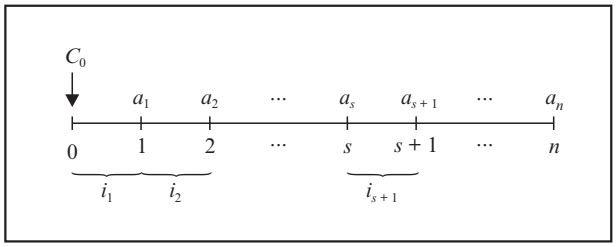


Figura 10.4.

de dicho período, incrementado en los intereses del mismo y disminuido en la cuantía del termino amortizativo que se abone en dicho período. Así, para el primer período el capital vivo al final del mismo será igual a la cuantía inicial del préstamo más los intereses de dicho período y menos el término amortizativo que el prestatario abone en el mencionado período: $C_1 = C_0(1 + i_1) - a_1$. En el segundo período el capital que genera intereses es el que queda pendiente de amortizar al principio del mismo, C_1, por lo que el capital vivo al final del segundo período es $C_2 = C_1(1 + i_2) - a_2$.

El capital pendiente de amortizar C_s o capital vivo al final de un determinado período s, una vez se ha hecho efectivo el término amortizativo de dicho período, se puede calcular a través de la expresión siguiente, que constituye la **ecuación dinámica del capital vivo**:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i_s) - a_s$$

El capital vivo C_s también recibe el nombre de saldo financiero o deuda pendiente de amortizar.

Por otro lado, si despejamos de la ecuación dinámica del capital vivo el **término amortizativo,** observamos que dicho término se puede obtener como suma de dos componentes:

$$a_s = (C_{s-1} - C_s) + (C_{s-1} \times i_s)$$

El primer sumando refleja la variación de la deuda, o, lo que es lo mismo, la variación del capital vivo o pendiente de amortizar en el período s, recibiendo el nombre de **cuota de amortización o cuota de capital** del período s: $A_s = C_{s-1} - C_s$.

De acuerdo con la expresión anterior, el capital vivo al final de un determinado período s también lo podemos calcular como el capital vivo al principio de dicho período menos la cuota de amortización del mismo: $C_s = C_{s-1} - A_s$.

Si en una determinada operación de préstamo las cuotas de amortización son positivas o nulas se dice que existe regularidad en la amortización, pues el saldo es decreciente o permanece constante, respectivamente.

© Ediciones Pirámide

El segundo sumando de la descomposición del término amortizativo refleja los intereses generados en el período s, los cuales se obtienen al multiplicar el capital pendiente de amortizar al principio de dicho período por el tipo de interés del mismo, recibiendo el nombre de **cuota de interés** del período s: $I_s = C_{s-1} \times i_s$.

En consecuencia a lo expuesto, cualquier término amortizativo se descompone en la suma de la cuota de amortización y la cuota de interés:

$$a_s = A_s + I_s$$

EJERCICIO 10.3

El capital vivo de un determinado préstamo al principio del año 8 asciende a 15.000 €. Si el tipo de interés es del 4% anual y en dicho año el prestatario abona una cuantía total de 4.000 €, ¿a cuánto ascenderá la deuda pendiente al principio del año 9?

Resolución

La deuda pendiente al principio del año 9 es el capital vivo al final del año 8, C_8, el cual será igual al capital pendiente de amortizar al principio del año 8 incrementado en los intereses del año 8 y disminuido en la cuantía abonada en dicho año, es decir, en el término amortizativo: $C_8 = 15.000(1 + 0{,}04) - 4.000 = 11.600$ €.

EJERCICIO 10.4

Sea un préstamo de 9.000 € a amortizar en 2 años a un tipo de interés anual del 4% el primer año y del 5% el segundo. Si el término amortizativo del primer año es de 1.425 €, calcular el término amortizativo del segundo año, así como la cuota de interés y la cuota de amortización correspondientes a cada uno de los años.

Resolución

La cuota de interés del año 1 es $I_1 = 9.000 \times 0{,}04 = 360$ € y la cuota de amortización de dicho año la podemos obtener como: $A_1 = a_1 - I_1 = 1.425 - 360 =$ $= 1.065$ €.

Con respecto al segundo año, su término amortizativo lo podemos calcular a través de la suma de la cuota de amortización y la cuota de interés de dicho año. Para ello necesitamos hallar previamente la deuda pendiente al final del año 1, la cual se puede obtener restando al principal del préstamo el capital amortizado en el primer año: $C_1 = 9.000 - 1.065 = 7.935$. Por tanto, la cuota de interés del año 2 es: $I_2 = 7.935 \times 0{,}05 = 396{,}75$ €.

© Ediciones Pirámide

Además, dado que el préstamo se amortiza de forma anual y finaliza el segundo año, la cuota de amortización de dicho año debe coincidir con C_1, ya que $C_2 = 0$, por lo que $A_2 = C_1 - 0 = 7.935$ €.

Una vez obtenidos todos los datos necesarios se puede calcular el término amortizativo del segundo año: $a_2 = 7.935 + 396{,}75 = 8.331{,}75$ €.

***b*) Ecuación fundamental de equivalencia financiera**

En un préstamo, como en toda operación financiera, se ha de verificar el postulado de equivalencia financiera, es decir, la equivalencia financiera entre los conjuntos de capitales prestación y contraprestación:

$$\text{Prestación: } \{(C_0, 0)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(a_1, 1); (a_2, 2); \ldots (a_n, n)\}$$

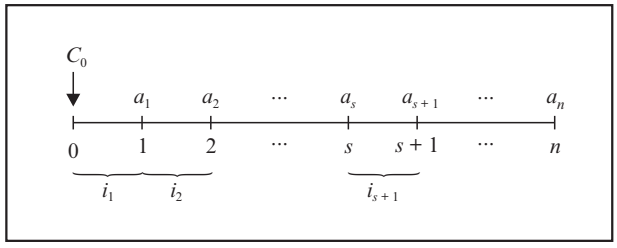


Figura 10.5.

Si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación, se verifica:

$$C_0 = a_1(1 + i_1)^{-1} + a_2\prod_{h=1}^{2}(1 + i_h)^{-1} + \ldots + a_n\prod_{h=1}^{n}(1 + i_h)^{-1}$$

Si valoramos la operación a un tipo de interés constante *i,* la ecuación de equivalencia financiera en el origen es la siguiente:

$$C_0 = a_1(1 + i)^{-1} + a_2(1 + i)^{-2} + \ldots + a_n(1 + i)^{-n} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \prod_{h=1}^{n} a_n(1 + i)^{-h}$$

En cambio, si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el final de la operación, se tiene:

© Ediciones Pirámide

$$C_0\prod_{h=1}^{n}(1+i_h) = a_1\prod_{h=2}^{n}(1+i_h) + a_2\prod_{h=3}^{n}(1+i_h) + \ldots + a_n$$

Valorando la citada operación a un tipo de interés constante *i,* la ecuación de equivalencia financiera en el final es la siguiente:

$$C_0(1+i)^n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \ldots + a_n \quad \Rightarrow \quad C_0(1+i)^n = \sum_{h=1}^{n} a_h(1+i)^{n-h}$$

EJERCICIO 10.5

Sea un préstamo de 100.000 € a amortizar en 15 años mediante términos amortizativos anuales constantes, a un tipo de interés del 4% anual para los 5 primeros años y del 4,5% anual para los restantes. Calcular la cuantía del término amortizativo.

Resolución

Para calcular el término amortizativo, planteamos en el origen la ecuación de equivalencia financiera entre la cuantía del préstamo y los términos amortizativos, los cuales en este caso configuran una renta constante, temporal, inmediata y pospagable:

$$100.000 = a \times a_{\overline{5}|0,04} + a \times a_{\overline{10}|0,045} \times 1,04^{-5} \quad \Rightarrow \quad a = 9.127,84\ €$$

EJERCICIO 10.6

Un préstamo de 90.000 € se ha de amortizar en 10 años mediante nueve términos amortizativos de 10.000 € cada uno y un término de cuantía desconocida el último año. Calcular la cuantía de dicho término si el tipo de interés fijado es del 4% anual.

Resolución

El último término amortizativo de cuantía X lo podemos hallar planteando en el final, punto 10, la ecuación de equivalencia financiera de la operación de préstamo:

$$90.000 \times 1,04^{10} = 10.000 \times s_{\overline{9}|0,04} \times 1,04 + X \quad \Rightarrow \quad X = 23.160,91\ €$$

---

c) Capital vivo o saldo financiero

Existen diversas formas de calcular el saldo financiero en un determinado momento del tiempo, entre las que cabe destacar las siguientes: método retrospectivo, método prospectivo y método recurrente, las cuales se estudian a continuación.

© Ediciones Pirámide

*c.*1) *Método retrospectivo*

De acuerdo con lo señalado en la lección 2 al estudiar el saldo financiero, el método retrospectivo implica calcular el saldo como diferencia entre el valor en el punto *s* de la prestación vencida y el valor en dicho punto de la contraprestación pasada:

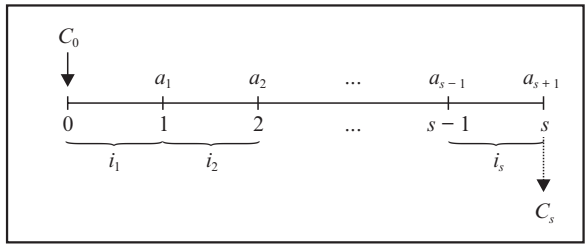


Figura 10.6.

$$C_s = C_0\prod_{h=1}^{s}(1+i_h) - \left[a_1\prod_{h=2}^{s}(1+i_h) + a_2\prod_{h=3}^{s}(1+i_h) + \ldots + a_s\right]$$

Si el tipo de interés se mantiene constante e igual a *i*:

$$C_s = C_0(1+i)^s - [a_1(1+i)^{s-1} + a_2(1+i)^{s-2} + \ldots + a_s] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s = C_0(1+i)^s - \sum_{h=1}^{s} a_h(1+i)^{s-h}$$

*c.*2) *Método prospectivo*

Si para calcular la reserva matemática aplicamos el método prospectivo, hallamos el saldo financiero como la diferencia entre el valor en el punto *s* de la contraprestación futura y el valor en dicho punto de la prestación futura, la cual es nula:

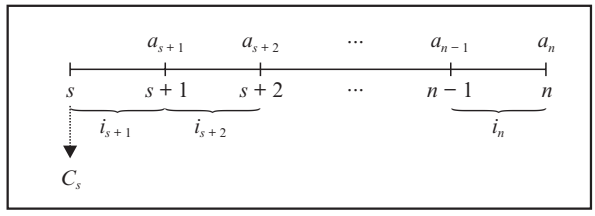


Figura 10.7.

$$C_s = a_{s+1}(1+i_{s+1})^{-1} + a_{s+2}\prod_{h=1}^{2}(1+i_{s+h})^{-1} + \ldots + a_n\prod_{h=1}^{n-s}(1+i_{s+h})^{-1}$$

© Ediciones Pirámide

Podemos señalar, pues, que el saldo por el método prospectivo es el valor actualizado de los términos amortizativos pendientes de vencimiento.

Si el tipo de interés es constante, tenemos:

$$C_s = a_{s+1}(1+i)^{-1} + a_{s+2}(1+i)^{-2} + \ldots + a_n(1+i)^{-(n-s)} \quad \Rightarrow \quad C_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-h}$$

c.3) *Método recurrente*

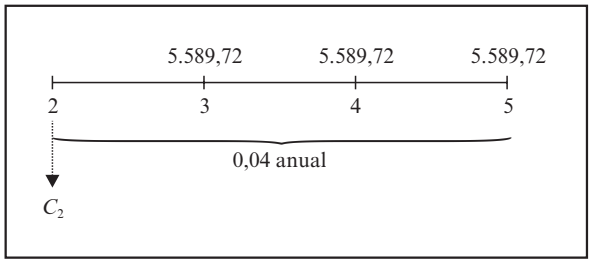
El método recurrente consiste en calcular el capital vivo en función del saldo en cualquier período precedente y de los términos amortizativos con vencimiento entre ambos saldos.

EJERCICIO 10.7

Sea un préstamo de 20.000 € a amortizar en 5 años mediante términos amortizativos de cuantía 3.000,01 € en los dos primeros años y 5.589,72 € en los años restantes. Si el tipo de interés pactado es el 4% anual, calcular el capital vivo al principio del año 3 por el método prospectivo y el saldo financiero al principio del año 4, tanto por el método retrospectivo como por el método recurrente.

Resolución

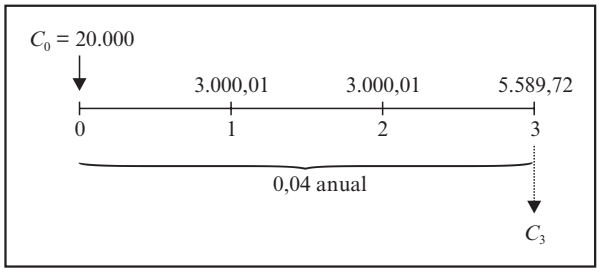
Si utilizamos el método prospectivo para hallar el saldo financiero al principio del año 3 o final del año 2, éste será igual a la suma financiera en 2 de los términos amortizativos pendientes de vencer:



$$C_2 = 5.589{,}72 \times a_{\overline{3}|0{,}04} = 15.511{,}98 \text{ €}$$

Si utilizamos el método retrospectivo para hallar el saldo financiero al principio del año 4 o final del año 3, éste será igual al valor en el punto 3 de la cuantía inicial del préstamo (prestación vencida) menos la suma financiera en 3 de los términos amortizativos vencidos (contraprestación vencida).

© Ediciones Pirámide



$$C_3 = 20.000 \times 1{,}04^3 - 3.000{,}01 \times s_{\overline{2}|0{,}04} \times 1{,}04 - 5.589{,}72 = 10.542{,}74\ €$$

Asimismo, el saldo financiero al final del año 3 también lo podemos hallar por el método recurrente a partir del saldo en 2:

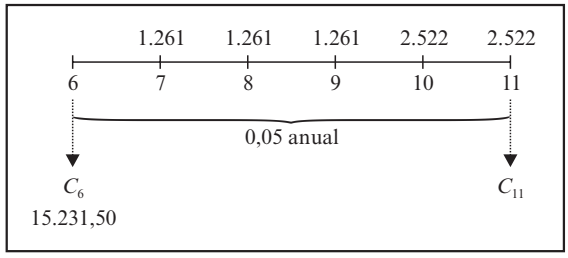
$$C_3 = 15.511{,}98 \times 1{,}04 - 5.589{,}72 = 10.542{,}74\ €$$

EJERCICIO 10.8

El capital vivo de un determinado préstamo al principio del año 7 asciende a 15.231,50 €. Si el tipo de interés es del 5% anual, la cuantía del término amortizativo correspondiente a los años 7, 8 y 9 es 1.261 €, y en los dos años siguientes el importe del término amortizativo es el doble, ¿a cuánto ascenderá la deuda pendiente al principio del año 12?

Resolución

La deuda pendiente al principio del año 12 es el capital vivo al final del año 11, C_{11}, el cual lo podemos calcular como el valor financiero en 11 del saldo en 6 minorado por la suma financiera en 11 de los términos amortizativos que vencen desde el principio del año 7 hasta el final del año 11.



$$C_{11} = 15.231{,}50 \times 1{,}05^5 - 1.261 \times s_{\overline{3}|0{,}05} \times 1{,}05^2 - 2.522 \times s_{\overline{2}|0{,}05} = 9.886{,}81\ €$$

© Ediciones Pirámide

d) Capital total amortizado

El capital amortizado hasta un determinado momento s es la suma de las cuotas de amortización o de capital vencidas hasta dicho momento, es decir, de las s primeras cuotas de amortización. Por tanto, la expresión matemática para el cálculo del total amortizado hasta un período s, representado por M_s^e, es la siguiente: $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h$.

Además, si expresamos las cuotas de amortización como diferencia del capital vivo al principio y al final de cada período, tenemos la siguiente expresión:

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 + A_2 + ... + A_s = (C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) + ... + (C_{s-1} - C_s)$$

$$M_s^e = C_0 - C_s$$

De acuerdo con la expresión anterior, el total amortizado hasta un determinado período s se puede obtener como diferencia entre el principal del préstamo C_0 y la deuda pendiente al final de dicho período C_s.

Por otra parte, para que la operación quede cancelada, el total amortizado hasta el final de la operación debe ser igual a la cuantía inicial del préstamo: $M_n^e = \sum_{h=1}^{n} A_h = C_0$. O, lo que es equivalente, la cuantía del préstamo es la suma aritmética de todas las cuotas de amortización.

Asimismo, el capital pendiente de amortizar o saldo también lo podemos calcular como diferencia entre el capital objeto del préstamo y el capital amortizado hasta ese momento, y por tanto como suma aritmética de las cuotas de amortización pendientes de vencimiento:

$$C_s = C_0 - M_s^e = \sum_{h=1}^{n} A_h - \sum_{h=1}^{s} A_h = (A_1 + A_2 + ... + A_s + A_{s+1} + A_{s+2} + ... + A_n) - (A_1 + A_2 + ... + A_s)$$

$$C_s = A_{s+1} + A_{s+2} + ... + A_n \quad \Rightarrow \quad C_s = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}$$

EJERCICIO 10.9

Si de un préstamo de 80.000 € amortizable en 9 años, se sabe que al principio del quinto año el capital vivo es de 55.000 €, y que en el cuarto y quinto año se amortizan, respectivamente, 11.000 y 12.000 € de capital, calcular el capital amortizado en los tres primeros años y el capital vivo al principio del sexto año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El capital amortizado en los tres primeros años es la diferencia entre la cuantía inicial del préstamo y el capital vivo al final del año 3. Por tanto, primero hallamos el capital vivo al final del año 3, el cual se puede obtener como suma del saldo al final del año 4 o principio del año 5, y la cuota de amortización de dicho año:

$$C_4 = C_3 - A_4 \quad \Rightarrow \quad C_3 = C_4 + A_4 = 55.000 + 11.000 = 66.000$$

El total amortizado en los tres primeros años será: $M_3^e = C_0 - C_3 = 80.000 - 66.000 = 14.000$ €.

El capital vivo al principio del sexto año es la deuda pendiente de amortizar al final del quinto año, el cual lo podemos calcular como diferencia entre el saldo al final del año 4 o principio del año 5 y la cuota de amortización del año 5: $C_5 = C_4 - A_5 = 55.000 - 12.000 = 43.000$ €.

10.4. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

En el cuadro de amortización se registra período a período la evolución de la operación de préstamo, reflejándose los valores que toman cada una de las magnitudes de la operación (términos amortizativos, tipos de interés, cuotas de capital o de amortización, cuotas de interés, total amortizado y saldo o capital vivo).

Período	**Tipo de interés**	**Término amortizativo** ($a_s = I_s + A_s$)	**Cuota de interés** ($I_s = C_{s-1} \times i_s$)	**Cuota de amortización** ($A_s = a_s - I_s$)	**Total amortizado** ($M_s^e = M_{s-1}^e - A_s$)	**Saldo o capital vivo** ($C_s = C_{s-1} + A_s$)
0	—	—	—	—	—	C_0
1	i_1	a_1	$I_1 = C_0 \times i_1$	$A_1 = a_1 - I_1$	$M_1^e = A_1$	$C_1 = C_0 - A_1$
2	i_2	a_2	$I_2 = C_1 \times i_2$	$A_2 = a_2 - I_2$	$M_2^e = M_1^e + A_2$	$C_2 = C_1 - A_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	i_n	a_n	$I_n = C_{n-1} \times i_n$	$A_n = a_n - I_n$	$M_n^e = M_{n-1}^e + A_n = C_0$	$C_n = C_{n-1} - A_n = 0$

Cada uno de los componentes del cuadro de amortización lo podemos obtener de la siguiente manera:

La cuota de interés de un determinado período s se calcula multiplicando el tipo de interés de dicho período por el saldo al principio del mismo, o sea, por el capital vivo al final del período anterior: $I_s = C_{s-1} \times i_s$.

Si se conoce la cuantía del término amortizativo de un determinado período s, la cuota de amortización del mismo se determina como la diferencia entre dicho término amortizativo y la cuota de interés de dicho período: $A_s = a_s - I_s$.

© Ediciones Pirámide

Si se conoce la cuota de amortización correspondiente a un período s, la cuantía del correspondiente término amortizativo se puede obtener como la suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización de dicho período: $a_s = I_s + A_s$.

El total amortizado hasta el período s se obtiene al sumar las cuotas de amortización vencidas, o sumando al total amortizado hasta el período anterior la cuota de amortización del período s: $M_s^e = M_{s-1}^e + A_s$.

El saldo o capital vivo al final de un determinado período s se calcula restando al saldo del período anterior la cuota de amortización del período s: $C_s = C_{s-1} - A_s$.

EJERCICIO 10.10

Confeccionar el cuadro de amortización correspondiente a un préstamo de 15.000 € amortizable en 4 años, del que se sabe que los términos amortizativos de los dos primeros años son de 3.000 € y que el del tercer año es de 3.800 €. El tipo de interés anual del préstamo es el 3% en el primer año y el 4% en los restantes.

Resolución

Aplicando las ecuaciones anteriormente indicadas obtenemos el valor de cada uno de los componentes del cuadro de amortización. Así, para el primer año y segundo año tenemos:

Año 1	Año 2
$I_1 = C_0 \times i_1 = 15.000 \times 0{,}03 = 450$	$I_2 = C_1 \times i_2 = 12.450 \times 0{,}04 = 498$
$A_1 = a_1 - I_1 = 3.000 - 450 = 2.550$	$A_2 = a_2 - I_2 = 3.000 - 498 = 2.502$
$M_1^e = A_1 = 2.550$	$M_2^e = M_1^e + A_2 = 2.550 + 2.502 = 5.052$
$C_1 = C_0 - A_1 = 15.000 - 2.550 = 12.450$	$C_2 = C_1 - A_2 = 12.450 - 2.502 = 9.948$

El cuadro de amortización completo de esta operación de préstamo es el siguiente:

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	15.000
1	0,03	3.000	450	2.550	2.550	12.450
2	0,04	3.000	498	2.502	5.052	9.948
3	0,04	3.800	397,92	3.402,08	8.454,08	6.545,92
4	0,04	6.807,76	261,84	6.545,92	15.000	0,00

Para el último año hemos calculado el término amortizativo como suma de la cuota de interés y la cuota de amortización de dicho año, siendo esta última igual al capital pendiente de amortizar al principio del año 4:

© Ediciones Pirámide

$$a_4 = I_4 + A_4 = 261{,}84 + 6.545{,}92 = 6.807{,}76 \text{ €}$$

Otra forma de calcular el término amortizativo del último año es a través de la ecuación de equivalencia financiera. Si ésta la planteamos al final de la operación, tenemos:

$$15.000 \times 1{,}03 \times 1{,}04^3 = 3.000 \times s_{\overline{2}|0{,}04} \times 1{,}04^2 + 3.800 \times 1{,}04 + a_4 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a_4 = 6.807{,}76 \text{ €}$$

10.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si un préstamo de 6.000 € se amortiza a los dos años de su concesión a través de un solo pago de 8.000 €, calcular el tipo de interés anual al que se pactó el préstamo.

Resolución

El capital que el prestatario entrega al cabo de dos años es equivalente a la cuantía inicial del préstamo. Si se valora la operación en capitalización compuesta, el tipo de interés anual fijado es: $8.000 = 6.000(1 + i)^2 \Rightarrow i = 15{,}47\%$.

2. Si el último término amortizativo anual de un préstamo es igual a 15.000 € y el tipo de interés pactado es el 4% anual, ¿a cuánto asciende el capital pendiente de amortizar al principio del último año?

Resolución

Sabemos que el último término amortizativo verifica: $a_n = C_{n-1} \times i + A_n$, siendo $A_n = C_{n-1}$, por tanto $a_n = C_{n-1} \times i + C_{n-1} \Rightarrow C_{n-1} = \dfrac{15.000}{1{,}04} = 14.423{,}08$ €. También podemos determinar dicho saldo a través del método prospectivo: $C_{n-1} = a_n (1 + i)^{-1}$.

3. Si en un préstamo pactado al 4% anual, de 10 años de duración, se sabe que el capital amortizado en los nueve primeros años es de 12.500 € y que el último año el prestatario abona 50 € en concepto de intereses, hallar el importe del préstamo.

Resolución

Se verifica: $C_0 = M^e_{10} = M^e_9 + A_{10} = 12.500 + A_{10}$. Además, el capital amortizado el último año (año 10) es el capital vivo al final del año 9: $A_{10} = C_9$, el cual se

© Ediciones Pirámide

puede deducir de la cuota de interés del último año: $I_{10} = 50 = C_9 \times 0{,}04 \Rightarrow C_9 =$ $= 1.250$. Por tanto, la cuantía del préstamo es: $C_0 = 12.500 + 1.250 = 13.750$ €.

4. Confeccionar el cuadro de amortización de un préstamo de 12.000 € amortizable en 3 años al 5% anual, siendo la cuantía de los términos amortizativos la siguiente: 5.000 € para el año 1, 6.000 € para el año 2 y 2.079 € para el año3.

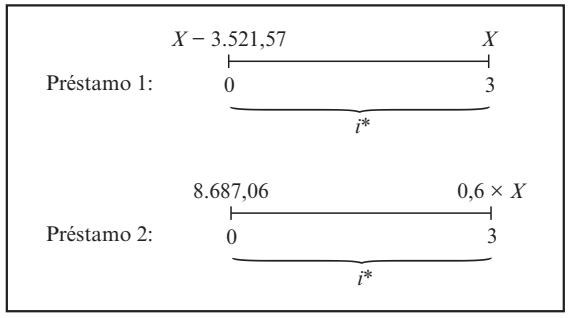
Resolución

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	12.000
1	0,05	5.000	600	4.400	4.400	7.600
2	0,05	6.000	380	5.620	10.020	1.980
3	0,05	2.079	99	1.980	12.000	0

5. A una persona se le concede un préstamo de cuantía nominal X, con pago de intereses anticipados y duración 3 años. El préstamo se amortiza a través de reembolso único y el importe total de los intereses anticipados asciende a 3.521,57 €. Hallar el importe nominal X del préstamo y el tipo de interés anticipado, si se sabe que en otra operación de préstamo cuyo nominal es el 60% del importe de la anterior, de 3 años de duración, pactada al mismo tipo de interés prepagable, el importe neto que recibe el prestatario es 8.687,06 €.

Resolución

Al tratarse de préstamos con pago anticipado de intereses y amortizable a través de un solo pago, al principio de la operación el prestatario debe abonar todos los intereses de la misma, percibiendo, por tanto, el nominal del préstamo disminuido en la cuantía de los intereses:



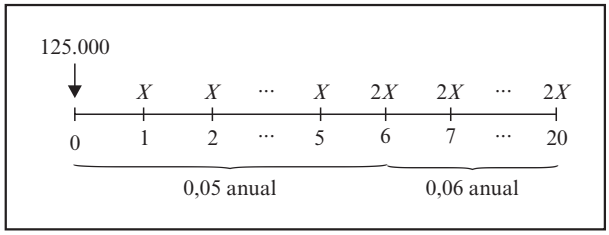
© Ediciones Pirámide

El importe de los intereses prepagables se puede poner en función del nominal del préstamo. Así, en el préstamo 1 tenemos: $3.521{,}57 = X[1 - (1 - i^*)^3]$. También podemos expresar la cuantía neta que percibe el prestatario en función del nominal. De esta forma en el préstamo 2 tenemos: $8.687{,}06 = 0{,}6 \times X(1 - i^*)^3$. Por tanto, se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que obtenemos que $X = 18.000$ € e $i^* = 6{,}99998\%$ anual.

6. Sea un préstamo de 125.000 € a amortizar en 20 años, mediante términos amortizativos anuales de cuantía X para los cinco primeros años y de importe $2X$ para los restantes, a un tipo de interés igual del 5% anual para los seis primeros años y del 6% anual para los restantes. Calcular la cuota de interés del año 6 y la cuota de amortización del año 13.

Resolución

Primero hallamos el importe de los términos amortizativos a través de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:



$$125.000 = X \times a_{\overline{5}|0{,}05} + 2X \times \ddot{a}_{\overline{20-5}|\,0{,}06} \times 1{,}05^{-6} \quad \Rightarrow \quad X = 6.347{,}10 \text{ €}$$

Para hallar la cuota de interés del año 6, $I_6 = C_5 \times 0{,}05$, necesitamos calcular el capital vivo al final del año 5. Si hallamos C_5 por el método retrospectivo: $C_5 = 125.000 \times 1{,}05^5 - 6.347{,}10 \times s_{\overline{5}|0{,}05} = 124.463{,}46$. Por tanto, se tiene: $I_6 = = 124.463{,}46 \times 0{,}05 = 6.223{,}17$ €.

La cuota de amortización del año 13 la podemos obtener como diferencia entre el término amortizativo y la cuota de interés correspondientes al año 13: $A_{13} = 2X - I_{13}$, y para calcular la cuota de interés necesitamos conocer el saldo al final del período anterior: $I_{13} = C_{12} \times 0{,}06$. A su vez, C_{12} se puede hallar, por ejemplo, a través del método prospectivo: $C_{12} = 2 \times 6.347{,}10 \times a_{\overline{20-12}|\,0{,}06} = 78.828{,}36$. Por tanto, la cuota de amortización del año 13 es $A_{13} = 2 \times 6.347{,}10 - 78.828{,}36 \times \times 0{,}06 = 7.964{,}50$ €.

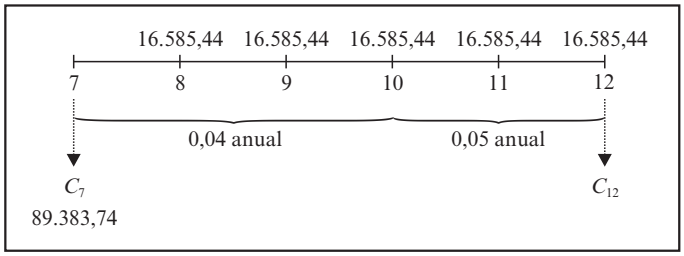
7. El capital vivo de un determinado préstamo al principio del año 8 asciende a 89.383,74 €. Si el tipo de interés es el 4% anual para los diez primeros años

© Ediciones Pirámide

del préstamo y el 5% anual para los restantes, y se sabe que los términos amortizativos anuales son de cuantía constante e igual a 16.585,44 €, hallar el importe de la deuda pendiente al principio del año 13.

Resolución

La deuda pendiente al principio del año 13 es el saldo al final del año 12, C_{12}, el cual lo podemos hallar a través del método recurrente, considerando el capital vivo al principio del año 8 y los términos amortizativos que vencen entre los años 8 y 12.

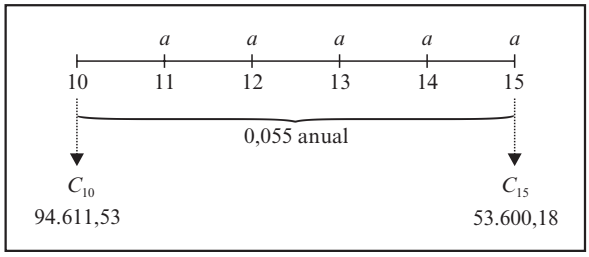


$$C_{12} = 89.383,74 \times 1,04^3 \times 1,05^2 - (16.585,44 \times s_{\overline{3}|0,04} \times 1,05^2 +$$
$$+ 16.585,44 \times s_{\overline{2}|0,05}) = 19.770,36\ €$$

8. Sea un préstamo amortizable en 20 años con términos amortizativos anuales constantes, cuyo saldo al principio del año 11 y del año 16 es 94.611,53 € y 53.600,18 €, respectivamente. Si el tipo de interés pactado es el 5,5% anual, hallar la cuota de amortización del año 7.

Resolución

Primero hemos de calcular el importe constante de los términos amortizativos a través del método recurrente, expresando el saldo en 15 en función del saldo en 10:

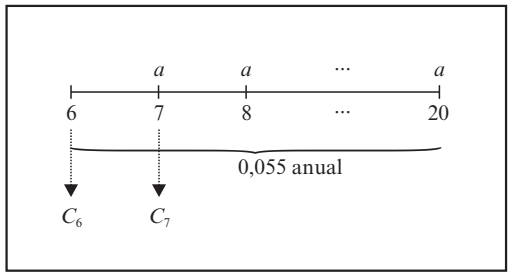


$$C_{15} = C_{10}(1 + i)^5 - a \times s_{\overline{15-10}|i}$$

$$53.600,18 = 94.611,53 \times 1,055^5 - a \times s_{\overline{5}|0,055} \quad \Rightarrow \quad a = 12.551,90$$

© Ediciones Pirámide

La cuota de amortización del año 7 se puede deducir de diversas formas. Una de ellas es hallando la diferencia entre el capital vivo al final del año 6 y el saldo en 7, para lo cual previamente hemos de obtener tales saldos.



$$C_6 = 12.551{,}90 \times a_{\overline{20-6}|\,0{,}055} = 120.368{,}30$$

$$C_7 = 12.551{,}90 \times a_{\overline{20-7}|\,0{,}055} = 114.436{,}66$$

$$A_7 = C_6 - C_7 = 120.368{,}30 - 114.436{,}66 = 5.931{,}64\ €.$$

10.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea un préstamo de 80.000 € de duración 10 años, pactado al 6% anual. Si el término amortizativo del primer año es de 8.000 €, ¿a cuánto asciende la cuota de interés del segundo año?

2. Calcular X y completar el siguiente cuadro de amortización:

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	
1	0,05	8.000	3.500			
2	0,06	X				
3	0,065	X				
4	0,07	14.000				
5	0,07	14.000				

3. Si un préstamo simple de 10.000 € y duración 4 años se pacta al 5% de interés anual anticipado, calcular la cuantía neta que percibirá el prestatario.

© Ediciones Pirámide

4. Sea un préstamo de 200.000 € amortizable anualmente, del que se conocen los siguientes datos: el tipo de interés es el 5% anual, el total amortizado en los nueve primeros años es de 95.000 €, el importe de cada uno de los cuatro primeros términos amortizativos es de 16.000 € y la cuantía del término amortizativo del año 10 es 15.500 €. Hallar el capital amortizado desde el quinto año (incluido) hasta el décimo año, y el saldo al principio del año 11.

5. La última cuota de amortización de un determinado préstamo asciende a 15.478,22 € y la cuota de interés del año 5 es de 9.560,88 €. Si el tipo de interés es del 6% anual y se sabe que desde el principio del quinto año en adelante el préstamo se amortiza a través de una renta constante, anual, temporal, inmediata y pospagable, hallar la duración del préstamo.

6. A una persona se le concede un préstamo de 90.000 € a amortizar en 8 años, mediante términos amortizativos anuales de cuantía X para los dos primeros años y para los últimos tres años, y $0{,}5X$ para el tercer, cuarto y quinto año. Si el tipo de interés es del 3% anual para los tres primeros años y del 4,5% anual para los restantes, calcular el capital amortizado en los primeros cuatro años.

7. En un determinado préstamo amortizable al 5,8% anual en 10 años, a través de una renta constante anual, temporal, inmediata y pospagable, se sabe que el importe total amortizado en los dos primeros años es 17.336,98 €. Hallar la cuota de amortización del primer año.

© Ediciones Pirámide

11 Métodos clásicos de amortización de préstamos

OBJETIVOS

- Analizar las características básicas y las relaciones específicas en los métodos clásicos de amortización de préstamos: préstamo francés, préstamo americano en sus dos modalidades (simple y con fondo) y préstamo con cuota de amortización constante.

SUMARIO

11.1. Introducción.
11.2. Método francés.
11.3. Método americano.
11.4. Método de cuota de amortización constante.
11.5. Ejercicios y problemas resueltos.
11.6. Ejercicios y problemas propuestos.

11.1. INTRODUCCIÓN

En la lección anterior, al analizar las operaciones financieras de amortización de préstamos con contraprestación múltiple hemos señalado que una de las principales problemáticas en este tipo de operaciones es la determinación de la cuantía de los términos amortizativos. Pues bien, en tales operaciones los términos amortizativos constituyen una renta y, por tanto, se puede aplicar todo lo recogido en las lecciones dedicadas a la valoración de rentas. Además, cualquier sistema o método de amortización de préstamos con contraprestación múltiple se caracteriza por el conjunto de hipótesis que se establecen en cuanto a los tipos de interés, a los términos amortizativos o a cualquiera de sus componentes.

Por consiguiente, la amortización de un préstamo con contraprestación múltiple se puede plantear con cualquier modalidad de renta, y su estudio en términos generales atiende a lo señalado en la lección anterior. No obstante, existen unos métodos clásicos de amortización, los más utilizados en la práctica, que son los que analizaremos en esta lección: método francés, método americano y método de cuota de amortización constante o método italiano.

11.2. MÉTODO FRANCÉS

Este método de amortización de préstamos parte de la **hipótesis básica** de que **tanto los términos amortizativos como el tipo de interés son de cuantía constante:** $a_s = a$; $i_s = i$, $\forall\ s|s = 1,2, ..., n$. Por tanto, el préstamo se amortiza mediante una renta constante, temporal, inmediata y pospagable, y aplicando un mismo tipo de interés en toda la operación. La operación de préstamo queda definida por el siguiente gráfico:

© Ediciones Pirámide

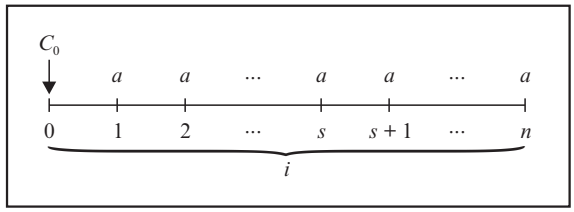


Figura 11.1.

A continuación vamos a plantear la ecuación de equivalencia financiera, la ley de variación de las cuotas de amortización, el capital total amortizado y diversas formas de calcular el saldo financiero o capital vivo en un préstamo amortizable por este método.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

En toda operación financiera se ha de verificar la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación en un mismo momento del tiempo. Así, si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación, tenemos:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i}$$

Siendo C_0 el principal o cuantía del préstamo, n el número de términos que ha de abonarse e i el tipo de interés unitario expresado en la misma unidad de tiempo que n, es decir, en la periodicidad de los términos amortizativos.

b) Ley de variación de las cuotas de amortización

Para obtener la ley de variación de las cuotas de amortización hemos de aplicar la ecuación dinámica de amortización en dos períodos consecutivos y obtener la diferencia de ambas expresiones:

$$\begin{array}{c} C_s = C_{s-1}(1+i) - a \\ C_{s+1} = C_s(1+i) - a \\ \hline \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}(1+i) \Rightarrow A_{s+1} = A_s(1+i) \end{array}$$

De la expresión anterior se deduce que las cuotas de amortización en el método francés varían en progresión geométrica de razón $q = 1 + i$. Por tanto, en este tipo de préstamos, una vez conocidos el importe de una cuota de amortización y el tipo de interés, es posible hallar cualquier otra cuota de amortización, pudién-

© Ediciones Pirámide

dose calcular la cuota de amortización del período s a través de la primera cuota, mediante la siguiente expresión:

$$A_s = A_1(1 + i)^{s-1}$$

c) Capital total amortizado

Teniendo en cuenta que el **capital amortizado hasta un determinado momento** s, M_s^e, es la suma aritmética de las cuotas de amortización o de capital vencidas hasta dicho momento y que las cuotas de amortización en el préstamo francés varían en progresión geométrica, el capital amortizado lo podemos hallar a través de la siguiente expresión:

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 + A_1(1 + i) + A_1(1 + i)^2 + \ldots + A_1(1 + i)^{s-1} =$$
$$= A_1\left[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{s-1}\right]$$

Sabiendo que $\left[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{s-1}\right]$ es la suma aritmética de una sucesión de s términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1 + i$, podemos sustituir dicha expresión por el resultado de su suma, el cual se puede hallar a través de la fórmula siguiente: $S = \dfrac{z_n \times q - z_1}{q - 1}$, siendo q la razón y z_1 y z_n el primer y último término de la sucesión, respectivamente. Por tanto, tenemos:

$$M_s^e = A_1 \frac{(1 + i)^{s-1}(1 + i) - 1}{(1 + i) - 1} = A_1 \frac{(1 + i)^s - 1}{i} \quad \Rightarrow \quad M_s^e = A_1 \times s_{\overline{s}|i}$$

Generalizando para el período n: $M_n^e = A_1 \times s_{\overline{n}|i}$, y teniendo en cuenta que al final de la operación de préstamo el capital debe estar totalmente amortizado, se tiene: $M_n^e = C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i}$. Por tanto, si despejamos de la expresión anterior A_1, obtenemos que en el préstamo francés la primera cuota de amortización la podemos hallar, en función de la cuantía del préstamo, a través de la siguiente expresión: $A_1 = \dfrac{C_0}{s_{\overline{n}|i}}$.

Además, si en la expresión $M_s^e = A_1 \times s_{\overline{s}|i}$ sustituimos la primera cuota de amortización por $\dfrac{C_0}{s_{\overline{n}|i}}$, tenemos: $M_s^e = C_0 \dfrac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$.

© Ediciones Pirámide

d) Capital vivo o saldo financiero

El capital vivo en un determinado momento del tiempo, tal y como hemos visto en la lección anterior, se puede calcular a través de distintos métodos: recurrente, retrospectivo y prospectivo.

*d.*1) *Método recurrente*

Si utilizamos el método recurrente, podemos calcular el capital vivo al final del período s a partir de otro capital vivo previamente hallado. En función del correspondiente al período anterior, se verifica: $C_s = C_{s-1}(1 + i) - a$.

*d.*2) *Método retrospectivo*

Si consideramos la parte de la operación vencida, aplicamos el método retrospectivo y, por tanto, el capital vivo se calcula como la diferencia entre el valor en el punto s de la prestación vencida y el valor en dicho punto de la contraprestación vencida: $C_s = C_0(1 + i)^s - a \times s_{\overline{s}|i}$. Gráficamente:

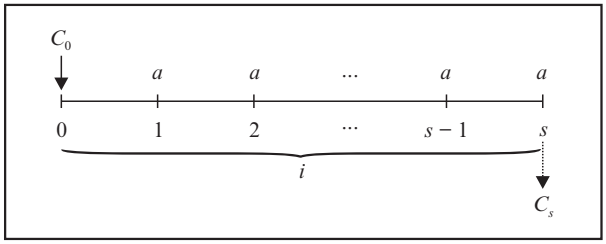


Figura 11.2.

*d.*3) *Método prospectivo*

Si atendemos a la parte de la operación pendiente de vencer, aplicamos el **método prospectivo** y, en este caso, el capital vivo coincide con el valor en el punto s de la contraprestación futura: $C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$. Gráficamente:

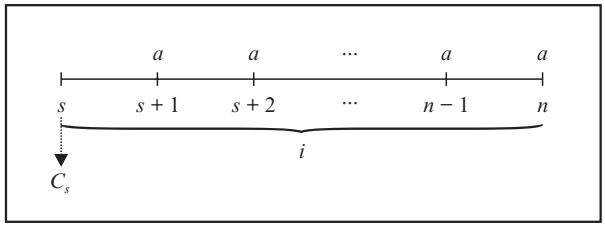


Figura 11.3.

© Ediciones Pirámide

También podemos calcular el capital vivo al final del período s a través del total amortizado hasta dicho período:

$$M_s^e = C_0 - C_s \quad \Rightarrow \quad C_s = C_0 - M_s^e = C_0 - C_0 \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \quad \Rightarrow \quad C_s = C_0\left(1 - \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}\right)$$

EJERCICIO 11.1

Sea un préstamo de 90.000 € a amortizar en 10 años mediante términos amortizativos anuales constantes, a un tipo de interés del 4,5% anual. Calcular: *a*) la cuantía del término amortizativo; *b*) la cuota de amortización del año 5; *c*) el capital amortizado hasta el final del año 8; *d*) el capital pendiente de amortizar al final del año 3 a través del método retrospectivo, y *e*) el saldo al final del año 4 a través del método prospectivo.

Resolución

a) Para calcular el término amortizativo planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$90.000 = a \times a_{\overline{10}|0,045} \quad \Rightarrow \quad a = 11.374,09 \text{ €}$$

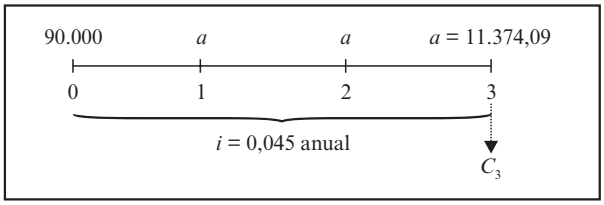
b) Para calcular la cuota de amortización del año 5, necesitamos hallar la correspondiente al primer año, verificándose: $A_5 = A_1(1 + i)^4$. Por tanto, tenemos que $C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i} \Rightarrow 90.000 = A_1 \times s_{\overline{10}|0,045} \Rightarrow A_1 = 7.324,09$, obteniéndose la quinta cuota de amortización:

$$A_5 = 7.324,09\,(1 + 0,045)^4 = 8.734,11 \text{ €}.$$

c) El capital amortizado hasta el año 8 lo podemos obtener a través de la siguiente expresión:

$$M_8^e = A_1 \times s_{\overline{8}|i} = 7.324,09 \times s_{\overline{8}|0,045} = 68.700,06 \text{ €}$$

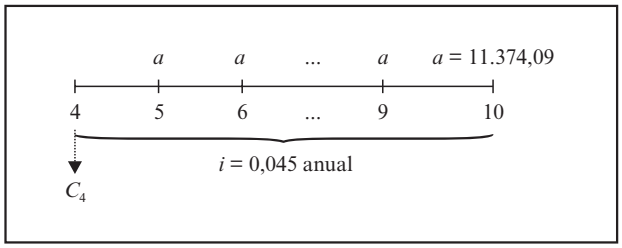
d) Para calcular el capital vivo al final del año 3 a través del método retrospectivo hemos de plantear la diferencia financiera entre la prestación vencida y la contraprestación pasada:



$$C_3 = 90.000\,(1 + 0,045)^3 - 11.374,09 \times s_{\overline{3}|0,045} = 67.024,15 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

e) Para calcular el capital pendiente de amortizar al final del año 4 a través del método prospectivo, tenemos que calcular en dicho punto la suma financiera de los términos amortizativos pendientes de vencimiento:



$$C_4 = 11.374{,}09 \times a_{\overline{6}|0{,}045} = 58.666{,}11\ €$$

EJERCICIO 11.2

Sea un préstamo a amortizar en *n* años mediante términos amortizativos trimestrales constantes. Sabiendo que el capital total amortizado hasta el final del segundo año asciende a 34.619,26 € y que el total amortizado hasta el final del cuarto año es 72.106,96 €, hallar la cuota de amortización del segundo trimestre del quinto año.

Resolución

Se trata de un préstamo francés amortizable trimestralmente, por lo que las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $1 + i^{(m)}$. Por tanto, la decimoctava cuota de amortización verifica: $A_{18} = A_1(1 + i^{(m)})^{17}$. Para calcular A_{18} necesitamos hallar previamente tanto la primera cuota de amortización como el tipo de interés trimestral pactado.

Teniendo en cuenta que se conocen $M^e_{2\times 4} = M^e_8$ y $M^e_{4\times 4} = M^e_{16}$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} M^e_8 = A_1 \times s_{\overline{8}|i^{(m)}} \Rightarrow 34.619{,}26 = A_1 \frac{(1+i^{(m)})^8 - 1}{i^{(m)}} \\ M^e_{16} = A_1 \times s_{\overline{16}|i^{(m)}} \Rightarrow 72.106{,}26 = A_1 \frac{(1+i^{(m)})^{16} - 1}{i^{(m)}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 72.106{,}26 = \frac{34.619{,}26}{\dfrac{(1+i^{(m)})^8 - 1}{i^{(m)}}} \times \frac{(1+i^{(m)})^{16} - 1}{i^{(m)}}$$

© Ediciones Pirámide

Haciendo $(1 + i^{(m)})^8 = z$ llegamos a: $\frac{72.106,96}{34.619,26} = \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \frac{(z + 1)(z - 1)}{z - 1} =$
$= z + 1$, de donde obtenemos $z = 1{,}082856768 \Rightarrow i^{(m)} = 1\%$ trimestral, por lo que $A_1 = 4.178{,}21$, y $A_{18} = A_1(1 + i^{(m)})^{17} = 4.948{,}27$ €.

EJERCICIO 11.3

En un préstamo a amortizar al 4% anual a través de términos amortizativos anuales constantes, se conoce el importe del saldo vivo al principio del cuarto año, así como al principio del séptimo año, los cuales son 59.199,95 € y 35.802,67 €, respectivamente. Hallar el principal y la duración del préstamo.

Resolución

Se trata de un préstamo francés, pudiéndose calcular la cuantía del préstamo como $C_0 = a \times a_{\overline{n}|i}$, para lo cual necesitamos conocer tanto la cuantía del término amortizativo como la duración de la operación. Tales datos los podemos hallar a través de la expresión de cálculo de los saldos vivos por el método prospectivo, verificándose:

$$\left.\begin{aligned} C_3 = a \times a_{\overline{n-3}|i} \Rightarrow\ 59.199,95 = a\,\frac{1 - (1 + 0{,}04)^{-(n-3)}}{0{,}04} \\ C_6 = a \times a_{\overline{n-6}|i} \Rightarrow\ 35.802,67 = a\,\frac{1 - (1 + 0{,}04)^{-(n-6)}}{0{,}04} \end{aligned}\right\} 35.802,67 =$$

$$= \frac{59.199,95}{\dfrac{1 - 1{,}04^{-(n-3)}}{0{,}04}} \times \frac{1 - 1{,}04^{-n+6}}{0{,}04}$$

Obteniendo que $n = 10$ años y $a = 9.863{,}28$. Por tanto, la cuantía del préstamo es: $C_0 = 9.863{,}28 \times a_{\overline{10}|0{,}04} = 80.000{,}04$ €.

Otro procedimiento es utilizando el método recurrente para relacionar el saldo en 3 y en 6. Así, tenemos:

$$C_6 = C_3(1 + i)^3 - a \times s_{\overline{3}|i} \quad \Rightarrow \quad 35.802,67 = 59.199,95 \times 1{,}04^3 - a \times s_{\overline{3}|0{,}04} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = 9.863{,}28$$

Utilizando de nuevo el mismo método, se verifica:

$$59.199,95 = C_0 \times 1{,}04^3 - 9.863{,}28 \times s_{\overline{3}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 80.000{,}04\ €$$

© Ediciones Pirámide

Y finalmente, sustituyendo en $C_0 = a \times a_{\overline{10}|0,04}$, tenemos:

$$80.000,04 = 9.863,28 \times a_{\overline{n}|0,04} \quad \Rightarrow \quad n = 10 \text{ años}$$

11.3. MÉTODO AMERICANO

En este método podemos distinguir dos modalidades: método americano simple y método americano con fondo.

11.3.1. Método americano simple

Esta modalidad de amortización de préstamos se caracteriza por el hecho de que a lo largo de los ***n* − 1 períodos iniciales, el prestatario o deudor abona únicamente los intereses correspondientes.** Al final del último período, el prestatario, además de abonar los intereses correspondientes, devuelve íntegramente el principal del préstamo C_0. El gráfico de la operación de préstamo descrita es el siguiente:

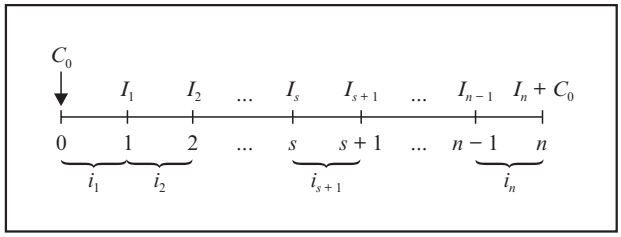


Figura 11.4.

En este tipo de operaciones, las $n - 1$ primeras cuotas de amortización son nulas, es decir: $A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = 0$, coincidiendo la última con el capital prestado: $A_n = C_0$. Además, como el prestatario abona periódicamente los intereses, el capital vivo al final de cada uno de los $n - 1$ primeros períodos siempre es el mismo e igual al principal: $C_1 = C_2 = ... = C_{n-1} = C_0$. En consecuencia, el total amortizado en los $n - 1$ primeros períodos es nulo: $M^e_{n-1} = \sum_{s=1}^{n-1} A_s = 0$, verificándose en el último período $M^e_n = C_0$.

En consecuencia, los términos amortizativos verifican:

$$a_s = A_s + I_s = 0 + I_s = C_0 \times i_s; \mid s = 1, 2, ..., n - 1$$

$$a_n = A_n + I_n = C_0 + C_0 \times i_n$$

© Ediciones Pirámide

Si el tipo de interés i es constante, las cuotas de interés también lo serán:

$$I_1 = I_2 = ... = I_n = C_0 \times i$$

EJERCICIO 11.4

Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar por el sistema americano en 5 años y al 6% anual. Calcular la cuantía de los términos amortizativos del préstamo.

Resolución

Como el tipo de interés es constante y las cuotas de amortización son nulas en los cuatro primeros años, el término amortizativo anual será:

$$a_s = A_s + I_s = 0 + I_s = 30.000 \times 0{,}06 = 1.800\ €, \mid s = 1, 2, 3, 4$$

En el último período, año 5, además de pagar la cuota de interés correspondiente, el prestatario debe devolver la cuantía total del préstamo, por lo que el término amortizativo será:

$$a_5 = A_n + I_n = 30.000 + 1.800 = 31.800\ €$$

11.3.2. Método americano con fondo

Esta modalidad, también denominada *sinking-fund,* se caracteriza por la **combinación de dos operaciones: una operación de amortización por el método americano simple y una operación de constitución** para formar el capital objeto del préstamo.

En la segunda operación, el deudor de la operación de préstamo entrega periódicamente una determinada cuantía, f_s, a fin de formar o constituir el capital objeto del préstamo C_s. Además, la operación de constitución es independiente de la operación de amortización y, por tanto, puede llevarse a cabo con el sujeto prestamista de la operación de préstamo o con otro sujeto, además de pactarse a un tipo de interés i'_s que no tiene que coincidir con el tipo de interés del préstamo i_s. En el supuesto que tanto el tipo de interés de la operación de constitución como los términos constitutivos sean constantes, se ha de verificar: $f \times s_{\overline{n}|i'} = C_0$. Transcurridos los s primeros períodos el montante constituido es: $F_s = f \times s_{\overline{s}|i'}$.

El diagrama de cada una de estas operaciones es el siguiente.

© Ediciones Pirámide

Operación de amortización:

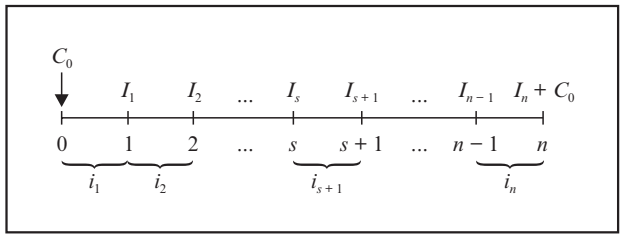


Figura 11.5.

Operación de constitución:

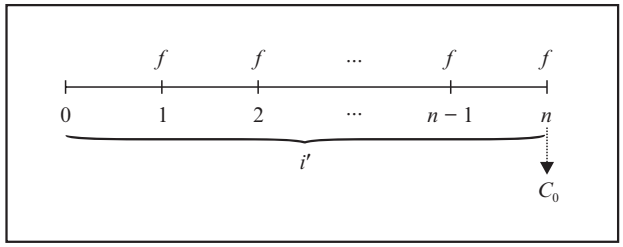


Figura 11.6.

En consecuencia, periódicamente el prestatario del préstamo abona un término a'_s que es la suma de la cuota de interés del préstamo y del término constitutivo del fondo: $a'_s = C_0 \times i_s + f$.

El capital pendiente de formar al final del período s o saldo neto de la operación conjunta es: $C'_s = C_0 - F_s = C_0 - f \times s_{\overline{s}|i'}$.

EJERCICIO 11.5

Sea un préstamo de 18.000 € a amortizar por el método americano en 4 años al 6% anual. Además, se contrata una operación de constitución al 2% anual. Calcular el saldo neto de la operación conjunta al final del segundo año.

Resolución

Para calcular el capital pendiente de constituir es necesario hallar la cuantía que el sujeto aporta periódicamente al fondo:

$$f \times s_{\overline{s}|i'} = C_0 \quad \Rightarrow \quad f \times s_{\overline{4}|0,02} = 18.000 \quad \Rightarrow \quad f = 4.367,23$$

© Ediciones Pirámide

El saldo neto de la operación conjunta al final de segundo año es:

$$C'_2 = C_0 - F_2 = 18.000 - 4.367{,}23 \times s_{\overline{2}|0{,}02} = 9.178{,}20 \text{ €}$$

EJERCICIO 11.6

Sea una operación de préstamo americano, a amortizar al 5% anual en 12 años, en la que el prestatario, a fin de disponer del principal del préstamo al final de su duración, realiza una operación de constitución al 3% anual. Si se sabe que la cuantía anual total que periódicamente el prestatario desembolsa por las dos operaciones es 7.227,73 €, hallar el importe de las cuotas de interés.

Resolución

Sabemos que la cuantía total que cada año desembolsa el sujeto prestatario para atender tanto la operación de préstamo como la de constitución verifica: $a' = 7.227{,}73 = C_0 \times i + f$, y teniendo en cuenta que $C_0 = f \times s_{\overline{n}|i}$, queda:

$$7.227{,}73 = C_0 \times 0{,}05 + \frac{C_0}{s_{\overline{12}|0{,}03}} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 60.000{,}04$$

Por consiguiente, el importe de la cada una de las cuotas de interés es:

$$I = 60.000{,}04 \times 0{,}05 = 3.000 \text{ €}$$

EJERCICIO 11.7

Se sabe que en un préstamo americano con fondo, de 10 años de duración, el saldo neto de la operación conjunta al final del octavo año es 9.632,11 € y que los tipos de interés anuales pactados en el préstamo y en la operación de constitución son el 6% y el 5%, respectivamente. Hallar el capital pendiente de constituir al principio del décimo año.

Resolución

Para hallar el capital pendiente de constituir o saldo neto al principio del décimo año es necesario conocer la cuantía que el sujeto aporta periódicamente al fondo. Para calcular dicha cuantía partimos del saldo neto al principio del noveno año:

$$C'_8 = C_0 - F_8 = f \times s_{\overline{10}|0{,}05} - f \times s_{\overline{8}|0{,}05} \quad \Rightarrow \quad 9.632{,}11 = f(s_{\overline{10}|0{,}05} - s_{\overline{8}|0{,}05}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f = 3.180{,}19$$

© Ediciones Pirámide

Una vez conocido el importe del término constitutivo, hallamos la cuantía del préstamo, así como el importe constituido hasta el final del noveno año:

$$C_0 = 3.180{,}19 \times s_{\overline{10}|0{,}05} = 40.000{,}09\ € \quad \text{y} \quad F_9 = 3.180{,}19 \times s_{\overline{9}|0{,}05} = 35.066{,}57$$

siendo el saldo neto al principio del décimo año:

$$C'_9 = C_0 - F_9 = 40.000{,}09 - 35.066{,}57 = 4.933{,}52\ €$$

11.4. MÉTODO DE CUOTA DE AMORTIZACIÓN CONSTANTE

Este método de amortización de préstamos, también denominado método italiano, tiene como hipótesis básica que las **cuotas de amortización o cuotas de capital son todas del mismo importe,** por lo que se verifica: $A_h = A | h = 1,2, ..., n$. En consecuencia:

$$C_0 = M_n^e = \sum_{h=1}^{n} A = n \times A \quad \Rightarrow \quad C_0 = n \times A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{C_0}{n}$$

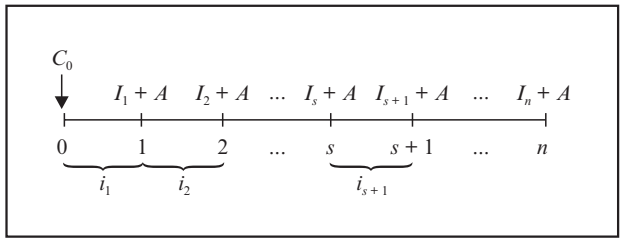


Figura 11.7.

a) Capital total amortizado

Al ser la cuota de amortización constante, el cálculo del capital amortizado hasta un determinado período s verifica:

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A = s \times A \quad \Rightarrow \quad M_s^e = s\frac{C_0}{n}$$

© Ediciones Pirámide

b) Capital vivo o saldo financiero

En este método, el cálculo del saldo, además de poder aplicar las fórmulas generales señaladas en la lección anterior, se puede realizar de una forma sencilla, a través del capital total amortizado:

$$C_s = C_0 - M_s^e = C_0 - s \times A = n \times A - s \times A$$

Por tanto, se tiene:

$$C_s = (n - s)\, A = \frac{(n - s)\, C_0}{n}$$

c) Ley de variación de los términos amortizativos cuando el tipo de interés es constante

Al ser constantes las cuotas de amortización, y variables las cuotas de interés, los términos amortizativos son variables. Y para el caso particular en el que los tipos de interés de valoración de la operación de préstamo sean constantes, $i_h = i | h = 1,2, ..., n$, la ley de variación de los términos amortizativos la podemos obtener calculando la diferencia aritmética entre los saldos correspondientes a dos períodos consecutivos, determinados por la ecuación dinámica de amortización:

$$\begin{gathered} C_s = C_{s-1}(1 + i) - a_s \\ C_{s+1} = C_s(1 + i) - a_{s+1} \\ \hline \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A}(1 + i) - a_s + a_{s+1} \Rightarrow a_{s+1} = a_s - A \times i \end{gathered}$$

De la expresión anterior se deduce que cuando el tipo de interés es constante, los términos amortizativos varían en progresión aritmética de razón: $d = -A \times i$. Por tanto, la cuantía de cualquier término, en función del primero, verifica:

$$a_s = a_1 + (s - 1)(-A \times i) = a_1 + (s - 1)\left(-\frac{C_0}{n}\, i\right)$$

Al ser $d < 0$, los términos amortizativos son decrecientes, por lo que hay que analizar si todos son positivos para que la operación de préstamo sea realizable. En este sentido, si se verifica que el último término amortizativo, a_n, es positivo, los demás también lo serán. Por tanto, vamos a comprobar que $a_n > 0$:

$$a_n = A + I_n = A + C_{n-1} \times i = A(1 + i) = \frac{C_0(1 + i)}{n} > 0$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, hemos demostrado que, aun siendo negativa la razón, la operación es posible, dado que todos los términos amortizativos son positivos.

Además, como en este caso los términos amortizativos constituyen una renta de términos variables en progresión aritmética, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$C_0 = A_{(a_1,\, d=A\times i)\overline{n}|i} = \left(a_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

EJERCICIO 11.8

Sea un préstamo de 40.000 € a amortizar mediante cuotas de capital constantes en 5 años al 7% anual. Calcular: *a*) la cuota de amortización constante, *b*) el término amortizativo del cuarto año y *c*) el capital amortizado hasta el final del año 4.

Resolución

a) Sabiendo que $C_0 = n \times A$, si despejamos obtendremos el importe de la cuota de capital:

$$A = \frac{40.000}{5} = 8.000 \text{ €}$$

b) El término amortizativo del cuarto año lo podemos hallar como suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización correspondientes a dicho año:

$$a_4 = A + I_4 = A + C_3 \times i = A + (n-3)\, A \times i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_4 = 8.000 + (5-3)\, 8.000 \times 0{,}07 = 9.120 \text{ €}$$

c) El capital amortizado hasta el año 4 es:

$$M_4^e = 4 \times A = 4 \times 8.000 = 32.000 \text{ €}$$

EJERCICIO 11.9

Sea un préstamo de duración *n* años, amortizable anualmente a través de cuotas de capital constantes y a un tipo de interés anual del 4% para los seis primeros años y del 6% para el resto de los años. Si el importe de la cuota de interés del

© Ediciones Pirámide

segundo año es 2.520 € y la cuantía total que paga el prestatario en el séptimo año es 8.680 €, hallar la cuantía del préstamo y su duración.

Resolución

Al tratarse de un préstamo italiano, se verifica: $C_0 = n \times A$. Sabiendo que $2.520 = I_2 = C_1 \times 0{,}04 = (n - 1)\,A \times 0{,}04$ y que la cuantía que anualmente paga el prestatario es el importe del término amortizativo, siendo para el séptimo año igual a $8.680 = a_7 = I_7 + A = C_6 \times 0{,}06 + A = (n - 6)\,A \times 0{,}06 + A$, por lo que tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo llegamos a que $n =$ 10 años y $A = 7.000$. Por tanto, el principal del préstamo es:

$$C_0 = 10 \times 7.000 = 70.000 \text{ €}$$

EJERCICIO 11.10

Si en un préstamo amortizable anualmente al 5% anual en 9 años, con cuota de amortización constante, el término amortizativo del tercer año es 13.500 €, hallar el saldo al principio del sexto año.

Resolución

El término amortizativo del tercer año verifica:

$$13.500 = 0{,}05 \times C_2 + A$$

Siendo $C_2 = (9 - 2)\,A$, queda:

$$13.500 = 0{,}05 \times 7A + A \quad \Rightarrow \quad A = 10.000$$

En consecuencia, $C_0 = 9A = 90.000$ €, y el saldo al principio del sexto año es:

$$C_5 = C_0 - 5A = 90.000 - 50.000 = 40.000 \text{ €}$$

11.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Las cuotas de amortización séptima y novena de un préstamo francés de duración 12 años ascienden, respectivamente, a 5.051,52 € y 5.569,30 €. Hallar el saldo al final del octavo año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Como las cuotas de amortización en el préstamo francés varían en progresión geométrica de razón $1 + i$, si relacionamos la cuotas de amortización séptima y novena podemos hallar el tipo de interés anual del préstamo:

$$A_9 = A_7(1 + i)^2 \quad \Rightarrow \quad 5.569{,}30 = 5.051{,}52\,(1 + i)^2 \Rightarrow i = 0{,}05$$

Con el tipo de interés y una cuota de amortización podemos hallar la primera cuota de amortización:

$$A_7 = A_1(1 + i)^6 \quad \Rightarrow \quad 5.051{,}52 = A_1(1 + 0{,}05)^6 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 3.769{,}52$$

Y a través de A_1 calculamos el saldo en 8 como diferencia entre la cuantía del préstamo y el capital amortizado hasta el final del año 8:

$$C_8 = C_0 - M_8^e = A_1 \times s_{\overline{n}|i} - A_1 \times s_{\overline{8}|i} = 3.769{,}52 \times s_{\overline{12}|0{,}05} - 3.769{,}52 \times s_{\overline{8}|0{,}05} =$$

$$= 24.004{,}37\ €$$

2. Un préstamo francés se amortiza al 4% anual en 8 años. Sabiendo que el capital amortizado hasta el cuarto año es 41.477,36 €, hallar la cuantía del término amortizativo.

Resolución

A través del capital total amortizado podemos hallar la primera cuota de amortización:

$$M_4^e = A_1 \times s_{\overline{4}|i} \Rightarrow 41.477{,}36 = A_1 \times s_{\overline{4}|0{,}04} \Rightarrow A_1 = 9.767{,}51$$

Con dicha cuota podemos calcular el principal del préstamo:

$$C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i} = 9.767{,}51 \times s_{\overline{8}|0{,}04} = 90{,}000{,}05$$

A través de la ecuación de equivalencia financiera del préstamo obtenemos el término amortizativo constante:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 90.000{,}05 = a \times a_{\overline{8}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad a = 13.367{,}51\ €.$$

3. Sea una operación de préstamo americano de 150.000 € a amortizar en 15 años al 4% anual, en la que el prestatario, a fin de disponer del principal del préstamo al final de su duración, realiza una operación de constitución al 2,5% anual. Hallar la cuantía anual total que periódicamente el prestatario desembolsa por las dos operaciones.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Anualmente el prestatario paga los intereses del préstamo y realiza una dotación al fondo de constitución de cuantía f. Por tanto, para calcular la cuantía total que desembolsa anualmente a', hemos de hallar primero f:

$$C_0 = f \times S_{\overline{n}|i'} \quad \Rightarrow \quad 150.000 = f \times s_{\overline{15}|0,025} \quad \Rightarrow \quad f = 8.364,97$$

Consecuentemente:

$$a' = C_0 \times i + f = 150.000 \times 0,04 + 8.364,97 = 14.364,97 \text{ €}$$

4. Si en un préstamo amortizable al 5,5% anual, con cuota de amortización constante, el saldo al principio del año 5 es de 80.000 € y el capital total amortizado hasta el final del año 9 es de 90.000 €, hallar el importe de la cuota de interés del año 1.

Resolución

A través del capital total amortizado podemos hallar la cuantía de la cuota de capital:

$$M_9^c = 9 \times A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{90.000}{9} = 10.000$$

El capital vivo al final del año 4, en función de la cuota de amortización, verifica:

$$C_4 = (n - 4)\,A \quad \Rightarrow \quad 80.000 = (n - 4)\,10.000 \quad \Rightarrow \quad n = 12.$$

Por tanto, se trata de un préstamo de duración 12 años, y su cuantía es:

$$C_0 = 10.000 \times 12 = 120.000$$

La cuota de interés del primer año asciende a:

$$I_1 = 120.000 \times 0,055 = 6.600 \text{ €}$$

5. Se sabe que en un préstamo amortizable al 6% anual, con cuota de amortización constante, la cuantía del primer término amortizativo es 12.650 €, y el saldo al principio del año 7 asciende a 55.000 €. Calcular el importe del penúltimo término amortizativo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El penúltimo término amortizativo lo podemos hallar como:

$$a_{n-1} = A + I_{n-1} = A + C_{n-2} \times i = A + 2 \times A \times i$$

Por tanto, para su cálculo necesitamos conocer el importe de la cuota de capital, la cual obtendremos a partir de los datos del enunciado.

Sabemos que el primer término amortizativo verifica:

$$a_1 = A + I_1 = A + C_0 \times i = A + n \times A \times i = A(1 + n \times i) \Rightarrow 12.650 = A(1 + 0{,}06n)$$

Despejando A de la ecuación anterior, tenemos:

$$A = \frac{12.650}{1 + 0{,}06n}$$

A su vez, el capital vivo al principio del año 7 se puede obtener como:

$$C_6 = (n - 6)\,A \quad \Rightarrow \quad 55.000 = (n - 6)\,A$$

Si sustituimos en esta ecuación la cuota de amortización por la expresión hallada anteriormente, obtenemos el número de años de duración del préstamo:

$$55.000 = (n - 6)\,\frac{12.650}{1 + 0{,}06n} \quad \Rightarrow \quad n = 14$$

Una vez conocida la duración del préstamo podemos hallar el importe de la cuota de capital:

$$A = \frac{12.650}{1 + 0{,}06 \times 14} = 6.875$$

lo cual ya nos permitirá calcular el importe del penúltimo término amortizativo:

$$a_{n-1} = 6.875(1 + 2 \times 0{,}06) = 7.700\ €$$

11.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea un préstamo francés de 90.000 € a amortizar en 12 años al 6% anual. Calcular: *a*) el capital amortizado hasta el final del año 10; *b*) el saldo al principio del octavo año, y *c*) la quinta cuota de amortización.

© Ediciones Pirámide

2. En un préstamo amortizable al 5% anual, por el método francés, se sabe que la cuota de amortización del décimo año y el saldo al principio del séptimo año ascienden a 8.527,96 € y 92.658,50 €, respectivamente. Calcular el importe de la cuota de interés del tercer año.

3. Se sabe que el importe de 6.300 € corresponde a la cuota de interés del tercer año de un préstamo que se amortiza al 7% anual, con términos anuales durante 10 años, por el método americano. Además, el prestatario con el fin de constituir al final de los 10 años la cuantía del préstamo, contrata, a su vez, una operación de constitución, al 3,0301% anual, con cuantías cuatrimestrales pospagables constantes. Determinar el saldo neto de la operación conjunta al final del sexto año.

4. Si en un préstamo americano con fondo, de 10 años de duración, el saldo neto de la operación conjunta al final del quinto año es 60.130,72 € y el tipo de interés de la operación de constitución es el 3% anual, hallar la cuantía del préstamo.

5. Sea una operación de préstamo, al 4% de interés anual, amortizable con cuota de amortización constante anual de 9.500 €. Si el saldo al principio del octavo año es 28.500 €, calcular el capital del préstamo.

6. En un préstamo de cuota anual de capital constante, los saldos al principio de los años 7 y 9 son, respectivamente, 60.000 € y 40.000 €. Hallar su duración.

7. En un determinado préstamo amortizable al 6% anual en 12 años, a través de términos amortizativos anuales constantes, se conoce que el capital amortizado desde el cuarto año hasta el octavo (ambos inclusive) es 37.409,94 €. Hallar: *a*) la cuota de amortización del tercer año y *b*) el principal del préstamo.

8. Sea un préstamo pactado a un tipo de interés anual *i*, amortizable en 10 años, de la siguiente forma: los primeros cuatro años a través de cuotas de capital constantes de 8.000 €, y el resto de los años con términos amortizativos constantes. Si se sabe que los importes de las cuotas de amortización que se abonan en el sexto y octavo año son, respectivamente, 10.497,05 € y 11.573 €, hallar la cuota de interés del tercer año.

© Ediciones Pirámide

12 Otros métodos de amortización de préstamos

OBJETIVOS

- Describir y analizar las características básicas y las relaciones específicas en los préstamos con términos variables en progresión geométrica, en progresión aritmética, en las operaciones de amortización con intereses fraccionados y en los préstamos con intereses anticipados.
- Analizar las operaciones de amortización de préstamos en el caso de existir períodos de carencia o de diferimiento.

SUMARIO

12.1. Introducción.
12.2. Amortización con términos variables en progresión geométrica.
12.3. Amortización con términos variables en progresión aritmética.
12.4. Amortización con intereses fraccionados.
12.5. Amortización con períodos de carencia y de diferimiento.
12.6. Amortización con intereses anticipados.
12.7. Ejercicios y problemas resueltos.
12.8. Ejercicios y problemas propuestos.

12.1. INTRODUCCIÓN

La amortización de un préstamo con contraprestación múltiple se puede plantear con cualquier modalidad de renta, atendiendo su estudio, en términos generales, a lo especificado en la lección 10. No obstante, aparte de los métodos clásicos de amortización de préstamos analizados en la lección 11, también destacamos los préstamos amortizables a través de términos amortizativos variables en progresión geométrica, en progresión aritmética, los amortizables con intereses fraccionados y los préstamos con pago de intereses anticipados. Dada la peculiaridad de estos préstamos, en esta lección vamos a estudiar las características generales de cada uno de ellos.

12.2. AMORTIZACIÓN CON TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Un préstamo amortizable con términos variables en progresión geométrica se caracteriza por ser una operación financiera en la que cada término amortizativo, excepto el primero, es igual al anterior multiplicado por una cuantía constante q denominada razón: $a_s = a_{s-1} \times q$, siendo a_s y a_{s-1} los términos amortizativos de los períodos s y $s - 1$, respectivamente. Si expresamos el término amortizativo del período s en función del correspondiente al primer período a_1, tenemos: $a_s = a_1 \times q^{s-1}$. Además, para que la operación de préstamo sea posible, todos los términos amortizativos deben ser positivos, por lo que la razón q necesariamente ha de ser positiva. El gráfico de la operación de préstamo descrita es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

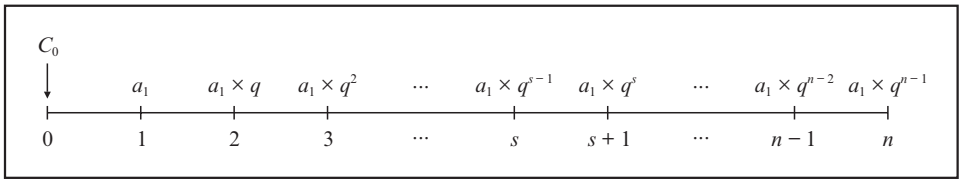


Figura 12.1.

A continuación vamos a plantear la ecuación de equivalencia financiera, el saldo financiero o capital vivo, la ley de variación de las cuotas de amortización y el capital total amortizado en un préstamo amortizable con las características señaladas en el caso particular de que el tipo de interés sea constante.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

Al constituir los términos amortizativos una renta variable en progresión geométrica, la cuantía del préstamo C_0 verifica:

$$C_0 = A_{(a_1,\, q)\overline{n}|i} = a_1 \frac{\left[1 - \dfrac{q^n}{(1+i)^n}\right]}{1 + i - q} = a_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1 + i - q}$$

En la hipótesis particular en la que los términos amortizativos varían con razón $q = 1 + i$, la ecuación de equivalencia financiera es:

$$C_0 = A_{(a_1,\, q=1+i)\overline{n}|i} = \frac{a_1 \times n}{1 + i}$$

b) Capital vivo o saldo financiero

El capital vivo en un determinado momento del tiempo se puede hallar a través de los distintos métodos estudiados en la lección 10, esto es, recurrente, retrospectivo y prospectivo.

b.1) *Método recurrente*

Con el **método recurrente** podemos calcular el capital vivo al final de un período s a partir del capital vivo al principio de dicho período:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i) - a_s = C_{s-1}(1 + i) - a_1 \times q^{s-1}$$

© Ediciones Pirámide

b.2) Método retrospectivo

A través del **método retrospectivo** nos centramos en la operación vencida y hallamos el capital vivo como diferencia entre el valor en el punto s de la prestación vencida y el valor en dicho punto de la contraprestación vencida:

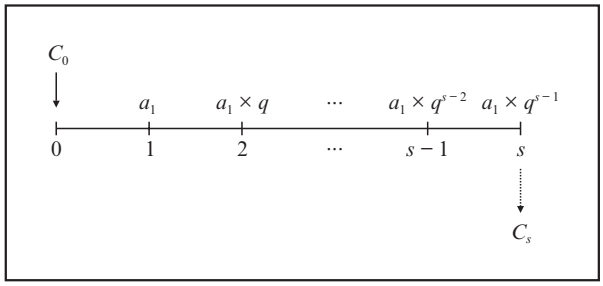


Figura 12.2.

Analíticamente:

$$C_s = C_0(1+i)^s - S_{(a_1,\, q)\overline{s}|i} = C_0(1+i)^s - a_1\frac{1-q^s(1+i)^{-s}}{1+i-q}(1+i)^s$$

Si los términos amortizativos varían con razón $q = 1 + i$, la expresión que permite obtener el saldo por el método retrospectivo es la siguiente:

$$C_s = C_0(1+i)^s - S_{(a_1,\, q=1+i)\overline{s}|i} = C_0(1+i)^s - \frac{a_1 \times s}{1+i}(1+i)^s$$

b.3) Método prospectivo

Mediante el **método prospectivo,** el capital vivo al final del período s es el valor en dicho punto de la contraprestación futura:

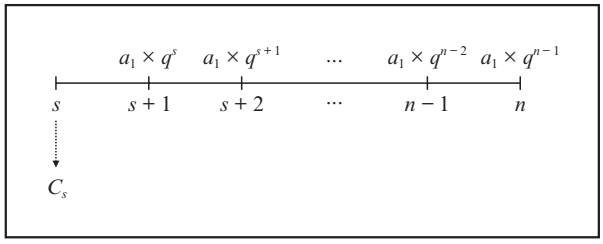


Figura 12.3.

© Ediciones Pirámide

Se verifica:

$$C_s = A_{(a_{s+1},\, q)\overline{n-s}|i} = a_{s+1}\frac{1 - q^{n-s}(1+i)^{-(n-s)}}{1 + i - q}$$

Si en la ecuación anterior expresamos a_{s+1} en función de a_1, $a_{s+1} = a_1 \times q^s$, tenemos:

$$C_s = a_1 \times q^s \frac{1 - q^{n-s}(1+i)^{-(n-s)}}{1 + i - q}$$

En la hipótesis de que los términos amortizativos varíen con razón $q = 1 + i$, la expresión que permite obtener el saldo por el método prospectivo es:

$$C_s = A_{(a_{s+1},\, q=1+i)\overline{n-s}|i} = \frac{a_1 \times q^s (n-s)}{1+i} = \frac{a_{s+1}(n-s)}{1+i}$$

***c*) Ley de variación de las cuotas de amortización**

Si aplicamos la ecuación dinámica de amortización en dos períodos consecutivos y calculamos la diferencia de ambas expresiones, obtenemos la ley de variación de las cuotas de amortización:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

$$\left.\begin{array}{l} C_{s+1} = C_s(1+i) - a_{s+1} \\ \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{C_{s-1} - C_s}_{A_s}(1+i) - a_s + a_{s+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s + a_{s+1} \quad \Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s(1-q)$$

***d*) Capital total amortizado**

El capital total amortizado hasta un determinado momento s, M_s^e, lo podemos hallar bien como la suma de las cuotas de amortización vencidas hasta dicho momento o bien como diferencia aritmética entre la cuantía del préstamo y el capital vivo en dicho punto: $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$.

EJERCICIO 12.1

Sea un préstamo de 60.000 € a amortizar en 8 años, a un tipo de interés del 4,5% anual, mediante términos amortizativos anuales que crecen un 3% cada año.

© Ediciones Pirámide

Calcular: *a*) la cuantía del tercer término amortizativo; *b*) el capital pendiente de amortizar al final del año 4 a través del método retrospectivo; *c*) el saldo al final del año 5 a través del método prospectivo; *d*) la cuota de amortización del año 5, y *e*) el capital amortizado hasta el final del año 5.

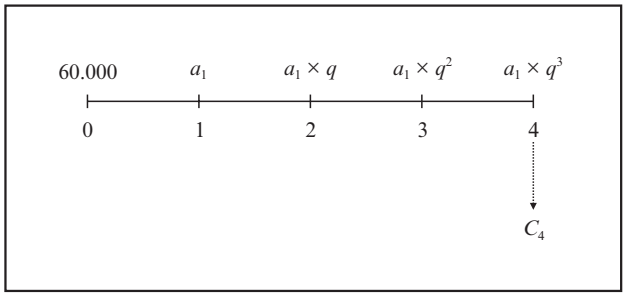
Resolución

a) Los términos amortizativos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}03$. Para hallar el tercer término amortizativo, necesitamos conocer el primero: $a_3 = a_1 \times q^2$. A fin de calcular a_1 planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = A_{(a_1,\, q=1{,}03)\overline{8}|0{,}045} \quad \Rightarrow \quad 60.000 = a_1 \frac{1 - 1{,}03^8 \times 1{,}045^{-8}}{1 + 0{,}045 - 1{,}03} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 8.239{,}79.$$

Siendo: $a_3 = 8.239{,}79 \times 1{,}03^2 = 8.741{,}59$ €.

b) Para calcular el capital vivo al final del año 4 a través del método retrospectivo, hallamos la diferencia entre el valor financiero en 4 de la prestación y la contraprestación vencidas:

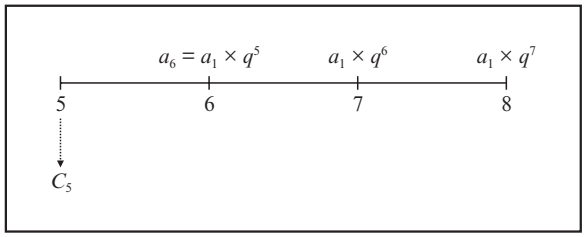


$$C_4 = 60.000(1 + 0{,}045)^4 - S_{(a_1,\, q=1{,}03)\overline{4}|0{,}045}$$

$$C_4 = 60.000 \times 1{,}045^4 - 8.239{,}79 \frac{1 - 1{,}03^4 \times 1{,}045^{-4}}{1{,}045 - 1{,}03} \times 1{,}045^4 = 34.741{,}34 \text{ €}$$

c) Para hallar el capital pendiente de amortizar al final del año 5 mediante el método prospectivo, tenemos que calcular en dicho punto la suma financiera de los términos amortizativos pendientes de vencimiento, es decir, el valor actual de la renta constituida por los términos amortizativos no vencidos:

© Ediciones Pirámide



$$C_5 = A_{(a_6,\ q=1{,}03)\overline{8-5}|0{,}045} = 8.239{,}79 \times 1{,}03^5 \frac{1 - 1{,}03^3 \times 1{,}045^{-3}}{1{,}045 - 1{,}03} = 27.030{,}78 - 57\ €$$

d) La cuota de amortización del año 5 la podemos hallar detrayendo al quinto término amortizativo la cuota de interés de dicho año: $A_5 = a_5 - I_5 = a_1 \times q^4 - C_4 \times i \Rightarrow A_5 = 8.239{,}79 \times 1{,}03^4 - 34.741{,}34 \times 0{,}045 = 7.710{,}60$ €.

e) El capital amortizado hasta el año 5 lo podemos obtener como diferencia entre la cuantía del préstamo y el saldo vivo en dicho punto: $M_5^e = C_0 - C_5 = 60.000 - 27.030{,}77 = 32.969{,}23$ €.

12.3. AMORTIZACIÓN CON TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Un préstamo amortizable con términos variables en progresión aritmética es aquel en el que cada término, excepto el primero, es igual al anterior incrementado en una cuantía constante *d* denominada razón: $a_s = a_{s-1} + d$, siendo a_s y a_{s-1} los términos amortizativos de los períodos s y $s - 1$, respectivamente. En consecuencia, cualquier término amortizativo puede expresarse en función del primero: $a_s = a_1 + (s - 1) \times d$.

La razón *d* puede tomar valores negativos, debiéndose verificar en este caso que todos los términos amortizativos sean positivos, para que la operación financiera pueda realizarse. Por tanto, dado que $a_1 > 0$, si la razón *d* es negativa, se debe cumplir que $a_n > 0$: $a_n = a_1 + (n - 1) \times d > 0$.

El gráfico de esta operación es el siguiente:

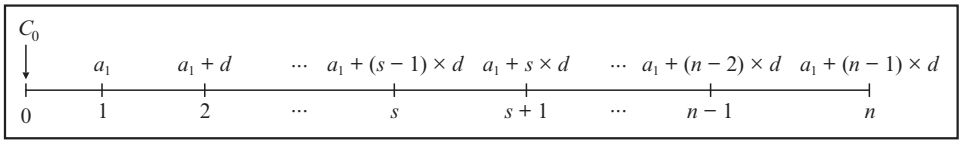


Figura 12.4.

© Ediciones Pirámide

A continuación realizaremos el planteamiento de la ecuación de equivalencia financiera, el cálculo del saldo, la variación de las cuotas de amortización y el capital total amortizado en un préstamo amortizable con las características señaladas en la hipótesis particular de que el tipo de interés sea constante.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

La cuantía del préstamo C_0 es igual al valor actual de una renta variable en progresión aritmética, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés *i*:

$$C_0 = A_{(a_1,\, d)\overline{n}|i} = \left(a_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

b) Capital vivo o saldo financiero

*b.*1) *Método recurrente*

De acuerdo con este método, podemos calcular el saldo al final de un período *s* a través de la siguiente igualdad: $C_s = C_{s-1}(1 + i) - a_s$.

*b.*2) *Método retrospectivo*

Para calcular el saldo por este método, consideramos la parte de la operación vencida:

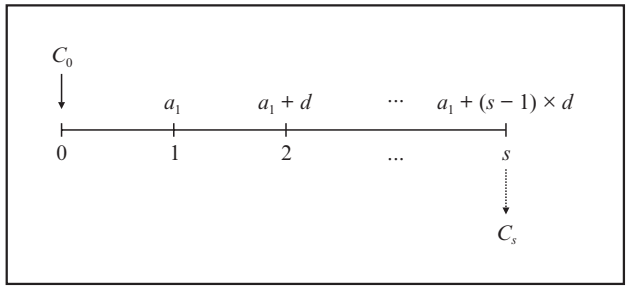


Figura 12.5.

Analíticamente:

$$C_s = C_0(1 + \mathrm{i})^s - S_{(a_1,\, d)\overline{s}|i} = C_0(1 + \mathrm{i})^s - \left[\left(a_1 + d \times s + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{s}|i} - \frac{d \times s}{i}\right](1 + i)^s$$

© Ediciones Pirámide

b.3) *Método prospectivo*

El siguiente gráfico muestra las cuantías pendientes de vencimiento al final del período *s*:

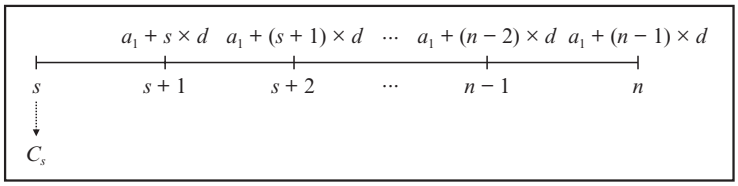


Figura 12.6.

Se verifica:

$$C_s = A_{(a_{s+1},\, d)\overline{n-s}|i} = \left[a_{s+1} + d(n-s) + \frac{d}{i}\right] \times a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d(n-s)}{i}$$

c) Ley de variación de las cuotas de amortización

Si calculamos la diferencia entre la ecuación dinámica de amortización para dos períodos consecutivos, tenemos:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

$$\frac{C_{s+1} = C_s(1+i) - a_{s+1}}{\underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}(1+i) - a_s + a_{s+1} \quad \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s + a_s + d \quad \Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) + d$$

Teniendo en cuenta cómo varían las cuotas de amortización, también podemos hallar la cuota de amortización del período $s + 1$ en función de la primera cuota:

$$A_2 = A_1(1+i) + d$$

$$A_3 = A_2(1+i) + d = [A_1(1+i) + d](1+i) + d = A_1(1+i)^2 + d(1+i) + d$$

$$A_4 = A_3(1+i) + d = [A_1(1+i)^2 + d(1+i) + d](1+i) + d = A_1(1+i)^3 + d(1+i)^2 + d(1+i) + d$$

$$\vdots$$

$$A_{s+1} = A_1(1+i)^s + d(1+i)^{s-1} + d(1+i)^{s-2} + \ldots + d(1+i) + d \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_{s+1} = A_1(1+i)^s + d \times s_{\overline{s}|i}$$

© Ediciones Pirámide

d) Capital total amortizado

El capital total amortizado hasta un determinado momento s, M_s^e, lo podemos hallar bien como la suma de las cuotas de amortización vencidas hasta dicho momento o bien como diferencia aritmética entre la cuantía del préstamo y el capital vivo en dicho punto: $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$.

EJERCICIO 12.2

Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar en 6 años, a un tipo de interés del 4% anual, mediante términos amortizativos anuales que aumentan cada año en 300 €. Calcular: *a*) la cuantía del primer término amortizativo; *b*) el capital vivo al final del año 3 a través del método retrospectivo; *c*) el saldo al final del año 4 a través del método prospectivo; *d*) la cuota de amortización del año 5, y *e*) el capital amortizado hasta el final del año 4.

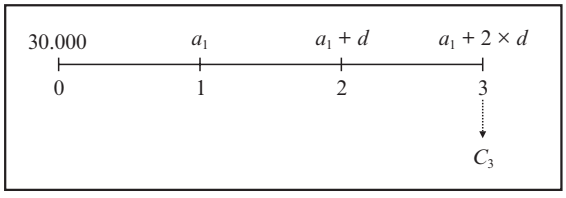
Resolución

a) Los términos amortizativos varían en progresión aritmética de razón $d = 300$. Para hallar el primer término a_1 planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = A_{(a_1,\, d=300)\overline{6}|0,04} \quad \Rightarrow \quad 30.000 = \left(a_1 + 300 \times 6 + \frac{300}{0,04}\right) \times$$

$$\times\, a_{\overline{6}|0,04} - \frac{300 \times 6}{0,04} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5.007,14\ €$$

b) Para calcular el capital vivo al final del año 3 mediante el método retrospectivo calculamos la diferencia entre el valor financiero en 3 de la prestación y el de la contraprestación vencidas:



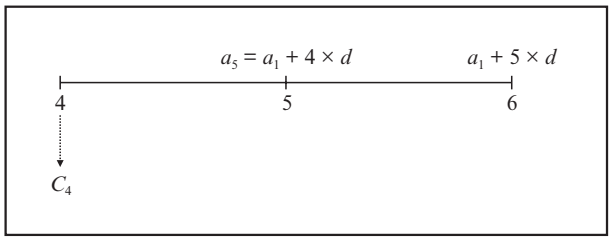
$$C_3 = 30.000 \times (1 + 0,04)^3 - S_{(a_1,\, d=300)\overline{3}|0,04}$$

$$C_3 = 30.000 \times 1,04^3 - \left[\left(5.007,14 + 300 \times 3 + \frac{300}{0,04}\right) \times a_{\overline{3}|0,04} - \frac{300 \times 3}{0,04}\right] \times$$

$$\times\, 1,04^3 = 17.203,63\ €$$

© Ediciones Pirámide

c) El saldo al final del año 4 a través del método prospectivo lo calculamos como el valor financiero en 4 de la renta constituida por los términos amortizativos pendientes de vencer:



$$C_4 = A_{(a_5,\, d=300)\overline{6-4}|0,04} = \left[(5.007{,}14 + 300 \times 4) + 300 \times 2 + \frac{300}{0{,}04}\right] \times$$

$$\times\, a_{\overline{2}|0,04} - \frac{300 \times 2}{0{,}04} = 11.984{,}62\ €$$

d) La cuota de amortización del año 5 la podemos hallar a través de la correspondiente al primer año: $A_5 = A_1(1 + i)^4 + d \times s_{\overline{4}|i}$. Para ello primero calcularemos A_1: $A_1 = a_1 - I_1 = a_1 - C_0 \times i = 5.007{,}14 - 30.000 \times 0{,}04 = 3.807{,}14$. Por tanto, $A_5 = 3.807{,}14 \times 1{,}04^4 + 300 \times s_{\overline{4}|0,04} = 5.727{,}75$ €.

e) El capital amortizado hasta el final del año 4 lo obtenemos a través de la siguiente expresión: $M_4^e = C_0 - C_4 = 30.000 - 11.984{,}62 = 18.015{,}38$ €.

12.4. AMORTIZACIÓN CON INTERESES FRACCIONADOS

12.4.1. Planteamiento general

La amortización de préstamos con intereses fraccionados se caracteriza por presentar una periodicidad en el pago de las cuotas de interés inferior a la periodicidad en el pago de las cuotas de amortización. Por tanto, este método implica lo siguiente:

a) Cada período se divide en *m* subperíodos.

b) Al final de cada uno de los subperíodos se abona una cuota de interés: $I_{s,\,h} = C_{s-1} \times i_{s,\,h}^{(m)}$, siendo $I_{s,\,h}$ la cuota de interés que se abona al final del subperíodo *h*, dentro del período *s*, e $i_{s,\,h}^{(m)}$ es el tipo de interés para dicho subperíodo *h* de amplitud $\frac{1}{m}$.

© Ediciones Pirámide

c) Las cuotas de amortización se abonan al final de cada uno de los períodos.

El gráfico de esta operación es el siguiente:

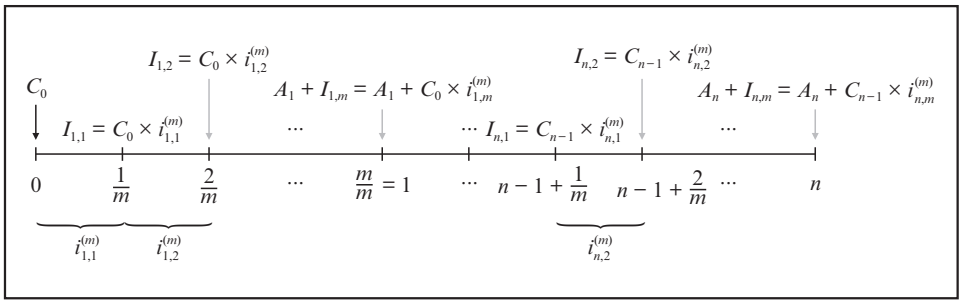


Figura 12.7.

Por tanto, en este tipo de préstamos, en cada período se abonan m términos amortizativos pospagables (uno al final de cada subperíodo), siendo los $m - 1$ primeros términos iguales a la cuota de interés del subperíodo correspondiente, mientras que el término amortizativo del final del período (subperíodo m) incluye además la cuota de amortización. De esta forma, la cuantía del término amortizativo $a_{s,h}$ que se abona en cada uno de los subperíodos del período s es:

$$a_{s,h} = \begin{cases} I_{s,h} = C_{s-1} \times i^{(m)}_{s,h}; \mid h = 1,2, ..., m-1 \\ I_{s,h} + A_s = C_{s-1} \times i^{(m)}_{s,h}\ A_s; \mid h = m \end{cases}$$

A efectos de simplificar el estudio de este tipo de préstamos vamos a hallar el valor financiero al final del período s de las m cuotas de interés que se abonan a lo largo de dicho período:

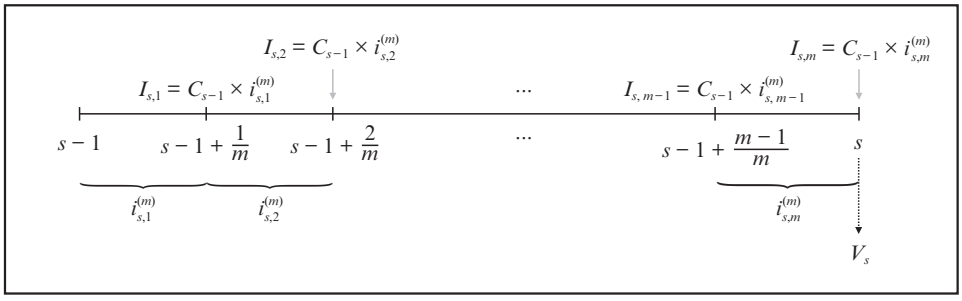


Figura 12.8.

© Ediciones Pirámide

$$V_s = C_{s-1} \times i_{s,1}^{(m)}(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + C_{s-1} \times i_{s,2}^{(m)} (1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times$$

$$\times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + ... + C_{s-1} \times i_{s,m}^{(m)} = C_{s-1}[i_{s,1}^{(m)}(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) +$$

$$+ i_{s,2}^{(m)} (1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + ... + i_{s,m}^{(m)}]$$

Si en la expresión anterior denominamos i_s al tipo de interés del período equivalente a los m tipos de interés de los subperíodos en que se divide el período s, tenemos:

$$i_s = i_{s,1}^{(m)}(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + i_{s,2}^{(m)} (1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + ... + i_{s,m}^{(m)}$$

Por consiguiente, se verifica: $V_s = C_{s-1} \times i_s$.

Otra forma de obtener el tipo i_s es aplicando la relación entre tantos equivalentes en capitalización compuesta:

$$1 + i_s = (1 + i_{s,1}^{(m)})(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)})$$

Si el tipo de interés de los superíodos permanece constante a lo largo del período, se verifica: $i_{s,h}^{(m)} = i_{s,1}^{(m)} = i_{s,2}^{(m)} = ... = i_{s,m}^{(m)} = i_s^{(m)} \Rightarrow i_{s,h}^{(m)} = i_s^{(m)}; \mid h = 1, 2, ..., m$, pudiéndose obtener el tipo de interés del período i_s equivalente a los m tipos de interés de los subperíodos a través de la siguiente expresión:

$$i_s = i_s^{(m)}(1 + i_s^{(m)})^{m-1} + i_s^{(m)}(1 + i_s^{(m)})^{m-2} + i_s^{(m)}(1 + i_s^{(m)})^{m-3} + ... + i_s^{(m)} = i_s^{(m)} \times s_{\overline{m}|i_s^{(m)}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i_s = i_s^{(m)} \times s_{\overline{m}|i_s^{(m)}} = i_s^{(m)} \frac{(1 + i_s^{(m)})^m - 1}{i_s^{(m)}} = (1 + i_s^{(m)})^m - 1$$

Y por tanto: $(1 + i_s) = (1 + i_s^{(m)})^m$.

De acuerdo con lo expuesto podemos sustituir las m cuotas de interés de cada uno de los subperíodos por el valor de su suma financiera al final de cada período (para el período s sería $I_s = C_{s-1} \times i_s$). El gráfico resultante es:

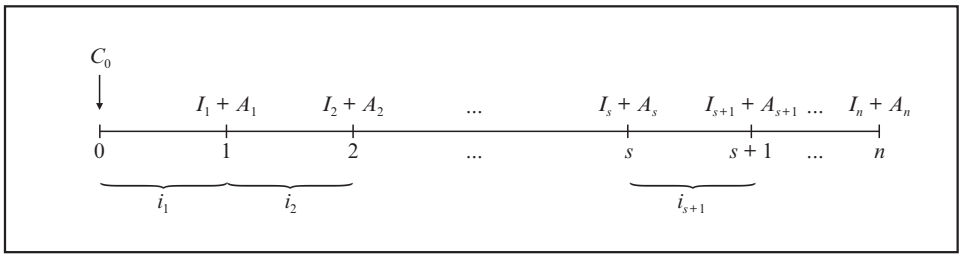


Figura 12.9.

© Ediciones Pirámide

La sustitución del conjunto de las m cuotas de interés en cada período por una única cuota de interés equivalente al final del período no altera la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación. En consecuencia, se pone de manifiesto que también podemos considerar que el préstamo se amortiza con n términos amortizativos de cuantías $a_s = C_{s-1} \times i_s + A_s$, con vencimiento al final de cada período s, que constituyen los términos amortizativos de un **préstamo equivalente** al préstamo con intereses fraccionados. Se tiene, pues, que cada término amortizativo del préstamo equivalente es el valor financiero al final del período respectivo de todos los términos amortizativos que vencen a lo largo de dicho período en el préstamo con intereses fraccionados.

Es importante resaltar que la sustitución del conjunto de las m cuotas de interés en cada período por una única cuota de interés equivalente al final del período, si bien no altera la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación, sí modifica la dinámica de la amortización, dado que el préstamo equivalente supone que se abonan términos amortizativos con la periodicidad de la unidad de tiempo, mientras que en el préstamo con intereses fraccionados su periodicidad es $\frac{1}{m}$.

De acuerdo con lo señalado, como en ambos préstamos (préstamo con intereses fraccionados y préstamo equivalente) las cuotas de amortización se abonan al final de cada período, el importe del saldo o capital vivo, de las cuotas de amortización y del capital total amortizado, es el mismo en los dos préstamos. Por tanto, para determinar dichas magnitudes en un préstamo con intereses fraccionados, podemos realizarlo a través del planteamiento de su préstamo equivalente, pudiendo aplicar a este préstamo las expresiones generales vistas en las lecciones anteriores.

Las relaciones existentes entre el préstamo con intereses fraccionados y su préstamo equivalente podemos resumirlas en las siguientes:

a) El saldo o capital vivo en un determinado punto s es el mismo en ambos préstamos.

b) Las cuotas de amortización son idénticas en ambos casos.

c) El capital total amortizado hasta un determinado punto s coincide en ambos préstamos.

d) Las cuotas de interés y los términos amortizativos de ambos préstamos son distintos, pero equivalentes financieramente.

e) El tipo de interés de cada uno de los períodos del préstamo equivalente es el equivalente a los tipos de interés de los subperíodos en que se divide cada período en el préstamo con intereses fraccionados.

f) El préstamo equivalente tiene como cuota de interés el valor financiero, al final del período, de todas las cuotas de interés que se abonan en los respectivos m subperíodos en los que se divide cada período en el préstamo con intereses fraccionados.

© Ediciones Pirámide

g) El préstamo equivalente tiene como término amortizativo en cada período el valor financiero al final del período de todos los pagos (términos amortizativos) que se realizan a lo largo del período en el préstamo con intereses fraccionados.

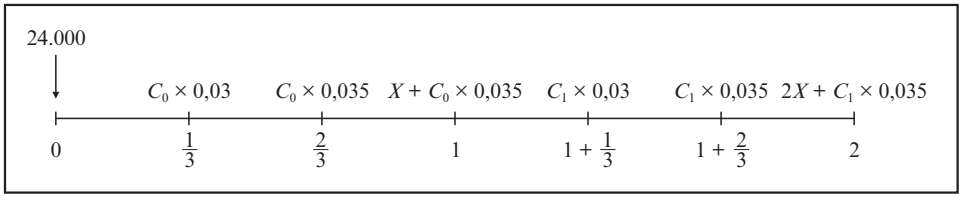
EJERCICIO 12.3

Sea un préstamo de 24.000 € a amortizar en 2 años, con pago de intereses cuatrimestrales y cuotas de amortización anuales iguales a X y a $2X$ para el primer y segundo año, respectivamente. El tipo de interés pactado es el 3% cuatrimestral para el primer cuatrimestre de cada año y el 3,5% cuatrimestral para el segundo y el tercer cuatrimestre de cada año. Se pide: *a*) la cuantía de las cuotas de amortización; *b*) los importes que abona el prestatario; *c*) los términos amortizativos del préstamo equivalente, y *d*) el cuadro de amortización.

Resolución

a) La cuantía del préstamo se amortiza a través de dos cuotas de amortización anuales, siendo una el doble de la otra, por lo que se verifica: $24.000 = X + 2X \Rightarrow X = 8.000$, siendo la primera cuota de amortización de 8.000 € y la segunda de 16.000 €.

b) Al ser las cuotas de amortización anuales y las cuotas de interés cuatrimestrales, tenemos que el importe de los términos amortizativos correspondientes a los dos primeros cuatrimestres de cada año coincide con el de la cuota de interés, mientras que los términos amortizativos del último cuatrimestre de cada año son iguales a la suma de la cuota de interés cuatrimestral y la cuota de amortización anual. El gráfico de la operación es el siguiente:



Los términos amortizativos de esta operación son:

$$a_{1,1} = I_{1,1} = C_0 \times i_{1,1}^{(m)} = 24.000 \times 0{,}03 = 720 \text{ €}$$

$$a_{1,2} = I_{1,2} = C_0 \times i_{1,2}^{(m)} = 24.000 \times 0{,}035 = 840 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

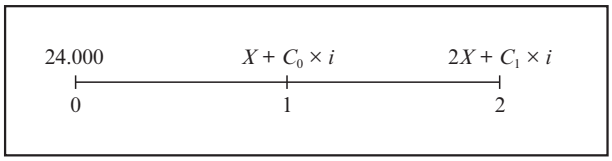
$$a_{1,3} = I_{1,3} + A_1 = C_0 \times i_{1,3}^{(m)} + X = 24.000 \times 0{,}035 + 8.000 = 8.840\ €$$

$$a_{2,1} = I_{2,1} = C_1 \times i_{2,1}^{(m)} = (24.000 - 8.000) \times 0{,}03 = 480\ €$$

$$a_{2,2} = I_{2,2} = C_1 \times i_{2,2}^{(m)} = 16.000 \times 0{,}035 = 560\ €$$

$$a_{2,3} = I_{2,3} + A_2 = C_1 \times i_{2,3}^{(m)} + 2X = 16.000 \times 0{,}035 + 16.000 = 16.560\ €$$

c) El préstamo anual equivalente es el siguiente:



Para calcular el importe de sus términos amortizativos, previamente hemos de hallar el tipo de interés anual equivalente a los tipos de interés cuatrimestrales. En este caso, como los tipos de interés cuatrimestrales para el año 1 son iguales a los del año 2, el tipo de interés anual equivalente será único, obteniéndose:

$$(1 + i) = (1 + 0{,}03)(1 + 0{,}035)^2 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}10336175$$

El importe de los términos amortizativos del préstamo equivalente es:

$$a_1 = I_1 + A_1 = C_0 \times i + X = 24.000 \times 0{,}10336175 + 8.000 = 10.480{,}68\ €$$

$$a_2 = I_2 + A_2 = C_1 \times i + 2X = 16.000 \times 0{,}10336175 + 16.000 = 17.653{,}79\ €$$

d) El cuadro de amortización por períodos cuatrimestrales es el siguiente:

Per.	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Capital total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	24.000
1	0,03	720	720	0	0	24.000
2	0,035	840	840	0	0	24.000
3	0,035	8.840	840	8.000	8.000	16.000
4	0,03	480	480	0	8.000	16.000
5	0,035	560	560	0	8.000	16.000
6	0,035	16.560	560	16.000	24.000	0

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.4

Sea un préstamo de 120.000 € a amortizar en 10 años, con pago de intereses semestrales y cuotas de amortización anuales variables en progresión aritmética de razón 1.000 €. Si el tipo de interés pactado es el 6% nominal anual pagadero semestralmente, hallar: *a*) el capital total amortizado en los ocho primeros años, y *b*) el importe de la décima cuota de interés.

Resolución

La cuantía del préstamo es la suma aritmética de las cuotas de amortización, y como éstas varían en progresión aritmética, se verifica:

$$C_0 = M_n^e = \frac{(A_1 + A_n) \times n}{2} = \frac{(A_1 + A_1 + 9 \times d) \times n}{2}$$

Por tanto:

$$M_n^e = 120.000 = \frac{(A_1 + A_1 + 9 \times 1.000) \times 10}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 7.500$$

a) El capital total amortizado en los ocho primeros años lo podemos hallar a través de la suma aritmética de las ocho primeras cuotas de amortización; teniendo en cuenta que tales cuotas varían en progresión aritmética de razón 1.000 €, tenemos:

$$M_8^e = \frac{(A_1 + A_8) \times 8}{2} = \frac{(A_1 + A_1 + 7 \times d) \times 8}{2} =$$
$$= \frac{(2 \times 7.500 + 7 \times 1.000) \times 8}{2} = 88.000 \text{ €}$$

b) La décima cuota de interés del préstamo corresponde a la segunda cuota semestral de interés del quinto año del préstamo. Dicha cuota se calcula a partir del saldo vivo al final del primer semestre del quinto año, el cual, al ser las cuotas de amortización anuales, coincide con el saldo vivo al final del cuarto año: $I_{5,2} = I_5 = C_4 \times i^{(m)}$. Por tanto, necesitamos hallar previamente tanto el saldo vivo en 4 como el tipo de interés semestral.

El saldo vivo en 4 lo podemos calcular como diferencia entre el principal del préstamo y el total amortizado hasta 4:

$$C_4 = C_0 - M_4^e = C_0 - \frac{(A_1 + A_4) \times 4}{2} = 120.000 -$$
$$- \frac{(7.500 + 7.500 + 3 \times 1.000) \times 4}{2} = 84.000$$

© Ediciones Pirámide

Si la operación se valora al 6% nominal pagadero semestralmente, el tipo de interés semestral es el 3%, pudiéndose hallar finalmente la décima cuota de interés del préstamo: $I_{5,2} = I_5 = C_4 \times i^{(m)} = 84.000 \times 0{,}03 = 2.520$ €.

12.4.2. Casos particulares

***a*) Préstamo con intereses fraccionados cuyo préstamo equivalente es un préstamo amortizable por el método francés**

En este caso, la operación de préstamo amortizable con intereses fraccionados debe pactarse a un tipo de interés del subperíodo constante a lo largo de toda la operación, verificándose: $i^{(m)}_{s,\,h} = i^{(m)}$; $\mid h = 1, 2, ..., m$; $s = 1, 2, ..., n$, y además el valor financiero al final de cada período de todos los capitales con vencimiento en el mismo período es de cuantía constante: $a_s = a$; $\mid s = 1, 2, ..., n$. El gráfico de esta operación financiera es el siguiente:

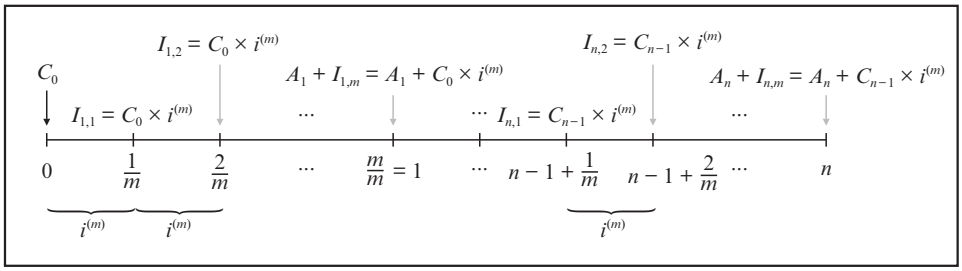


Figura 12.10.

Para un mismo período, las cuotas de interés de los respectivos subperíodos son constantes e iguales a: $I_{s,h} = C_{s-1} \times i^{(m)}$; $\forall h = 1{,}2, ..., m$.

El gráfico del préstamo equivalente es:

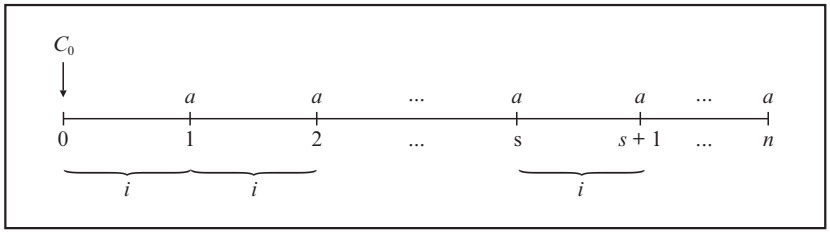


Figura 12.11.

© Ediciones Pirámide

Tal y como hemos demostrado anteriormente, la cuantía de cada término amortizativo del préstamo equivalente verifica $a_s = C_{s-1} \times i_s + A_s$. Y teniendo en cuenta que tanto el tipo de interés como el término amortizativo equivalente son constantes, se verifica: $a = C_{s-1} \times i + A_s$. En consecuencia, nos encontramos con un préstamo equivalente que se amortiza por el método francés, siéndole de aplicación todas las expresiones de dicho método.

EJERCICIO 12.5

Sea un préstamo de 40.000 € a amortizar en 4 años, con pago de intereses semestrales al 4% nominal anual, cuotas de amortización anuales, en el que el valor financiero al final de cada año de todos los pagos que se realizan en el mismo es constante. Calcular: *a*) la cuantía del primer término amortizativo; *b*) la cuota de amortización del año 1; *c*) la cuota de amortización del año 3; *d*) la cuota de interés del tercer y cuarto semestre; *e*) el saldo al final del año 2, y *f*) el capital amortizado hasta el final del año 3.

Resolución

a) El primer término amortizativo del préstamo pactado es el que se abona al final del primer semestre y es igual a la cuota de interés de dicho semestre, dado que las cuotas de amortización son anuales, no abonándose, por tanto, ninguna cuota de capital en el citado semestre. Para este cálculo necesitamos conocer el tipo de interés semestral, el cual lo hallaremos a partir del tanto nominal anual dado: $i^{(m)} = \dfrac{0{,}04}{2} = 0{,}02$. La cuantía del término amortizativo del primer semestre del año 1 es: $a_{1,1} = I_{1,1} + 0 = C_0 \times i_{1,1}^{(m)} = C_0 \times i^{(m)} = 40.000 \times 0{,}02 = 800$ €.

b) Esta operación de préstamo con intereses fraccionados, al pactarse con tipo de interés constante y con el requisito además de que el valor financiero a final de cada año de todos los términos amortizativos semestrales sea constante, presenta como préstamo equivalente un préstamo francés. Por tanto, para calcular la primera cuota de amortización vamos a basarnos en el préstamo francés equivalente, en el que se cumple: $M_n^e = C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i}$, siendo i el tipo de interés anual equivalente al 2% semestral: $(1 + i) = (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow i = 0{,}0404$. Por consiguiente, $40.000 = A_1 \times s_{\overline{4}|0{,}0404} \Rightarrow A_1 = 9.413{,}99$ €.

c) Si nos basamos en el préstamo equivalente francés, la cuota de amortización del año 3 la podemos obtener a partir de la primera cuota: $A_3 = A_1(1 + i)^{3-1} =$ $= 9.413{,}99 \times 1{,}0404^2 = 10.190{,}01$ €.

© Ediciones Pirámide

d) La cuota de interés del tercer semestre es la cuota de interés del primer semestre del año 2, y al ser el tipo de interés constante coincidirá con la cuota del segundo semestre de dicho año: $I_{2,1} = I_{2,2} = C_1 \times i^{(m)}$. Para hallar dicha cuota necesitamos conocer el saldo al final del año 1, y como las cuotas de amortización son anuales, podemos obtener C_1 a través de la siguiente expresión: $C_1 = C_0 - A_1 = 40.000 - 9.413{,}99 = 30.586{,}01$. Por consiguiente, $I_{2,1} = I_{2,2} = 30.586{,}01 \times 0{,}02 = 611{,}72$ €.

e) Dado que el saldo en la operación de préstamo con intereses fraccionados y en su préstamo equivalente coinciden, para hallar el capital vivo al final del año 2 lo haremos a través del préstamo francés equivalente: $C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$. Para ello previamente debemos calcular la cuantía del término amortizativo del préstamo equivalente francés: $C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 40.000 = a \times a_{\overline{4}|0{,}0404} \Rightarrow a = 11.029{,}99$, por lo cual: $C_2 = 11.029{,}99 \times a_{\overline{4-2}|0{,}0404} = 20.791{,}69$ €.

f) El capital amortizado hasta el año 3 en la operación de préstamo dada coincide con la de su préstamo equivalente francés: $M_3^e = A_1 \times s_{\overline{3}|0{,}0404} = 9.413{,}99 \times s_{\overline{3}|0{,}0404} = 29.398{,}31$ €.

---

b) Préstamo con intereses fraccionados y cuotas de amortización constantes

En una operación de préstamo amortizable con intereses fraccionados y cuotas de capital constantes $A_s = A$; $\forall s = 1,2, ..., n$, el valor de las cuotas de amortización lo podemos calcular a través de la expresión: $C_0 = M_n^e = \sum_{h=1}^{n} A = n \times A \Rightarrow A = \frac{C_0}{n}$. Por tanto, para hallar el capital vivo C_s y el capital amortizado hasta un determinado punto del tiempo M_s^e podemos aplicar las expresiones ya deducidas para el método de amortización con cuotas de amortización constantes: $C_s = (n - s) \times A$ y $M_s^e = s \times A$, respectivamente.

La representación gráfica de esta operación es:

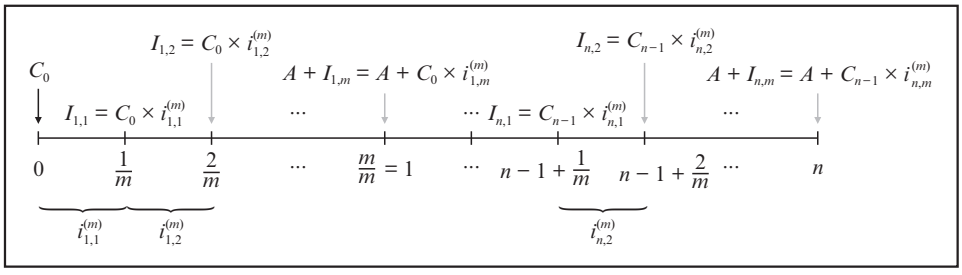


Figura 12.12.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.6

Sea un préstamo de 36.000 € a amortizar en 3 años, con pago de intereses trimestrales al 6% nominal anual y cuotas de amortización anuales constantes. Calcular: *a*) la cuantía de las cuotas de amortización anuales; *b*) la cuantía del cuarto término amortizativo; *c*) la cuota de interés del sexto trimestre; *d*) el saldo al final del año 2, y *e*) el capital total amortizado hasta el noveno trimestre.

Resolución

a) Al ser las cuotas de capital anuales constantes, su valor se obtiene al dividir la cuantía del préstamo entre el número de años que dura la operación: $C_0 = n \times A \Rightarrow 36.000 = 3 \times A \Rightarrow A = 12.000$ €.

b) El cuarto término amortizativo se abona al final del primer año, siendo, por tanto, igual a la cuota de interés del cuarto trimestre más la cuota de amortización anual: $a_{1,4} = I_{1,4} + A = C_0 \times i^{(m)}_{1,4} + A = C_0 \times i^{(m)} + A$. Para este cálculo tenemos que hallar el tipo de interés trimestral, el cual lo obtendremos a partir del tanto nominal anual dado: $i^{(m)} = \frac{0,06}{4} = 0,015$. El importe del término amortizativo del cuarto trimestre del año 1 es: $a_{1,4} = 36.000 \times 0,015 + 12.000 = 12.540$ €.

c) La cuota de interés del sexto trimestre es la cuota de interés del segundo trimestre del año 2: $I_{2,2}$. Además, dado que en esta operación las cuotas de amortización son anuales y el tipo de interés es constante, todas las cuotas de interés trimestrales de un mismo año serán de igual cuantía: $I_{2,1} = I_{2,2} = I_{2,3} = I_{2,4} = C_1 \times i^{(m)}$. Por tanto, para dicho cálculo previamente debemos hallar el capital vivo al final del año 1: $C_1 = 2 \times A = 2 \times 12.000 = 24.000$ €. Por tanto, $I_{2,2} = 24.000 \times 0,015 = 360$ €.

d) El préstamo termina de amortizarse en el año 3, por lo que el capital vivo al principio del mismo, o al final del año 2, coincide con la cuota de amortización del último año: $C_2 = A = 12.000$ €.

e) Al ser las cuotas de amortización anuales, el capital total amortizado hasta el noveno trimestre (primer trimestre del año 3) coincide con el capital total amortizado hasta el final del año 2, el cual permanece constante hasta el tercer trimestre del año 3: $M^e_{3,1} = M^e_2 = 2 \times A = 2 \times 12.000 = 24.000$ €.

© Ediciones Pirámide

12.5. AMORTIZACIÓN CON PERÍODOS DE CARENCIA Y DE DIFERIMIENTO

12.5.1. Préstamo con períodos de carencia

Un préstamo con períodos de carencia es una operación financiera de amortización en la que el prestatario sólo satisface en dichos períodos las cuotas de interés, no abonando cuota de capital o de amortización alguna. De este modo, en los períodos de carencia, los términos amortizativos son de igual cuantía que las cuotas de interés correspondientes: $a_s = I_s$. Por tanto, como en los períodos de carencia el prestatario siempre abona los intereses que se van generando en la operación, el saldo o capital vivo del préstamo permanece constante. Por consiguiente, para un período s de carencia se verifica:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i_s) - a_s = C_{s-1}(1 + i_s) - I_s = C_{s-1}(1 + i_s) - C_{s-1} \times i_s = C_{s-1}$$

En el resto de los períodos de la operación, el préstamo se amortizará con términos que incluyen cuotas de amortización.

Si suponemos que los s primeros períodos de un préstamo son de carencia, la representación gráfica de esta operación es la siguiente:

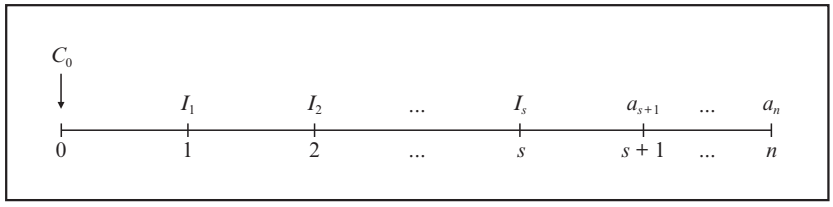


Figura 12.13.

En el caso que la operación financiera se pacte a un tipo de interés constante e igual a i, la ecuación de equivalencia financiera en el origen verifica:

$$C_0 = C_0 \times i \times a_{\overline{s}|i} + \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + i)^{-(s+h)}$$

Y el saldo al final de período s, coincidente con el capital inicial, verifica:

$$C_s = C_0 = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + i)^{-h}$$

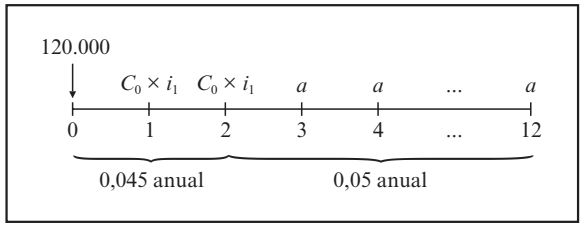
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.7

Sea un préstamo de 120.000 € a amortizar en 12 años, a un tipo de interés del 4,5% anual para los dos primeros años y del 5% anual para el resto del período, a amortizar con los dos primeros años de carencia, y después a través de pagos anuales constantes. Calcular la cuantía anual de los términos amortizativos que ha de abonar el prestatario.

Resolución

El importe del término amortizativo de los dos primeros años será igual a la cuota de interés, dado que al ser los dos primeros años de carencia el prestatario no devolverá capital, pagando sólo los intereses correspondientes. Además, como el tipo de interés para los dos primeros años es constante, la cuota de interés también lo es, y, por tanto, el término amortizativo de tales períodos también será constante, verificándose: $a_1 = a_2 = C_0 \times i_1 = 120.000 \times 0{,}045 = 5.400$ €. Gráficamente:



Para calcular el importe de los restantes términos amortizativos, planteamos la ecuación del saldo al final del año 2: $C_2 = C_0 = 120.000 = a \times a_{\overline{12-2}|0,05} \Rightarrow a =$ = 15.540,55 €.

12.5.2. Préstamo con períodos de diferimiento

Un préstamo con períodos de diferimiento es una operación financiera de amortización en la que el prestatario no abona cuantía alguna durante dichos períodos. Por tanto, durante tales períodos la cuantía del término amortizativo es nula, lo que implica que el capital vivo aumenta en la cuantía de los intereses que no se van satisfaciendo. Así, el capital vivo al final de un período de diferimiento s es: $C_s = C_{s-1}(1 + i_s)$.

Si suponemos que los s primeros períodos de un préstamo son de diferimiento, la representación gráfica de esta operación es la siguiente:

© Ediciones Pirámide

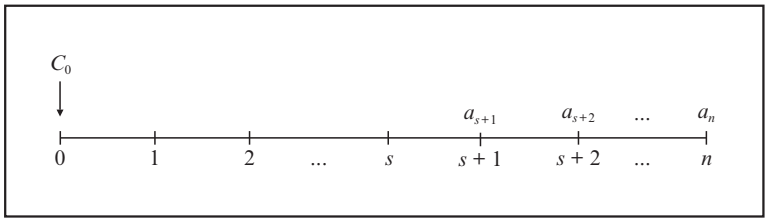


Figura 12.14.

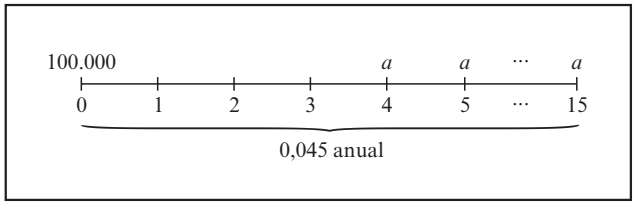
Si el préstamo se pacta a un tipo de interés constante i, la ecuación de equivalencia financiera en el origen es: $C_0 = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-(s+h)}$. En este caso, el capital vivo al final del último período de diferimiento verifica: $C_s = C_0(1+i)^s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-h}$.

EJERCICIO 12.8

Sea un préstamo de 100.000 € a amortizar en 15 años, a un tipo de interés del 4,5% anual, en el que el prestatario no abona cuantía alguna en los tres primeros años y términos amortizativos anuales constantes el resto de los años. Calcular la cuantía anual que paga el prestatario.

Resolución

El importe del término amortizativo lo podemos hallar planteando la expresión de cálculo del saldo al final del año 3 (último año de diferimiento): $C_3 = a \times \times a_{\overline{15-3}|0{,}045}$. Gráficamente:



El saldo en 3 verifica: $C_3 = 100.000(1 + 0{,}045)^3 = 114.116{,}61$. Por tanto: $114.116{,}61 = a \times a_{\overline{15-3}|0{,}045} \Rightarrow a = 12.514{,}73$ €.

© Ediciones Pirámide

12.6. AMORTIZACIÓN CON INTERESES ANTICIPADOS

12.6.1. Planteamiento general

Un préstamo con contraprestación múltiple y con intereses anticipados o prepagables es una operación financiera en la que las cuotas de interés se pagan al principio de cada período, es decir, de forma anticipada.

La cuantía neta, C_0, que el prestatario percibe al principio de la operación es la resultante de detraer al importe nominal del préstamo, C_0^*, la cuota de interés anticipada correspondiente al primer período, I_1^*, esto es: $C_0 = C_0^* - I_1^* = C_0^* - C_0^* \times i_1^* = C_0^*(1 - i_1^*)$, siendo i_1^* el tipo de interés anticipado unitario correspondiente al período 1.

En este tipo de préstamos el término amortizativo, a_s, de cada período s, está compuesto por la cuota de amortización nominal de dicho período, A_s^*, cuya misión es ir devolviendo el principal del préstamo C_0^*, y la cuota de interés, I_{s+1}^*, correspondiente al período siguiente: $a_s = A_s^* + I_{s+1}^*$.

La operación descrita con tipos de interés unitarios prepagables variables, i_s^*, queda definida de la siguiente forma:

Prestación neta: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación neta: $\{(a_1, 1); (a_2, 2); ...; (a_n, n)\}$

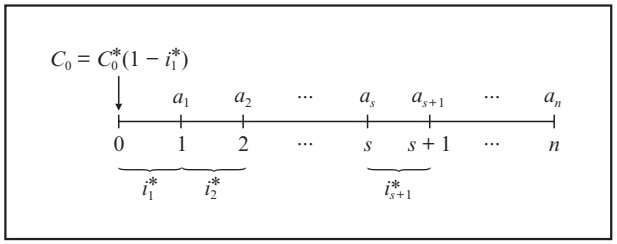


Figura 12.15.

Teniendo en cuenta que la cuota de amortización nominal de un determinado período s recoge la variación del capital nominal vivo en dicho período: $A_s^* = C_{s-1}^* - C_s^*$, y que la cuota de interés prepagable que se abona al principio del período $s + 1$ se obtiene al multiplicar el capital nominal vivo en dicho momento, C_s^*, por el tipo unitario de interés anticipado del período $s + 1$, $I_{s+1}^* = C_s^* \times i_{s+1}^*$, el término amortizativo de un período s cualquiera, a_s, se puede expresar en función de cada uno de sus componentes como: $a_s = A_s^* + I_{s+1}^* = C_{s-1}^* - C_s^* + C_s^* \times i_{s+1}^* = C_{s-1}^* - C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$.

© Ediciones Pirámide

En el último período se verifica $a_n = A_n^* = C_{n-1}^*$, pues los intereses del período $s + 1$ son nulos: $I_{n+1}^* = 0$.

En este tipo de préstamos, al abonarse los intereses de forma anticipada, el saldo nominal en un determinado período *s,* C_s^*, es lo que realmente se debe a la izquierda de $s + 1$, es decir, constituye al saldo o reserva matemática al final del período siguiente antes de abonarse la cuantía de a_{s+1}: $R_{s+1}^- = C_s^*$. Gráficamente:

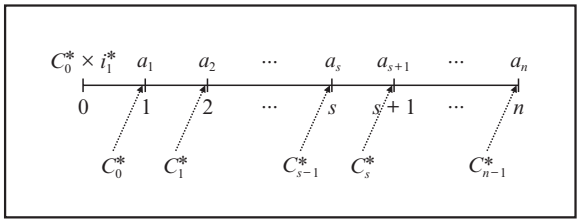


Figura 12.16.

Por otro lado, lo que realmente se debe al final del período *s* se denomina saldo neto, C_s, que es la diferencia entre el saldo nominal y los intereses ya abonados del período siguiente: $C_s = C_s^* - i_{s+1}^* \times C_s^* = C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$. Dicho saldo neto es la reserva matemática calculada a la derecha de dicho punto *s*: $R_s^+ = C_s$, es decir, el capital adeudado en *s* una vez abonado el término amortizativo de dicho período. Gráficamente:

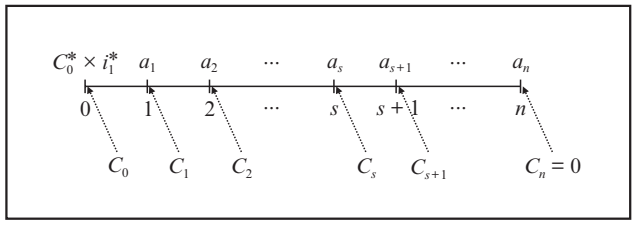


Figura 12.17.

Asimismo, a la diferencia entre los saldos netos al principio y al final de un determinado período se le denomina cuota de amortización neta: $A_s = C_{s-1} - C_s$.

Por otra parte, si en la expresión del término amortizativo, $a_s = C_{s-1}^* - C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$, expresamos los saldos nominales en función de los saldos netos, se verifica: $a_s = C_{s-1}(1 - i_s^*)^{-1} - C_s$. Además, si tenemos en cuenta la relación de equivalencia entre el tipo de interés prepagable y el pospagable, $(1 - i_s^*)(1 + i_s) = 1$, llegamos a la siguiente expresión: $a_s = C_{s-1}(1 + i_s) - C_s$.

© Ediciones Pirámide

Si despejamos de la ecuación anterior el saldo neto, obtenemos la ecuación dinámica del capital vivo en un préstamo amortizable con intereses pospagables equivalente al préstamo dado: $C_s = C_{s-1}(1 - i_s) - a_s$.

En consecuencia, con los tipos de interés pospagables equivalentes a los tipos anticipados pactados, a las cuantías netas les son de aplicación todas las expresiones de los préstamos valorados con intereses pospagables. El gráfico del **préstamo equivalente** amortizable con intereses pospagables es el siguiente:

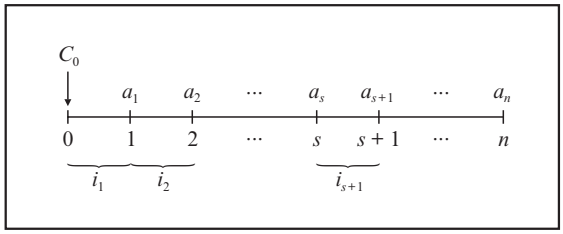


Figura 12.18.

A continuación analizamos, en función de los tipos de interés prepagables, la ecuación de equivalencia financiera, el capital nominal vivo, el capital total amortizado y el cuadro de amortización.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

Si planteamos en el origen de la operación la ecuación de equivalencia financiera, tenemos:

$$C_0^*(1 - i_1^*) = a_1(1 - i_1^*) + a_2\prod_{h=1}^{2}(1 - i_h^*) + ... + a_n\prod_{h=1}^{n}(1 - i_h^*) = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s}(1 - i_h^*)$$

Si valoramos la operación a un tipo de interés prepagable constante e igual a i^*, la ecuación de equivalencia financiera en el origen es la siguiente:

$$C_0^*(1 - i^*) = a_1(1 - i^*) + a_2(1 - i^*)^2 + ... + a_n(1 - i^*)^n \quad \Rightarrow \quad C_0 = \sum_{h=1}^{n} a_h(1 - i^*)^h$$

b) Capital nominal vivo o saldo financiero nominal

Para determinar C_s^*, capital nominal vivo en un determinado período s, hay que tener en cuenta que éste hace referencia al saldo financiero a la izquierda del extremo superior del intervalo temporal correspondiente al período siguiente, es

© Ediciones Pirámide

decir, a la reserva matemática calculada a la izquierda del punto $s + 1$. Dicho saldo se puede hallar a través de los distintos métodos estudiados: recurrente, retrospectivo y prospectivo.

*b.*1) *Método recurrente*

Teniendo en cuenta la expresión ya deducida $a_s = C^*_{s-1} - C^*_s(1 - i^*_{s+1})$, al realizar operaciones se llega a: $C^*_s = (C^*_{s-1} - a_s)(1 - i^*_{s+1})^{-1}$.

Como el capital neto verifica $C_s = C^*_s(1 - i^*_{s+1})$, de la ecuación precedente se deduce que el capital neto también se puede hallar como: $C_s = C^*_{s-1} - a_s$.

*b.*2) *Método retrospectivo*

Si nos fijamos exclusivamente en la parte de la operación vencida, calcularemos el capital nominal vivo mediante el **método retrospectivo:**

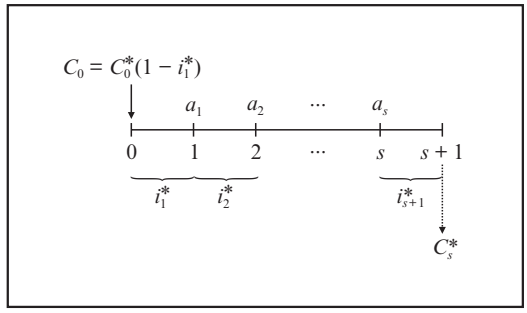


Figura 12.19.

$$C^*_s = C^*_0(1 - i^*_1)\prod_{h=1}^{s+1}(1 - i^*_h)^{-1} - a_1\prod_{h=2}^{s+1}(1 - i^*_h)^{-1} - a_2\prod_{h=3}^{s+1}(1 - i^*_h)^{-1} - \ldots - a_s(1 - i^*_{s+1})^{-1}$$

Si el tipo de interés anticipado permanece constante e igual a i^*:

$$C^*_s = C^*_0(1 - i^*)(1 - i^*)^{-(s+1)} - a_1(1 - i^*)^{-s} - a_2(1 - i^*)^{-(s-1)} - \ldots - a_s(1 - i^*)^{-1}$$

*b.*3) *Método prospectivo*

Si nos centramos en la parte pendiente de vencer de la operación, hallaremos el capital nominal vivo por el **método prospectivo**:

© Ediciones Pirámide

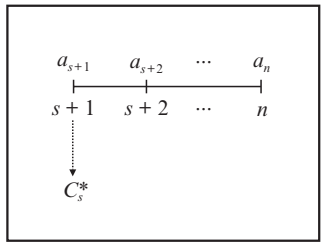


Figura 12.20.

$$C_s^* = a_{s+1} + a_{s+2}(1 - i_{s+2}^*) + a_{s+3}\prod_{h=s+2}^{s+3}(1 - i_h^*) + ... + a_n\prod_{h=s+2}^{n}(1 - i_h^*)$$

Si el tipo de interés prepagable se mantiene constante e igual a i^* para todos los períodos:

$$C_s^* = a_{s+1} + a_{s+2}(1 - i^*) + a_{s+3}(1 - i^*)^2 + ... + a_n(1 - i^*)^{n-(s+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 - i^*)^{(h-1)}$$

c) Capital nominal total amortizado

El capital nominal total amortizado en los s primeros períodos M_s^{e*} lo podemos hallar bien como la suma de las cuotas de amortización nominales vencidas o bien como diferencia entre la cuantía nominal del préstamo y el capital nominal vivo después de s períodos: $M_s^{e*} = \sum_{h=1}^{s} A_h^* = C_0^* - C_s^*$

Despejando de la expresión anterior C_s^*, hallamos el capital nominal vivo a partir del capital nominal amortizado: $C_s^* = C_0^* - M_s^{e*} = \sum_{h=1}^{n} A_h^* - \sum_{h=1}^{s} A_h^* = \sum_{h=s+1}^{n} A_h^*$, así como a través de la suma aritmética de las cuotas de capital nominales pendientes de vencimiento.

d) Cuadro de amortización

El cuadro de amortización recoge para cada período de la operación de préstamo el valor de las siguientes magnitudes: tipo de interés anticipado, término amortizativo, cuota de interés, cuota de amortización nominal, capital nominal total amortizado y capital nominal vivo.

© Ediciones Pirámide

Per.	Tipo de interés anticipado i^*_{s+1}	Término amortizativo $(a_s = A^*_s + I^*_{s+1})$	Cuota de interés $(I^*_{s+1} = C^*_s \times i^*_{s+1})$	Cuota de amortización nominal $(A^*_s = a_s - I^*_{s+1})$	Capital nominal total amortizado $(M^{e*}_s = M^{e*}_{s-1} + A^*_s)$	Capital nominal vivo $(C^*_s = C^*_{s-1} - A^*_s)$
0	i^*_1	$a_0 = C^*_0 \times i^*_1$	$I^*_1 = C^*_0 \times i^*_1$	—	—	C^*_0
1	i^*_2	a_1	$I^*_2 = C^*_1 \times i^*_2$	$A^*_1 = a_1 - I^*_2$	$M^{e*}_1 = A^*_1$	$C^*_1 = C^*_0 - A^*_1$
2	i^*_3	a_2	$I^*_3 = C^*_2 \times i^*_3$	$A^*_2 = a_2 - I^*_3$	$M^{e*}_2 = M^{e*}_1 + A^*_2$	$C^*_2 = C^*_1 - A^*_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	i^*_n	a_{n-1}	$I^*_n = C^*_{n-1} \times i^*_n$	$A^*_{n-1} = a_{n-1} - I^*_n$	$M^{e*}_{n-1} = M^{e*}_{n-2} + A^*_{n-1}$	$C^*_{n-1} = C^*_{n-2} - A^*_{n-1} = A^*_n$
n	—	a_n	—	$A^*_n = a_n$	$M^{e*}_n = M^{e*}_{n-1} + A^*_n = C^*_0$	$C^*_n = C^*_{n-1} - A^*_n = 0$

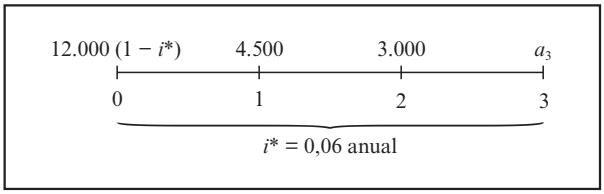
EJERCICIO 12.9

Sea un préstamo de 12.000 € a amortizar en 3 años, a un tipo de interés anticipado del 6% anual. Si se sabe que los términos amortizativos son anuales y que las cuantías de los términos amortizativos de los años 1 y 2 son 4.500 € y 3.000 €, respectivamente, determinar: *a*) la cuantía del tercer término amortizativo; *b*) el capital nominal vivo después de un año; *c*) el capital nominal vivo después de dos años; *d*) el saldo neto al final del año 2; *e*) el capital nominal amortizado en los dos primeros años; *f*) la cuota de amortización nominal del año 1, y *g*) el cuadro de amortización.

Resolución

a) La cuantía del tercer término amortizativo, a_3, la podemos obtener a través de la ecuación de equivalencia financiera de la operación de préstamo con intereses prepagables o bien a través de la ecuación de equivalencia financiera de su préstamo equivalente con intereses pospagables.

a.1) Préstamo amortizable con intereses anticipados:

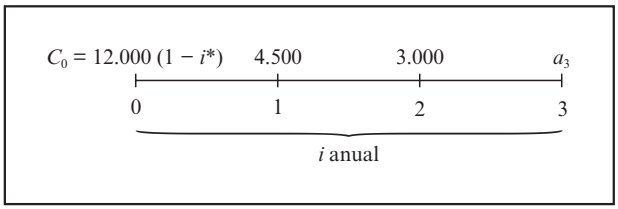


$$12.000(1 - 0{,}06) = 4.500(1 - 0{,}06) + 3.000(1 - 0{,}06)^2 + a_3(1 - 0{,}06)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = 5.296{,}51 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

a.2) Préstamo equivalente amortizable con intereses pospagables:

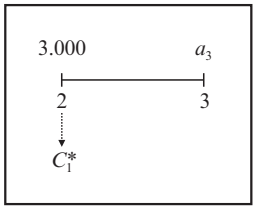


$$C_0 = 4.500(1 + i)^{-1} + 3.000(1 + i)^{-2} + a_3(1 + i)^{-3}$$

Para hallar a_3 necesitamos hallar el tipo de interés anual pospagable equivalente al prepagable dado: $(1 - 0{,}06)(1 + i) = 1 \Rightarrow i = 0{,}063829787$, y la cuantía neta del préstamo: $C_0 = C_0^* - I_1^* = C_0^*(1 - i^*) = 12.000(1 - 0{,}06) = 11.280$. Sustituyendo ambos datos en la ecuación de equivalencia financiera, obtenemos $a_3 = 5.296{,}51$ €.

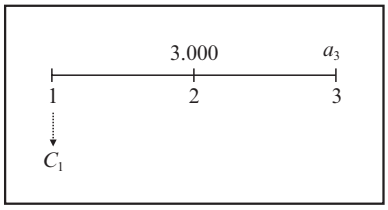
b) El capital nominal vivo después del primer año es el saldo financiero a la izquierda del punto 2, y a través del método prospectivo verifica:

b.1) Si lo determinamos a través del préstamo con intereses prepagables:



$$C_1^* = 3.000 + 5.296{,}51(1 - 0{,}06) = 7.978{,}72\ €$$

b.2) Si lo calculamos con el préstamo equivalente con intereses pospagables, tenemos: $C_s = C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$, o, lo que es lo mismo, $C_s = C_s^*(1 + i_{s+1})^{-1}$.

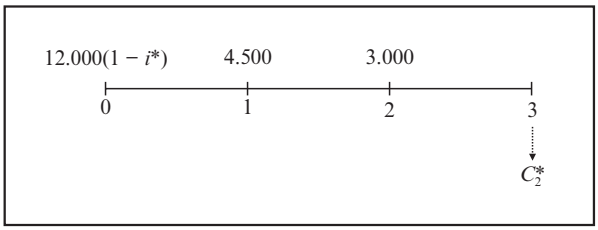


$$C_1 = 3.000(1 + 0{,}063829787)^{-1} + 5.296{,}51(1 + 0{,}063829787)^{-2} = 7.500 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_1^* = 7.500(1 - 0{,}06)^{-1} = 7.500(1 + 0{,}063829787) = 7.978{,}72\ €$$

© Ediciones Pirámide

c) El capital nominal vivo después de dos años es el saldo financiero a la izquierda del punto 3. A través del método retrospectivo se verifica:

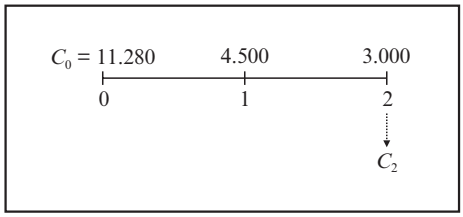
c.1)



$$C_2^* = 12.000(1 - 0{,}06)(1 - 0{,}06)^{-3} - 4.500(1 - 0{,}06)^{-2} -$$
$$- 3.000(1 - 0{,}06)^{-1} = 5.296{,}51\ €$$

Tal y como se ha expuesto, el importe del capital pendiente de vencer a la izquierda del punto 3 coincide con la cuantía del último término amortizativo, dado que se trata de un préstamo con pago prepagable de intereses. Por tanto, el último término amortizativo es igual a la última cuota de capital nominal, ya que en 3 finaliza la operación, por lo que no se devenga cuota de interés alguna al ser ésta prepagable, habiéndose abonado la cuota de interés correspondiente a dicho año al principio del mismo, es decir, en 2.

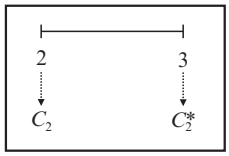
c.2) Además, también podemos hallarlo a través del préstamo equivalente, determinando primero su saldo neto en 2, para posteriormente calcular el citado nominal:



$$C_2 = 11.280(1 + 0{,}063829787)^2 - 4.500(1 + 0{,}063829787) - 3.000 = 4.978{,}72\ € \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_2^* = 4.978{,}72(1 - 0{,}06)^{-1} = 4.978{,}72(1 + 0{,}063829787) = 5.296{,}51\ €$$

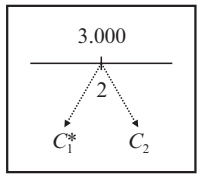
d) El saldo neto al final del año 2 se puede hallar de diversas formas. Calculado a través del nominal vivo después de dos años, tenemos:

© Ediciones Pirámide



$$C_2 = C_2^*(1 - i^*) = 5.296{,}51(1 - 0{,}06) = 4.978{,}72\ €$$

Si lo determinamos a través del nominal vivo después de un año, es decir, calculando la reserva a la derecha del punto 2 a partir del saldo a la izquierda de dicho punto, se verifica:



$$C_2 = C_1^* - a_2 = 7.978{,}72 - 3.000 = 4.978{,}72\ €$$

También se puede obtener a través del préstamo equivalente con intereses pospagables, tal y como se ha efectuado en el apartado *c*.2) de este ejercicio.

e) El capital nominal amortizado en los dos primeros años lo podemos obtener como diferencia entre la cuantía nominal del préstamo y el nominal vivo después de dos años: $M_2{}^{e*} = C_0^* - C_2^* = 12.000 - 5.296{,}51 = 6.703{,}49$ €.

f) La cuota de amortización nominal del año 1 la hallamos detrayendo del primer término amortizativo la cuota de interés prepagable que corresponde al siguiente año: $A_1^* = a_1 - I_2^* = a_1 - C_1^* \times i^* = 4.500 - 7.978{,}72 \times 0{,}06 = 4.021{,}28$ €.

g) El valor de cada uno de los componentes del cuadro de amortización del préstamo con intereses anticipados lo obtendremos aplicando las ecuaciones anteriormente citadas.

Año	Tipo de interés anticipado	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización nominal	Capital nominal total amortizado	Capital nominal vivo
0	0,06	—	720,00	—	—	12.000,00
1	0,06	4.500,00	478,72	4.021,28	4.021,28	7.978,72
2	0,06	3.000,00	317,79	2.682,21	6.703,49	5.296,51
3	—	5.296,51	—	5.296,51	12.000,00	0,00

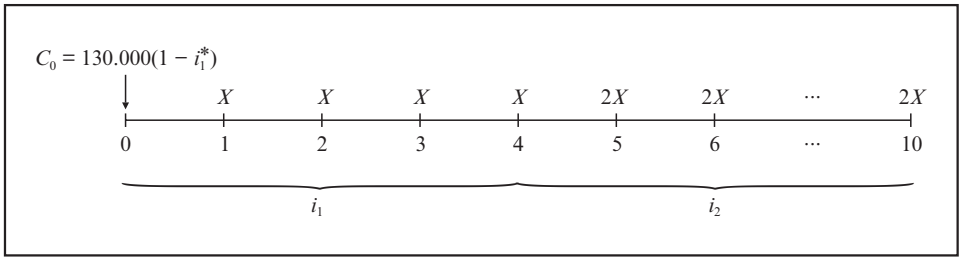
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.10

Sea un préstamo de 130.000 € a amortizar en 10 años, a un tipo de interés anticipado del 5% anual para los cuatro primeros años y del 7% anual para el resto. Si se sabe que el importe de los términos amortizativos anuales es X para los cuatro primeros años y $2X$ para los años restantes, hallar: *a*) el importe de los términos amortizativos; *b*) la quinta cuota de interés; *c*) la cuota de amortización nominal del año 4; *d*) el saldo neto al final del año 7, y *e*) el capital nominal vivo después de nueve años.

Resolución

a) La cuantía de los términos amortizativos la podemos obtener a través de la ecuación de equivalencia financiera del préstamo equivalente, para lo cual tenemos que hallar previamente el tipo de interés anual pospagable equivalente a cada uno de los tipos anticipados dados.



$$(1 - 0{,}05)(1 + i_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0{,}052631578$$

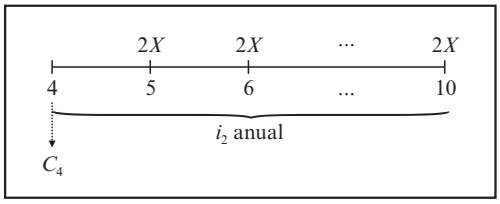
$$(1 - 0{,}07)(1 + i_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 0{,}075268817$$

Si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen, se verifica:

$$130.000(1 - 0{,}05) = X \times a_{\overline{4}|i_1} + 2X \times a_{\overline{10-4}|i_2}(1 + i_1)^{-4} \quad \Rightarrow \quad X = 11.061{,}92 \text{ €}$$

b) La quinta cuota de interés, o interés anticipado del año 5, la obtenemos al multiplicar el nominal vivo en 4 por el tipo de interés correspondiente al año 5: $I_5^* = C_4^* \times i_2^*$. Para calcular el capital nominal vivo en 4 hemos de tener en cuenta la relación entre el capital nominal vivo y el saldo neto: $C_4 = C_4^*(1 - i_2^*)$. A su vez, el saldo neto lo obtenemos a través del método prospectivo en el préstamo equivalente:

© Ediciones Pirámide



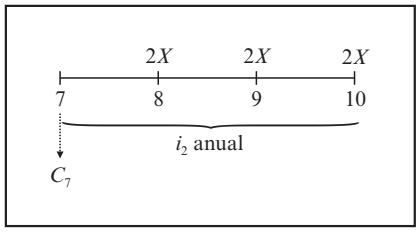
$$C_4 = 22.123{,}84 \times a_{\overline{10-4}|i_2} = 103.760{,}53$$

$$C_4 = C_4^*(1 - i_2^*) \quad \Rightarrow \quad C_4^* = 103.760{,}53(1 - 0{,}07)^{-1} = 111.570{,}46$$

$$I_5^* = C_4^* \times i_2^* = 111.570{,}46 \times 0{,}07 = 7.809{,}93 \text{ €}$$

c) La cuota de amortización nominal del año 4 podemos hallarla detrayendo del cuarto término amortizativo la cuota de interés prepagable del año 5: $A_4^* = a_4 - I_5^* = X - I_5^* = 11.061{,}92 - 7.809{,}93 = 3.251{,}99$ €.

d) El saldo neto al final del año 7 podemos calcularlo a través del préstamo equivalente. Utilizando el método prospectivo, se verifica: $C_7 = 22.123{,}84 \times a_{\overline{10-7}|i_2} = 57.505{,}55$ €.



e) El capital nominal vivo después de nueve años es el saldo financiero calculado a la izquierda de 10, es decir, del último año. Por tanto, debe coincidir con la última cuota de amortización nominal y con el último término amortizativo: $C_9^* = A_{10}^* = a_{10} = 2X = 22.123{,}84$ €.

12.6.2. Método alemán

Al igual que en los préstamos con intereses pospagables, en los préstamos con pago prepagable de intereses se pueden distinguir distintos métodos de amortización en función de las hipótesis que se realicen sobre los términos amortizativos o sus componentes. No obstante, entre los diversos métodos destaca el alemán,

© Ediciones Pirámide

en el que los términos amortizativos son de igual cuantía y el tipo de interés anticipado es constante. El gráfico de la operación es:

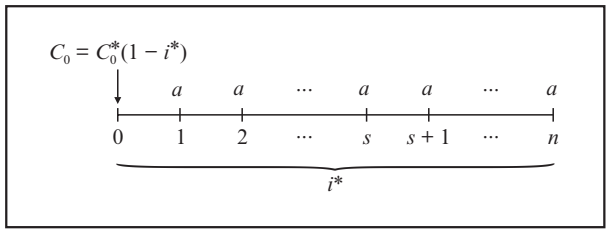


Figura 12.21.

Si en este tipo de préstamo hallamos el tipo de interés pospagable equivalente al tipo prepagable dado, y planteamos el préstamo equivalente amortizable con intereses pospagables, tenemos que a las cuantías netas les son de aplicación todas las expresiones obtenidas para un préstamo amortizable por el método francés:

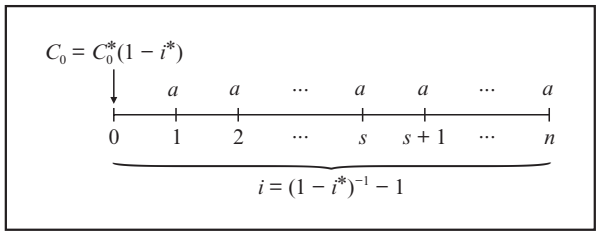


Figura 12.22.

Al igual que en los epígrafes anteriores, vamos a plantear en este método, en función del tipo de interés anticipado, la ecuación de equivalencia financiera, la ley de variación de las cuotas de amortización nominales, el cálculo del capital nominal vivo y el del capital nominal total amortizado.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

En este caso, la ecuación de equivalencia financiera de la operación de préstamo es la siguiente:

$$C_0^*(1 - i^*) = a(1 - i^*) + a(1 - i^*)^2 + a(1 - i^*)^3 + ... + a(1 - i^*)^n$$

$$C_0^*(1 - i^*) = a(1 - i^*)[1 + (1 - i^*) + (1 - i^*)^2 + ... + (1 - i^*)^{n-1}]$$

© Ediciones Pirámide

Sabiendo que $[1 + (1 - i^*) + (1 - i^*)^2 + ... + (1 - i^*)^{n-1}]$ es la suma aritmética de n términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1 - i^*$, podemos sustituir dicha expresión por el resultado de su suma, la cual se puede hallar a través de la fórmula siguiente: $S = \dfrac{z_1 - z_n \times q}{1 - q}$, siendo z_1 y z_n el primer y último término de la progresión, y q la razón. Por tanto, tenemos:

$$C_0^*(1 - i^*) = a(1 - i^*)\frac{1 - (1 - i^*)^{n-1}(1 - i^*)}{1 - (1 - i^*)} \quad \Rightarrow \quad C_0^* = a\frac{1 - (1 - i^*)^n}{i^*}$$

***b*) Ley de variación de las cuotas de amortización nominales**

Para obtener la ley de variación de las cuotas de amortización nominales expresamos el capital nominal vivo en dos períodos consecutivos a través del método recurrente, y calculamos la diferencia de ambas expresiones:

$$C_s^* = (C_{s-1}^* - a)(1 - i^*)^{-1}$$

$$C_{s+1}^* = (C_s^* - a)(1 - i^*)^{-1}$$

$$\underbrace{C_s^* - C_{s+1}^*}_{A_{s+1}^*} = \underbrace{C_{s-1}^* - C_s^*}_{A_s^*}(1 - i^*)^{-1} \quad \Rightarrow \quad A_{s+1}^* = A_s^*(1 - i^*)^{-1}$$

De la expresión anterior se deduce que las cuotas de amortización en el método alemán varían en progresión geométrica de razón $q = (1 - i^*)^{-1}$, por lo que $A_s^* = A_1^*(1 - i^*)^{-(s-1)}$. Además, como sabemos que el importe de la última cuota de amortización nominal coincide con el del término amortizativo ($a = a_n = A_n^* = C_{n-1}^*$), también podemos hallar la cuota de amortización nominal de un determinado período a través de la última cuota de capital nominal, o, lo que es lo mismo, a partir del término amortizativo: $a = A_n^* = A_s^*(1 - i^*)^{-(n-s)} \Rightarrow A_s^* = A_n^*(1 - i^*)^{n-s} = a(1 - i^*)^{n-s}$.

***c*) Capital nominal vivo o saldo financiero nominal**

c*.1) *Método retrospectivo

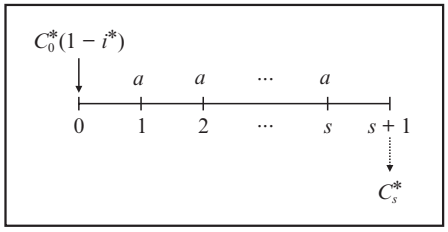


Figura 12.23.

© Ediciones Pirámide

$$C_s^* = C_0^*(1 - i^*)(1 - i^*)^{-(s+1)} - [a(1 - i^*)^{-s} + a(1 - i^*)^{-(s-1)} + ... + a(1 - i^*)^{-1}] =$$

$$= C_0^*(1 - i^*)^{-s} - a(1 - i^*)^{-1}[(1 - i^*)^{-(s-1)} + ... + (1 - i^*)^{-2} + (1 - i^*)^{-1} + 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = C_0^*(1 - i^*)^{-s} - a(1 - i^*)^{-1}\frac{(1 - i^*)^{-(s-1)} - 1(1 - i^*)^{-1}}{1 - (1 - i^*)^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = C_0^*(1 - i^*)^{-s} - a\frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*}$$

Además, en el préstamo equivalente con intereses pospagables y por el método francés, se verifica:

$$C_s^*(1 - i^*) = C_s = C_0(1 + i)^s - a \times s_{\overline{s}|i}$$

c*.2) *Método prospectivo

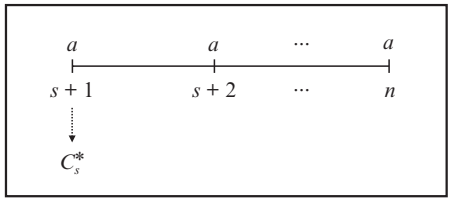


Figura 12.24.

$$C_s^* = a + a(1 - i^*) + a(1 - i^*)^2 + ... + a(1 - i^*)^{n-(s+1)} = a[1 + (1 - i^*) + (1 - i^*)^2 +$$

$$+ ... + (1 - i^*)^{n-(s+1)}] \quad \Rightarrow \quad C_s^* = a\frac{1 - (1 - i^*)^{n-(s+1)}(1 - i^*)}{1 - (1 - i^*)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = a\frac{1 - (1 - i^*)^{n-s}}{i^*}$$

También se puede determinar a través del préstamo francés equivalente:

$$C_s^*(1 - i^*) = C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$$

***d*) Capital nominal total amortizado**

El capital nominal total amortizado transcurridos s períodos, M_s^{e*}, es la suma aritmética de las s primeras cuotas de amortización nominales, y como dichas cuotas en el método alemán varían en progresión geométrica, tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$M_s^{e*} = \sum_{h=1}^{s} A_h^* = A_1^* + A_1^*(1 - i^*)^{-1} + A_1^*(1 - i^*)^{-2} + \ldots + A_1^*(1 - i^*)^{-(s-1)} =$$

$$= A_1^*[1 + (1 - i^*)^{-1} + (1 - i^*)^{-2} + \ldots + (1 - i^*)^{-(s-1)}] =$$

$$= A_1^* \frac{1 - (1 - i^*)^{-(s-1)}(1 - i^*)^{-1}}{1 - (1 - i^*)^{-1}} \quad \Rightarrow \quad M_s^{e*} = A_1^*(1 - i^*)\frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*}$$

Además, si expresamos A_1^* en función de la última cuota o del término amortizativo: $A_1^* = A_n^*(1 - i^*)^{n-1} = a(1 - i^*)^{n-1}$, tenemos:

$$M_s^{e*} = a(1 - i^*)^{n-1}(1 - i^*)\frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*} = a(1 - i^*)^n \frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*}$$

Por otra parte, también podemos hallar el total nominal amortizado después de s períodos a través de la diferencia entre el nominal del préstamo y el capital nominal vivo:

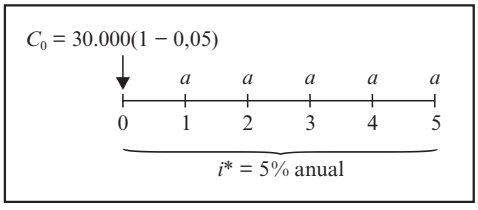
$$M_s^{e*} = C_0^* - C_s^* = C_0^* \left[1 - \frac{1 - (1 - i^*)^{n-s}}{1 - (1 - i^*)^n}\right]$$

EJERCICIO 12.11

Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar en 5 años mediante términos amortizativos anuales constantes y pago anticipado de intereses al 5% anual. Calcular: *a*) la cuantía del término amortizativo; *b*) la cuota de amortización nominal del año 3; *c*) el capital nominal amortizado transcurridos dos años; *d*) el capital nominal vivo después de tres años a través del método retrospectivo, y *e*) el saldo en términos nominales después de dos años a través del método prospectivo.

Resolución

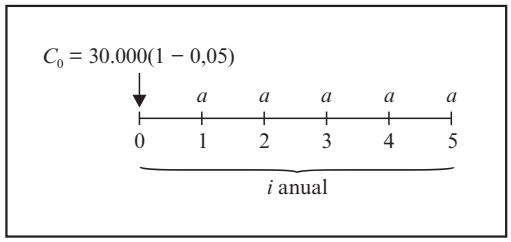
a)



$$30.000 = a\frac{1 - (1 - 0,05)^5}{0,05} \quad \Rightarrow \quad a = 6.630,74 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

El término amortizativo también se puede obtener a través del préstamo equivalente, que es un préstamo francés, para lo cual previamente tenemos que hallar el tipo de interés anual pospagable equivalente al prepagable dado:



$$(1 - 0{,}05)(1 + i_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{1}{0{,}95} - 1 = \frac{1}{19}$$

$$C_0^*(1 - i^*) = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 30.000(1 - 0{,}05) = a \times a_{\overline{5}|1/19} \quad \Rightarrow \quad a = 6.630{,}74\ €$$

b) La cuota de amortización nominal del año 3 la hallamos en función de la última cuota de amortización nominal, la cual a su vez es igual al último término amortizativo:

$$A_3^* = A_n^*(1 - i^*)^{n-3} = a(1 - i^*)^{n-3} = 6.630{,}74(1 - 0{,}05)^{5-3} = 5.984{,}24\ €$$

Podemos calcular dicha cuota de amortización mediante su préstamo equivalente, verificándose:

$$C_2 = a \times a_{\overline{n-2}|i} = 6.630{,}74 \times a_{\overline{3}|1/19} = 17.968{,}48 \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_2^*(1 - i^*) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_2^* = 17.968{,}48(1 - 0{,}05)^{-1} = 18.914{,}19$$

$$C_3 = a \times a_{\overline{n-3}|i} = 6.630{,}74 \times a_{\overline{2}|1/19} = 12.283{,}45 \quad \Rightarrow \quad C_3 = C_3^*(1 - i^*) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_3^* = 12.283{,}45(1 - 0{,}05)^{-1} = 12.929{,}95$$

$$A_3^* = C_2^* - C_3^* = 18.914{,}19 - 12.929{,}95 = 5.984{,}24\ €$$

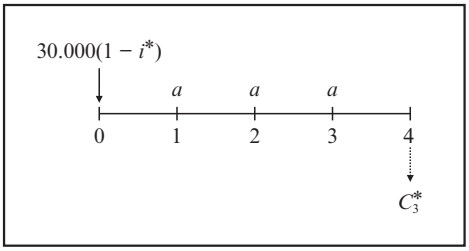
c) El capital nominal amortizado transcurridos dos años lo podemos obtener a través de las siguientes expresiones:

$$M_2^{e*} = a(1 - i^*)^5 \frac{(1 - i^*)^{-2} - 1}{i^*} = 6.630{,}74(1 - 0{,}05)^5 \frac{(1 - 0{,}05)^{-2} - 1}{0{,}05} = 11.085{,}81\ €$$

$$M_2^{e*} = A_1^* + A_2^* = 6.630{,}74(1 - 0{,}05)^{5-1} + 6.630{,}74(1 - 0{,}05)^{5-2} = 11.085{,}81\ €$$

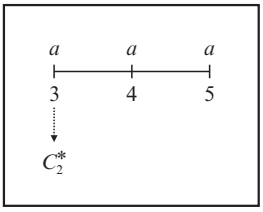
© Ediciones Pirámide

d) Para calcular el capital nominal vivo, transcurridos tres años a través del método retrospectivo hemos de plantear la diferencia entre la prestación vencida y la contraprestación vencida a la izquierda del punto 4 del préstamo alemán dado:



$$C_3^* = 30.000(1 - 0{,}05)^{-3} - 6.630{,}74\frac{(1 - 0{,}05)^{-3} - 1}{0{,}05} = 12.929{,}95\ €$$

e) Para calcular el capital nominal pendiente de amortizar después de dos años a través del método prospectivo, tenemos que calcular a la izquierda del punto 3 la suma financiera de los términos amortizativos pendientes de vencimiento:



$$C_2^* = 6.630{,}74\frac{1 - (1 - 0{,}05)^{5-2}}{0{,}05} = 18.914{,}19\ €$$

12.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si se sabe que 9.678,96 € es el importe de la sexta cuota de amortización de un préstamo de 10 años de duración, amortizable al 4,2% anual mediante pagos anuales que aumentan de año en año en 150 €, hallar la cuota de interés del quinto año.

Resolución

Se trata de un préstamo amortizable a través de términos amortizativos anuales que crecen en progresión aritmética de razón 150 € anuales. De este modo,

© Ediciones Pirámide

conocida la sexta cuota de amortización A_6, y teniendo en cuenta la expresión de la ley de variación de las cuotas de amortización en este método, podemos hallar la primera cuota de capital A_1:

$$A_6 = A_1(1+i)^5 + d \times s_{\overline{5}|i} \quad \Rightarrow \quad 9.678{,}96 = A_1(1+0{,}042)^5 + 150 \times s_{\overline{5}|0{,}042} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad A_1 = 7.215{,}31$$

Sabemos que:

$$a_1 = A_1 + I_1 = A_1 + C_0 \times i, \text{ y } C_0 = \left(a_1 + \frac{150}{0{,}042} + 150 \times 10\right) \times a_{\overline{10}|0{,}042} - \frac{150 \times 10}{0{,}042}$$

por lo que:

$$a_1 = 7.215{,}31 + \left[\left(a_1 + \frac{150}{0{,}042} + 150 \times 10\right) \times a_{\overline{10}|0{,}042} - \frac{150 \times 10}{0{,}042}\right] \times 0{,}042 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a_1 = 11.205{,}31$$

Siendo $A_5 = A_1(1+i)^4 + d \times s_{\overline{4}|i} = 7.215{,}31 \times 1{,}042^4 + 150 \times s_{\overline{4}|0{,}042} = 9.144{,}88$, y sabiendo que $a_5 = a_1 + d(5-1) = 11.205{,}31 + 150 \times 4 = 11.805{,}31$, se deduce que la cuota de interés del año 5 es: $I_5 = a_5 - A_5 = 11.805{,}31 - 9.144{,}88 = 2.660{,}43$ €.

2. En un préstamo de duración 6 años se sabe que el prestatario no abonó cuantía alguna en el primer año y que en el resto de los años paga semestralmente una cuantía igual a 4.570,35 €. Calcular la cuantía del préstamo, si el tipo de interés pactado es el 5% anual pagadero semestralmente.

Resolución

Se trata de un préstamo con un año de diferimiento y amortizable semestralmente por el método francés en los restantes períodos. El tipo de interés semestral es: $i^{(m)} = \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}025$. Se verifica:

$$C_0 = 4.570{,}35 \times a_{\overline{10}|2{,}5\%} \times 1{,}025^{-2} = 38.072{,}58 \text{ €}$$

3. Si 6.431,79 € es el importe de la quinta cuota de amortización de un préstamo de 8 años amortizable al 5% anual, mediante pagos anuales que crecen un 3% anual, hallar la cuantía del préstamo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

A partir de la quinta cuota de amortización A_5 podemos hallar el primer término amortizativo a_1: $a_5 = A_5 + I_5 \Rightarrow A_5 = a_5 - C_4 \times i = a_1 \times q^4 - C_4 \times i$, siendo:

$$C_4 = A_{(a_5,\, q=1{,}03)\overline{8-4}|5\%} = a_1 \times 1{,}03^4 \times \frac{1 - 1{,}03^{8-4} \times (1 + 0{,}05)^{-(8-4)}}{1 + 0{,}05 - 1{,}03}$$

Por consiguiente:

$$6.431{,}79 = a_1 \times 1{,}03^4 - \left[a_1 \times 1{,}03^4 \frac{1 - 1{,}03^{8-4} \times (1 + 0{,}05)^{-(8-4)}}{1 + 0{,}05 - 1{,}03}\right] \times 0{,}05 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 7.012{,}62$$

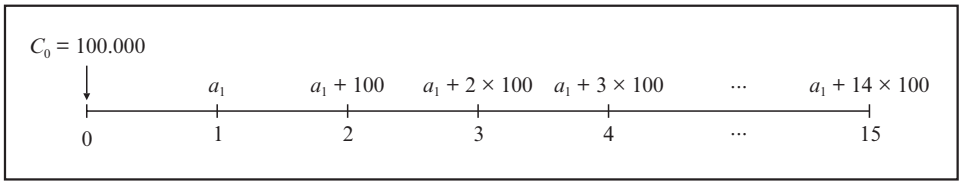
Una vez conocido a_1, hallamos la cuantía del préstamo C_0 planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación:

$$C_0 = 7.012{,}62 \frac{1 - 1{,}03^8 \times (1 + 0{,}05)^{-8}}{1 + 0{,}05 - 1{,}03} = 50.000{,}03 \text{ €}$$

4. Se pacta un préstamo de 100.000 € a amortizar en 15 años al 5% anual, mediante términos amortizativos que aumentan cada año en 100 €. Transcurridos los cuatro primeros años, el prestamista y el prestatario acuerdan renegociar la operación. Las nuevas condiciones son las siguientes: no pagar nada en el año 5; en el año 6 pagar sólo la cuota de interés, y en el resto de los años amortizar el préstamo a través de cuotas de amortización constantes. Teniendo en cuenta la renegociación, calcular la cuantía del término amortizativo del año 8.

Resolución

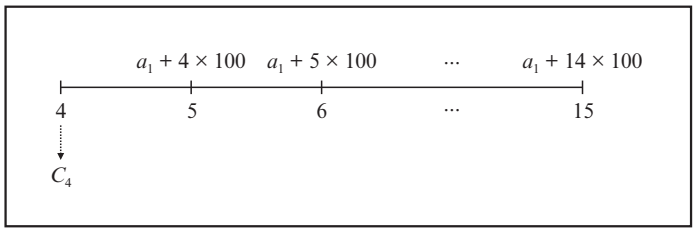
La cuantía del primer término amortizativo se obtiene a través del planteamiento de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:



$$100.000 = \left(a_1 + 100 \times 15 + \frac{100}{0{,}05}\right) \times a_{\overline{15}|0{,}05} - \frac{100 \times 15}{0{,}05} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 9.024{,}50$$

© Ediciones Pirámide

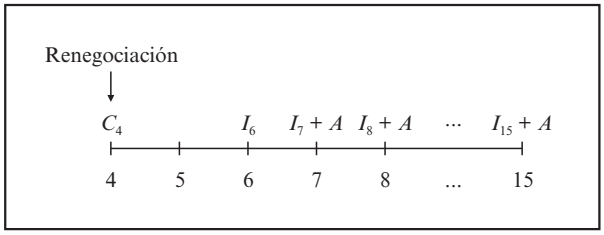
Para llevar a cabo la renegociación en el año 4, los sujetos necesitan saber el saldo de la operación inicial en dicho punto, el cual, según el método prospectivo, verifica:



$C_4 = A_{(a_5,\, d=100)\overline{15-4}|0,05}$, siendo $a_5 = a_1 + 4 \times d = 9.024{,}50 + 4 \times 100 = 9.424{,}50$. Por consiguiente:

$$C_4 = \left(9.424{,}50 + \frac{100}{0{,}05} + 100 \times 11\right) \times a_{\overline{11}|0,05} - \frac{100 \times 11}{0{,}05} = 82.033{,}68$$

El gráfico de la operación pendiente con las nuevas condiciones es:



El préstamo después de la renegociación tiene un año de diferimiento, ya que no se paga nada en el año 5, por lo que $C_5 = C_4(1 + i) = 82.033{,}68 \times 1{,}05 = 86.135{,}36$. El siguiente año es de carencia, pues sólo se pagan los intereses, no modificándose el saldo: $C_6 = C_5 = 86.135{,}36$. La cuantía C_6 se amortiza a través de cuotas de capital constantes en los nueve años restantes, siendo el importe de cada cuota de amortización:

$$A = \frac{C_6}{15 - 6} = \frac{86.135{,}36}{9} = 9.570{,}60$$

Por último, la cuantía total que el prestatario abona en el octavo año es:

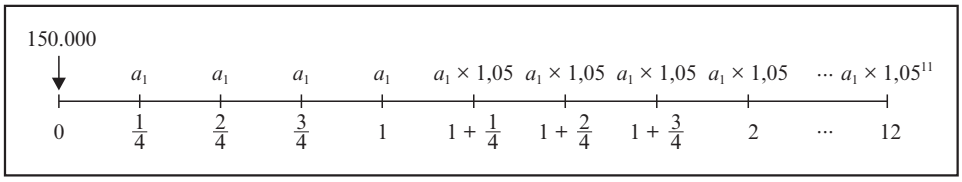
$$a_8 = A + I_8 = A + C_7 \times i = A + (C_6 - A) \times i =$$
$$= 9.570{,}60 + (86.135{,}36 - 9.570{,}60) \times 0{,}05 = 13.398{,}84\ €$$

© Ediciones Pirámide

5. Sea un préstamo de 150.000 € a amortizar en 12 años, al 6% anual pagadero trimestralmente, mediante términos amortizativos trimestrales constantes dentro de cada año y que aumentan de uno a otro en un 5%. Calcular el saldo al final del segundo trimestre del año 6.

Resolución

Los términos amortizativos son trimestrales y constantes dentro de un mismo año, pero crecen anualmente un 5%, constituyendo tales términos una renta trimestral fraccionada de una anual variable en progresión geométrica:



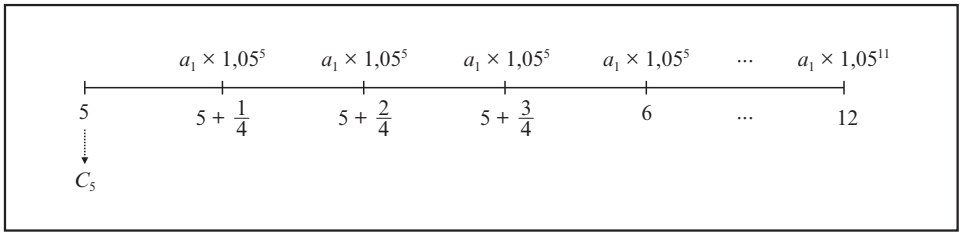
El saldo al final del segundo trimestre del año 6 lo podemos hallar a través de la siguiente expresión: $C_{5+\frac{2}{4}} = C_5\,(1 + i^{(m)})^2 - a_6 \times s_{\overline{2}|i^{(m)}}$. Para obtener a_6 hemos de tener en cuenta que los términos amortizativos crecen anualmente a razón de $q = 1{,}05$, por lo que se verifica: $a_6 = a_1 \times 1{,}05^5$.

El primer término amortizativo lo obtenemos planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen. Para ello hemos de tener presente que los términos amortizativos constituyen una renta trimestral fraccionada de una anual variable en progresión geométrica, verificándose: $C_0 = \dfrac{i}{j_{(m)}} \times A_{(a_1 \times 4,\ q = 1{,}05)\overline{12}|i}$. El tipo de interés trimestral es el 1,5%, siendo su equivalente anual el 6,136355%. Por tanto:

$$150.000 = \frac{0{,}06136355}{0{,}06} \times a_1 \times 4\frac{1 - 1{,}05^{12}(1 + 0{,}06136355)^{-12}}{1 + 0{,}06136355 - 1{,}05} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3.438{,}48$$

Por consiguiente, $a_6 = 3.438{,}48 \times 1{,}05^5 = 4.388{,}47$.

El saldo al final del año 5, C_5, por el método prospectivo, verifica:



© Ediciones Pirámide

$$C_5 = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(a_1 \times 1{,}05^5 \times 4,\ q=1{,}05)\overline{12-5}|i} = \frac{0{,}06136355}{0{,}06} \times 3.438{,}48 \times 1{,}05^5 \times$$
$$\times\ 4\frac{1 - 1{,}05^7(1 + 0{,}06136355)^{-7}}{1 + 0{,}06136355 - 1{,}05} \quad \Rightarrow \quad C_5 = 114.667{,}97$$

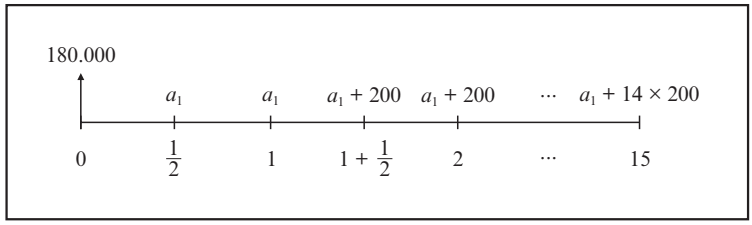
Una vez calculados a_6 y C_5 hallamos el saldo al final del segundo trimestre del año 6:

$$C_{5+\frac{2}{4}} = 114.667{,}97 \times 1{,}015^2 - 4.388{,}47 \times s_{\overline{2}|0{,}015} = 109.291{,}05\ €$$

6. Sea un préstamo de 180.000 €, de duración 15 años, a amortizar al 4% nominal anual, mediante términos amortizativos semestrales de cuantía constante dentro de cada año y que aumenta de un año a otro en 200 €. Calcular el capital total amortizado en los diez primeros años.

Resolución

Para calcular el capital amortizado hasta el año 10, $M_{10}^e = C_0 - C_{10}$, necesitamos conocer el saldo al final de dicho año, C_{10}. Para ello hemos de tener en cuenta que se trata de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos semestrales que crecen cada año en 200 €, por lo que el conjunto de ellos constituye una renta semestral fraccionada de una anual variable en progresión aritmética de razón $d = 200 \times 2$:

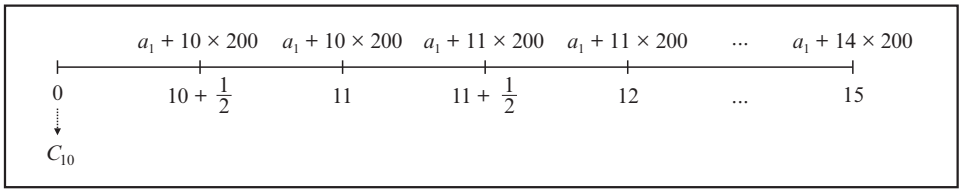


Como C_{10} es el valor financiero al final del año 10 de los términos amortizativos pendientes de vencer en dicho momento, para poder hallar el citado capital vivo, primero debemos calcular la cuantía del primer término amortizativo, a_1, a partir de la ecuación de equivalencia financiera en el origen, siendo el tipo de interés anual el 4,04%:

$$180.000 = \frac{0{,}0404}{0{,}04}\left[\left(a_1 \times 2 + 200 \times 2 \times 15 + \frac{200 \times 2}{0{,}0404}\right) \times a_{\overline{15}|4{,}04\%} -\right.$$
$$\left. - \frac{200 \times 2 \times 15}{0{,}0404}\right] \quad \Rightarrow \quad a_1 = 6.783{,}98$$

© Ediciones Pirámide

Por consiguiente, para C_{10} tenemos:



$$C_{10} = \frac{0{,}0404}{0{,}04}\left\{\left[(6.783{,}98 + 10 \times 200) \times 2 + 200 \times 2 \times 5 + \frac{200 \times 2}{0{,}0404}\right] a_{\overline{5}|0{,}0404} - \right.$$
$$\left. - \frac{200 \times 2 \times 15}{0{,}0404}\right\} \Rightarrow C_{10} = 82.353{,}67$$

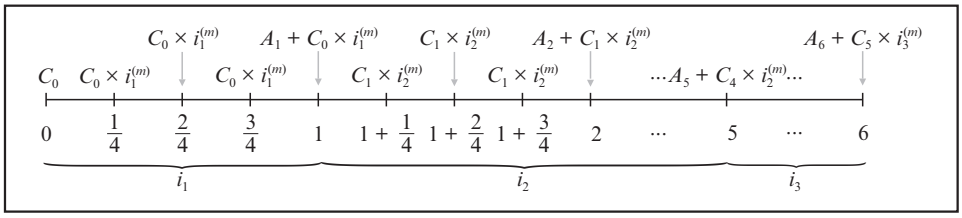
Consecuentemente, $M_{10}^{e} = C_0 - C_{10} = 180.000 - 82.353{,}67 = 97.646{,}33$ €.

7. Se sabe que el capital pendiente de amortizar al principio del cuarto año, de un préstamo amortizable en 6 años, es de cuantía 219.689,76 €, y que la operación se pacta a un tipo de interés nominal anual pagadero trimestralmente igual al 3% para el primer año, al 3,5% para los cuatro años siguientes y al 4% para el resto. Si se acuerda pagar trimestralmente las cuotas de interés y anualmente las cuotas de capital, y que el valor financiero al final de cada año de los pagos que se realizan a lo largo del mismo sea constante, obtener el capital amortizado hasta el año 3.

Resolución

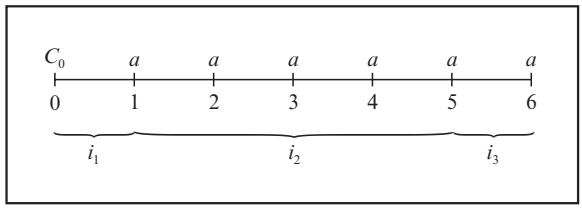
Se trata de un préstamo con cuotas de amortización anuales y con intereses fraccionados financieramente, es decir, que trimestralmente sólo se pagan las cuotas de interés y al final de cada año se abona la cuota de amortización correspondiente. A este préstamo con intereses fraccionados podemos asociarle un préstamo equivalente con pagos anuales y cuyas cuotas de amortización sean las mismas que las del préstamo con intereses fraccionados. Asimismo, al final de cada año el valor financiero de todos los pagos que se realizan en el mismo es siempre constante, por lo que el préstamo equivalente anual está constituido por términos amortizativos constantes.

Préstamo con intereses fraccionados:



© Ediciones Pirámide

Préstamo equivalente:



Como dentro de un mismo año el tipo de interés para cada trimestre es siempre el mismo, el tipo de interés anual con el que operar en el préstamo equivalente lo obtenemos aplicando simplemente la relación de tantos equivalentes en capitalización compuesta:

$$\text{Año 1: } (1 + i_1) = \left(1 + \frac{0{,}03}{4}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0{,}030339191$$

$$\text{Años 2, 3, 4 y 5: } (1 + i_2) = \left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 0{,}035462061$$

$$\text{Año 6: } (1 + i_3) = \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad i_3 = 0{,}04060401$$

Por tanto, para calcular el capital amortizado hasta el año 3: $M_3^e = C_0 - C_3$, necesitamos hallar C_0 y C_3, para lo cual vamos a basarnos en el préstamo equivalente:

$$C_3 = 219.689{,}76 = a \times a_{\overline{2}|0{,}035462061} + a(1 + 0{,}04060401)^{-1}(1 + 0{,}03542061)^{-2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a = 78.609$$

Planteando la ecuación de equivalencia financiera del préstamo equivalente, podemos obtener el principal del préstamo C_0:

$$C_0 = 78.609 \times 1{,}030339191^{-1} + 78.609 \times a_{\overline{4}|0{,}035462061} \times 1{,}030339191^{-1} +$$
$$+ 78.609 \times 1{,}04060401^{-1} \times 1{,}035462061^{-4} \times 1{,}030339191^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 420.000$$

Por consiguiente, el capital amortizado hasta el tercer año será:

$$M_3^e = C_0 - C_3 = 420.000 - 219.689{,}76 = 200.310{,}24 \text{ €}$$

8. Sea un préstamo de 4 años de duración, amortizable a través del método alemán al 5,6% anual anticipado. Si el importe de la cuota de amortización nominal del tercer año es 5.135,50 €, hallar la cuantía nominal del préstamo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El principal del préstamo lo podemos calcular a través de la ecuación de equivalencia financiera $C_0^* = a\dfrac{1-(1-i^*)^n}{i^*}$, necesitando para ello conocer la cuantía del término amortizativo a. Para hallar a hemos de tener en cuenta que se trata de un préstamo con abono anticipado de intereses y, por tanto, $a = A_n^*$. Además, al tratarse de un préstamo amortizable mediante el método alemán, sabemos que las cuotas de capital nominales varían en progresión geométrica de razón $q = (1-i^*)^{-1}$. Por tanto, la última cuota de capital la calcularemos a partir de la correspondiente al año 3: $a = A_4^* = A_3^*(1-i^*)^{-1} = 5.135{,}50(1-0{,}056)^{-1} = 5.440{,}15$. En consecuencia, el principal del préstamo es: $C_0^* = 5.440{,}15\dfrac{1-(1-0{,}056)^4}{0{,}056} = 20.000$ €.

12.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la duración de un préstamo con términos amortizativos anuales que crecen anualmente un 4%, del que se sabe que el término amortizativo del año 3 asciende a una cuantía de 5.061,89 €, que el importe de la cuota de amortización del año 4 es 3.847,03 € y que el tipo de interés pactado es el 4% anual.

2. Sea un préstamo de cuantía X de 12 años de duración, amortizable al 4% anual. En el primer año no se abona cuantía alguna; en los años 2 y 3 sólo se pagan los intereses correspondientes, y en el resto de los años la amortización es con cuotas de capital constantes. Al principio del séptimo año se renegocia el préstamo, siendo las nuevas condiciones: realizar pagos anuales que crecen a razón del 1,5% anual y aumentar el tipo de interés hasta el 5%. Si se sabe que el importe de la cuota de interés del noveno año es 2.214,64 €, hallar la cuantía del préstamo.

3. Sea un préstamo de 110.000 €, amortizable en 14 años, al 6% nominal anual mediante pagos semestrales que crecen cada semestre en 90 €. Determinar en qué cuantía disminuye la deuda del prestatario en el primer semestre del año 9.

4. Si 40.820,34 € es el importe del capital amortizado hasta el quinto año de un préstamo de 6 años, con pago semestral de intereses, cuotas de amortización anuales y tipo de interés del 4,04% anual, determinar la cuantía de la quinta cuota de interés, si se sabe que al final de cada año el valor financiero de los pagos que realiza el prestatario a lo largo del mismo es constante.

5. Sea un préstamo amortizable con pago cuatrimestral de intereses y cuotas de capital constantes anuales, de 4 años de duración, del que se sabe que 7.950 €

© Ediciones Pirámide

es la cuantía total que paga el prestatario al final del año 2 y que la cuota de interés del segundo cuatrimestre del año 4 es de 150 €. Hallar el importe que paga el sujeto al final del segundo cuatrimestre del tercer año.

6. Hallar la duración de un préstamo amortizable a través del método alemán al 6% anual anticipado, del que se sabe que el importe de la cuota de amortización nominal del año 4 es 5.999,13 € y que la cuota de interés prepagable del año 6 es 1.301,76 €.

© Ediciones Pirámide

13 Préstamos amortizables con tipos de interés referenciados o indiciados

OBJETIVOS

- Clasificar los préstamos en función del tipo de interés.
- Estudiar las distintas modalidades de amortización de los préstamos referenciados.
- Analizar el método francés generalizado.
- Elaborar el cuadro de amortización de estos préstamos.

SUMARIO

13.1. Clasificación de las operaciones de amortización en función del tipo de interés.
13.2. Problemática del tipo de interés referenciado.
13.3. Métodos de amortización de préstamos referenciados.
13.4. Ejercicios y problemas resueltos.
13.5. Ejercicios y problemas propuestos.

13.1. CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN EN FUNCIÓN DEL TIPO DE INTERÉS

Tomando el tipo de interés como la variable financiera más relevante a efectos de una conceptualización y clasificación de las operaciones de préstamos, distinguimos entre **operaciones con tipos predeterminados** y **operaciones con tipos posdeterminados.** En la primera modalidad, los tipos de interés que se van a aplicar durante la operación de préstamo son conocidos al inicio de la misma. En cambio, en la segunda modalidad, préstamos con tipos de interés posdeterminados, los tipos que se van a emplear son desconocidos al comienzo de la operación.

En el caso de pactarse la modalidad de **tipos predeterminados,** el tipo o tipos de interés de la operación son conocidos desde el inicio de la misma, tanto por el prestamista como por el prestatario. En este supuesto, el tipo de interés puede ser constante a lo largo de toda la vida del préstamo, o por el contrario variable, en cuyo caso se establecen distintos tipos de interés a aplicar en los diversos períodos temporales hasta la amortización del préstamo.

EJERCICIO 13.1

Sea un préstamo de 20.000 euros a amortizar en 5 años con términos amortizativos anuales constantes, siendo los tipos de interés el 4% anual para los dos primeros años y el 5% anual para los restantes períodos. Determinar la cuantía del término amortizativo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

De la ecuación de equivalencia financiera en el origen, se tiene:

$$20.000 = a \times a_{\overline{2}|0,04} + a \times a_{\overline{3}|0,05}(1 + 0,04)^{-2} \quad \Rightarrow \quad a = 4.541,44 \text{ €}$$

En la modalidad de **tipos posdeterminados,** en el origen de la operación no son conocidos todos los tipos de interés a aplicar durante la vida del préstamo, por lo que se fija un plazo de revisión periódica, al principio del cual se determina el tipo de interés a aplicar hasta la próxima revisión. Así, por ejemplo, si el plazo de revisión es anual, al principio de cada año se determinará el tipo de interés a aplicar en el año siguiente.

A efectos de la cuantificación de los tipos posdeterminados, las partes contratantes pueden optar por las siguientes alternativas:

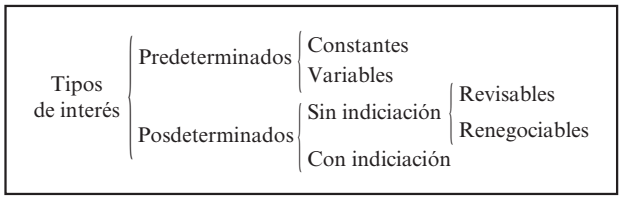
a) **Sin indiciación en el tipo de interés.** En tal supuesto, los distintos tipos de interés son desconocidos al inicio de la operación de préstamo, y los mismos se van pactando en los sucesivos períodos de revisión, distinguiéndose dos clases en función del sujeto o sujetos que tengan la potestad de establecer los mencionados tipos: los *préstamos a tipo revisable* y los *préstamos a tipo renegociable*. Cuando los tipos sean revisables, es el sujeto prestamista el que determina el tipo de interés a aplicar en el período correspondiente. En el supuesto de tipos renegociables, ambas partes contratantes establecen de común acuerdo el tipo de interés a aplicar. En esta segunda modalidad se genera una gran inseguridad para ambos sujetos, al no saber si la operación va a continuar o no en el futuro, ya que pueden no ponerse de acuerdo en el tipo de interés, por lo que dicha modalidad no es de gran uso en la práctica.

b) **Con indiciación en el tipo de interés.** En este caso, al inicio de la operación se pacta la ley de variabilidad del tipo de interés, la cual consiste en vincular el mismo a la variación de un índice de referencia, previamente pactado en las condiciones de la respectiva operación de préstamo. Ello da origen a los *préstamos con tipos de interés referenciados o indiciados en las cuotas de interés,* siendo ésta la modalidad de mayor utilización en las operaciones concertadas por entidades financieras[1].

[1] En la práctica, tanto el Banco de España como el resto de entidades del sistema financiero denominan a estas operaciones **«préstamos a tipos de interés variable».**

© Ediciones Pirámide

Podemos sintetizar lo expuesto:



A lo largo de esta lección nos vamos a centrar exclusivamente en las operaciones de préstamos con tipos posdeterminados y con indiciación en los mismos, o simplemente **préstamos referenciados o indiciados.**

13.2. PROBLEMÁTICA DEL TIPO DE INTERÉS REFERENCIADO

Tal y como hemos señalado, en los préstamos con tipos posdeterminados, y particularmente cuando los tipos de interés sean referenciados, a efectos de la determinación de los sucesivos tipos de interés se establece un **plazo de revisión,** de amplitud t períodos unitarios, al principio del cual se calcula el tipo de interés a aplicar hasta la siguiente revisión. Este plazo, que en la práctica financiera suele ser semestral o anual, ha de ser necesariamente establecido en el contrato de la operación de préstamo, y debe ser de igual o mayor amplitud temporal que el correspondiente a los pagos del prestatario o **periodicidad de amortización.** Así, por ejemplo, un préstamo con términos amortizativos mensuales y plazo de revisión semestral tiene una periodicidad de amortización mensual, la cual es inferior al plazo de revisión semestral.

El tipo de interés nominal, vigente durante t períodos unitarios y hasta la próxima revisión del mismo, se determina como suma del valor que tenga el índice de referencia y del margen o diferencial, por lo que se verifica: $j = j_r + d$, siendo:

j: tipo de interés nominal por unidad de tiempo.
j_r: índice de referencia.
d: margen o diferencial[2].

Por consiguiente, los parámetros fundamentales para el cálculo del tipo de interés referenciado son los siguientes:

a) **Índice de referencia.** Es la variable fundamental que determina la evolución del tipo de interés. Actualmente, los índices de referencia oficiales para préstamos con garantía hipotecaria son los siguientes:

[2] Normalmente, el margen es positivo, por lo que se añade al índice de referencia, aunque los sujetos de la operación pueden pactar un margen negativo.

© Ediciones Pirámide

1. Referencia interbancaria a un año o Euribor.
2. Tipo medio de los préstamos hipotecarios a más de tres años, para la adquisición de vivienda libre, concedidos por los bancos, las cajas de ahorros o por el conjunto de entidades de crédito.
3. Tipo activo de referencia de las cajas de ahorros.
4. Tipo de rendimiento interno en el mercado secundario de deuda pública.

No obstante, el índice de mayor utilización es el Euribor a un año.

b) **Margen o diferencial.** Es una cuantía que modifica al índice de referencia en la fecha de revisión del tipo de interés. Normalmente el margen o diferencial es constante, pactado al inicio de la vida del préstamo, aunque también puede ser variable, modificándose en alguno o en todos los plazos de revisión.

Por ejemplo, supongamos una operación de préstamo con términos mensuales en la que el índice de referencia es el Euribor y el margen del 0,75%. Suponiendo que el último valor conocido del Euribor es el 2,49% nominal anual pagadero mensualmente, el tipo de interés a aplicar sería el 3,24% nominal anual, siendo el tipo de interés mensual el 0,27%.

La metodología descrita para calcular el tipo de interés nominal aplicable puede verse complementada con límites máximos y/o mínimos en el tipo de interés, previamente pactados al inicio de la operación. Su justificación se encuentra en las posibles variaciones extraordinarias, tanto al alza como a la baja, del índice de referencia utilizado.

Una práctica habitual de las entidades financieras consiste en que, durante los primeros s períodos, que suelen ser 6 meses o 1 año, el tipo de interés a aplicar sea constante y previamente establecido en el origen de la operación. En los restantes períodos, el tipo de interés se obtiene según la metodología descrita anteriormente. En consecuencia, existe un intervalo temporal en el que los tipos son predeterminados, o intervalo con tipo fijo, y a continuación pasan a ser posdeterminados. Esta modalidad suele denominarse a *tipo mixto*.

13.3. MÉTODOS DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS REFERENCIADOS

En este epígrafe se va a analizar la problemática de los préstamos referenciados o indiciados desde el punto de vista de los términos amortizativos. En este sentido, podemos señalar que la cuantía de los mismos puede estar predeterminada desde el comienzo de la operación, o bien ser de cuantía desconocida. Por ello, vamos a distinguir entre la metodología de amortización con términos predeterminados y la metodología de amortización con términos posdeterminados.

© Ediciones Pirámide

13.3.1. Metodología de amortización con términos predeterminados

La hipótesis básica de esta metodología implica que desde el inicio de la operación son conocidas las cuantías de los términos amortizativos que debe desembolsar el deudor, ya sean constantes o variables, las cuales son acordadas entre las partes contratantes de la operación. Además, al estar los intereses vinculados tanto al saldo pendiente de amortizar como al tipo de interés referenciado correspondiente, es evidente que las distintas cuotas de amortización que permiten la devolución de la cuantía del préstamo son desconocidas, por lo que la duración de la operación se desconoce a priori, ya que vendrá determinada por la evolución futura del tipo de interés. Si bien el plazo n de la operación es indeterminado, se puede establecer una limitación temporal, de forma que el número de períodos no exceda de un límite máximo.

Las cuantías predeterminadas de los términos amortizativos pueden ser acordadas libremente por las partes contratantes, o bien determinarse en función de la duración máxima de la operación y del primer tipo de interés a aplicar como si éste fuese el mismo para todos los períodos futuros. En tal caso, a través de la ecuación de equivalencia financiera es posible determinar tales cuantías.

EJERCICIO 13.2

Se pacta amortizar un préstamo de 300.000 € en un máximo de 10 años con pagos mensuales constantes acordados al inicio de la operación. El tipo de interés nominal es referenciado al Euribor anual con un margen del 0,5%, siendo anual el plazo de revisión. El valor nominal del Euribor para el primer año es el 5,5% anual. Determinar la cuantía constante del término amortizativo predeterminado al inicio de la operación.

Resolución

Con los datos disponibles, el tipo de interés nominal anual es el 6%, por lo que el tipo mensual es el 0,5%. Al aplicar el postulado de equivalencia financiera para el plazo máximo de amortización, tenemos:

$$300.000 = a \times a_{\overline{120}|0,5\%} \quad \Rightarrow \quad a = 3.330,62 \text{ €}$$

En general, dependiendo de la evolución de la operación, puede suceder que la duración real vaya a superar al límite máximo si éste ha sido establecido, por lo que es en el período correspondiente a dicho límite máximo en el que la operación debe quedar íntegramente amortizada. Para ello será preciso modificar adecuadamente la cuantía del último término amortizativo, a fin de que permita una

© Ediciones Pirámide

cuota de amortización que posibilite liquidar la operación. En tal caso, el último término será de cuantía superior a la inicialmente prevista. En cambio, cuando no se haya establecido plazo máximo, el último término tendrá generalmente una cuantía inferior a la inicialmente prevista.

EJERCICIO 13.3

Sea una operación de préstamo de 30.000 € con tipos referenciados, a amortizar en un plazo máximo de 5 años con términos amortizativos anuales constantes de cuantía 6.600 euros. El tipo de interés pactado es el Euribor + 1%, siendo el tipo de interés a aplicar el primer año del 2,5% anual. Realizar el cuadro de amortización del préstamo, suponiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y restantes años es la siguiente: 3,15%, 3,45%, 3,75% y 4,05%.

Resolución

La operativa para la realización del cuadro de amortización es la siguiente. En primer lugar se obtiene la cuota de interés en cada uno de los años, y dado que el importe de los términos amortizativos asciende a 6.600 €, la cuota de amortización se obtiene como la diferencia entre dicho término y la cuota de interés correspondiente. A continuación se determina el capital total amortizado y el capital vivo. El cuadro de amortización es el siguiente:

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo
0	—	—	—	—	—	30.000,00
1	0,0250	6.600,00	750,00	5.850,00	5.850,00	24.150,00
2	0,0415	6.600,00	1.002,23	5.597,77	11.447,77	18.552,23
3	0,0445	6.600,00	825,57	5.774,43	17.222,20	12.777,80
4	0,0475	6.600,00	606,95	5.993,05	23.215,25	6.784,75
5	0,0505	7.127,38	342,63	6.784,75	30.000,00	0,00

Tal y como se observa en el cuadro de amortización del préstamo, los cuatro primeros términos amortizativos son de cuantía 6.600 €, pero el último término es de cuantía superior. Ello es debido a que el préstamo se ha de amortizar en un plazo máximo de 5 años, de manera que la cuantía del quinto término ha de permitir la amortización total de la operación. Al final del cuarto año, el saldo o capital vivo asciende a 6.784,75 €, por lo que dicho importe ha de coincidir con la cuota de amortización del año siguiente. En el año 5, la suma de dicha cuota de amortización y la cuota de interés correspondiente nos indica el importe del último término amortizativo anual, el cual asciende a 7.127,38 €.

© Ediciones Pirámide

En el supuesto de que no exista una limitación máxima de 5 años, el término amortizativo del quinto año sería de 6.600 €, correspondiendo 6.257,37 € a la cuota de amortización, y quedando un saldo de 527,38 €, que debe ser amortizado en el siguiente año. Suponiendo que el tipo de interés del año 6 sea igual al del año anterior, el término amortizativo del sexto año ascendería a 554,01 €, que es la suma de la cuota de interés (26,63 €) y la cuota de amortización (527,38 €), finalizando la operación en dicho año.

13.3.2. Metodología de amortización con términos posdeterminados

En esta metodología no se establece a priori la cuantía de los términos amortizativos, pudiéndose, sin embargo, conocerse o no el plan de amortización) de la operación. Ello da lugar a dos métodos:

a) Plan de amortización predeterminado, en el que se conocen las cuantías de las cuotas de amortización desde el inicio de la operación.

b) Plan de amortización posdeterminado, en el cual son desconocidas las cuotas de amortización.

A continuación analizamos cada uno de los métodos.

a) Método de amortización con términos posdeterminados y plan de amortización predeterminado

En este método se calcula en el origen de la operación la cuantía correspondiente a cada una de las cuotas de amortización (plan de amortización) por lo que la duración del préstamo es conocida, verificándose: $\sum_{s=1}^{n} A_s = C_0$. En consecuencia, sólo es preciso determinar periódicamente las cuotas de interés y los términos amortizativos.

EJERCICIO 13.4

Un banco ofrece a un cliente un préstamo de 120.000 euros con tipos referenciados a amortizar en un plazo de 6 años, siendo las cuotas de amortización anuales de cuantía constante. El tipo de interés pactado es el Euribor + 0,5%, siendo el tipo de interés a aplicar el primer año el 2,5% anual. Realizar el cuadro de amortización del préstamo, suponiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y restantes años es la siguiente: 4,25%, 4,50%, 4,65%, 4,45% y 4,80% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La operativa para la realización del cuadro de amortización es la siguiente. En primer lugar se obtiene el importe de las cuotas de amortización: $A = \frac{120.000}{6} =$ $= 20.000$. A continuación se calcula el saldo y la cuota de interés en cada uno de los años, obteniéndose el importe de cada uno de los términos amortizativos como suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización correspondientes. El cuadro de amortización queda de la siguiente forma:

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo
0	—	—	—	—	—	120.000,00
1	0,0250	23.000,00	3.000,00	20.000,00	20.000,00	100.000,00
2	0,0475	24.750,00	4.750,00	20.000,00	40.000,00	80.000,00
3	0,0500	24.000,00	4.000,00	20.000,00	60.000,00	60.000,00
4	0,0515	23.090,00	3.090,00	20.000,00	80.000,00	40.000,00
5	0,0495	21.980,00	1.980,00	20.000,00	100.000,00	20.000,00
6	0,0530	21.060,00	1.060,00	20.000,00	120.000,00	0,00

---

b) Método de amortización con términos posdeterminados y plan de amortización posdeterminado. Método francés generalizado

En este método se desconocen, al inicio de la operación, tanto las cuantías de las cuotas de amortización como las de los términos amortizativos, conociéndose en el origen sólo el importe del préstamo, la duración del mismo y las condiciones en cuanto a tipos de interés. En consecuencia, se debe pactar la metodología de cálculo de los términos amortizativos. En tal sentido, una metodología de cálculo puede estar fundamentada en los métodos clásicos de amortización, adaptándola a las características de estos préstamos, dando así lugar a los **métodos clásicos generalizados.**

La metodología más utilizada es la que se basa en el método francés, dando origen al **método francés generalizado.** Dicha metodología consiste en lo siguiente: al principio de cada plazo de revisión, y considerando el tipo de interés del mismo constante para el resto de la vida de la operación, se plantea la ecuación de equivalencia financiera entre el saldo vivo en dicho momento y las cuantías constantes de los términos amortizativos.

Por consiguiente, situados al principio del período $s + 1$, podemos establecer la ecuación de equivalencia financiera y obtener los términos amortizativos correspondientes hasta el siguiente plazo de revisión:

$$C_s = a_{s+1} \times a_{\overline{n-s}|i_{s+1}}$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, a efectos de calcular los n términos amortizativos es preciso plantear de la forma descrita tantas ecuaciones de equivalencia financiera como sea necesario.

EJERCICIO 13.5

Sea una operación de préstamo de 100.000 €, de 15 años de duración, amortizable anualmente por el método francés generalizado. El tipo de interés a aplicar en el primer año es el 2% anual, y para los siguientes es el Euribor + 0,45%. Calcular el importe de los dos primeros términos amortizativos, suponiendo que el Euribor para el segundo año es el 4,05% anual.

Resolución

De acuerdo con el método francés generalizado, el primer término amortizativo se deduce de la ecuación de equivalencia financiera siguiente:

$$100.000 = a_1 \times a_{\overline{15}|0,02} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 7.782,55 \text{ €}$$

Una vez transcurrido el primer año, al modificarse el tipo de interés es preciso determinar la nueva cuantía del término amortizativo. Para ello, previamente, se calcula el capital pendiente de amortizar al final del primer año, que por el método restrospectivo verifica:

$$C_1 = 100.000 \times 1,02 - 7.782,55 = 94.217,45$$

Con dicho saldo se determina el término amortizativo correspondiente al segundo año, planteando la ecuación de equivalencia financiera al final del año 1, suponiendo que el tipo de interés del segundo año permanece constante hasta la finalización del préstamo:

$$94.217,45 = a_2 \times a_{\overline{14}|0,045} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 9.216,38 \text{ €}$$

De acuerdo con lo expuesto, el importe del término amortizativo correspondiente al primer año asciende a 7.782,55 euros, mientras que en el segundo año la cuantía del término es de 9.216,38 euros.

EJERCICIO 13.6

Un préstamo de cuantía 200.000 € se desea amortizar en 20 años mediante pagos mensuales. El tipo de interés pactado es el Euribor + 1%, con plazo de revisión anual. El tipo de interés a aplicar el primer año es el 5,4% anual pagadero

© Ediciones Pirámide

mensualmente. En la hipótesis de que el Euribor para los años siguientes sea, respectivamente, 3,8% y 5% nominal anual, calcular la cuantía mensual a abonar durante el año 3 de acuerdo con el método francés generalizado, así como la cuota de amortización del quinto mes de dicho año.

Resolución

Nos encontramos ante un préstamo con periodicidad mensual de los términos amortizativos y plazo de revisión anual del tipo de interés. De acuerdo con el método francés generalizado, teniendo en cuenta que el tipo de interés mensual para el primer año es $i_1^{(m)} = \frac{0{,}054}{12} = 0{,}0045$, se obtiene el importe mensual del término amortizativo correspondiente a los 12 primeros meses:

$$200.000 = a_1 \times a_{\overline{240}|0{,}0045} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1.364{,}50$$

Una vez transcurrido el primer año se calcula el capital vivo. A través del método prospectivo, se tiene:

$$C_{12} = 1.364{,}50 \times a_{\overline{228}|0{,}0045} = 194.285{,}46$$

Utilizando el método retrospectivo, tenemos:

$$C_{12} = 200.000 \times 1{,}0045^{12} - 1.364{,}50 \times s_{\overline{12}|0{,}0045} = 194.285{,}95$$

Con dicho saldo se plantea nuevamente la ecuación de equivalencia financiera para determinar la cuantía de los próximos 12 términos mensuales. Para ello es preciso determinar previamente el tipo de interés mensual del segundo año, sabiendo que el Euribor toma un valor del 3,8% nominal anual y que el margen es del 1%, por lo que se tiene: $i_2^{(m)} = \frac{0{,}038 + 0{,}01}{12} = \frac{0{,}048}{12} = 0{,}004$ mensual. La ecuación de equivalencia financiera al final del año 1, entre el saldo pendiente y los 228 términos amortizativos restantes, nos permite obtener el término mensual del segundo año:

$$194.285{,}46 = a_2 \times a_{\overline{228}|0{,}004} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1.300{,}55$$

El capital vivo al final del segundo año a través del método prospectivo es:

$$C_{24} = 1.300{,}55 \times a_{\overline{216}|0{,}004} = 187.864{,}51$$

© Ediciones Pirámide

O bien por el método recurrente:

$$C_{24} = C_{12} \times (1 + 0{,}004)^{12} - 1.300{,}55 \times s_{\overline{12}|0{,}004} = 194.285{,}46 \times 1{,}004^{12} -$$
$$- 1.300{,}55 \times s_{\overline{12}|0{,}004} = 187.864{,}52$$

Para determinar el término mensual correspondiente al tercer año se plantea la ecuación de equivalencia financiera entre el saldo pendiente y los términos amortizativos futuros. Sabiendo que el tipo de interés mensual es $i_3^{(m)} = \dfrac{0{,}05 + 0{,}01}{12} = \dfrac{0{,}06}{12} = 0{,}005$, se verifica:

$$C_{24} = a_3 \times a_{\overline{216}|0{,}005} \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1.424{,}32 \text{ €}$$

Por último, para determinar la cuota de amortización del quinto mes del tercer año podemos utilizar las expresiones correspondientes del método francés, teniendo en cuenta que se verifica: $C_{24} = A_{25} + A_{26} + ... + A_{240}$, y que las cuotas de capital varían en progresión geométrica de razón 1,005:

$$C_{24} = A_{25} \times s_{\overline{240-24}|0{,}005} \quad \Rightarrow \quad A_{25} = 485{,}00;\ A_{29} = A_{25} \times 1{,}005^4 = 494{,}77 \text{ €}$$

13.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se concede un préstamo de 120.000 euros con tipos referenciados, a amortizar en un plazo máximo de 10 años con términos amortizativos anuales constantes de cuantía 17.500 euros. El tipo de interés pactado para el primer año es el 2,5% anual, y para los siguientes es el Euribor + 0,75%. Calcular la duración de la operación, sabiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y restantes años es la siguiente: 3,25%, 3,50%, 3,75%, 4%, 4,25%, 4,50%, 4,75%, 5% y 5,25% anual.

Resolución

Para determinar la duración de la operación se procede a la elaboración del cuadro de amortización, en el que se recoge la descomposición del término amortizativo en cuota de interés y cuota de amortización, así como las cuantías correspondientes del capital vivo y del capital amortizado. El cuadro es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Capital vivo
0	—	—	—	—	—	120.000,00
1	0,0250	17.500,00	3.000,00	14.500,00	14.500,00	105.500,00
2	0,0400	17.500,00	4.220,00	13.280,00	27.780,00	92.220,00
3	0,0425	17.500,00	3.919,35	13.580,65	41.360,65	78.639,35
4	0,0450	17.500,00	3.538,77	13.961,23	55.321,88	64.678,12
5	0,0475	17.500,00	3.072,21	14.427,79	69.749,67	50.250,33
6	0,0500	17.500,00	2.512,52	14.987,48	84.737,15	35.262,85
7	0,0525	17.500,00	1.851,30	15.648,70	100.385,85	19.614,15
8	0,0550	17.500,00	1.078,78	16.421,22	116.807,07	3.192,93
9	0,0575	3.376,52	183,59	3.192,93	120.000,00	0,00

Tal y como se puede observar en el anterior cuadro de amortización, la operación de préstamo finaliza en el noveno año, de manera que el capital pendiente de amortizar al principio del mismo, o sea 3.192,93 euros, se corresponde con la cuota de amortización de dicho año, obteniéndose un importe del término amortizativo de 3.376,52 euros.

2. Un préstamo de 90.000 € se pacta amortizar en un máximo de 5 años con términos semestrales constantes acordados al inicio de la operación. El tipo de interés pactado es el Euribor + 1%, siendo anual el plazo de revisión del mismo. Sabiendo que el tipo de interés a aplicar el primer año es el 3% nominal anual pagadero semestralmente, calcular el importe del término amortizativo semestral constante y la cuantía modificada del último término, sabiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y restantes años es la siguiente: 4%, 4,50%, 4,75% y 5% nominal anual.

Resolución

Se trata de un préstamo acordado con la modalidad de términos amortizativos semestrales predeterminados, cuya cuantía es preciso calcular. La cuantía constante semestral inicialmente calculada permanece inalterada durante toda la vida del préstamo, modificándose únicamente en el último período para permitir la total amortización del préstamo.

Para determinar el importe del término amortizativo semestral, se plantea la ecuación de equivalencia financiera en función de la duración máxima de la operación y tomando el tipo de interés del primer año como si éste fuese el mismo para todos los períodos futuros. Teniendo en cuenta que el tipo de interés semestral equivalente al 3% nominal anual pagadero semestralmente es $i_1^{(m)} = \frac{0{,}03}{2} = 0{,}015$, se tiene:

© Ediciones Pirámide

$$90.000 = a \times a_{\overline{10}|0,015} \quad \Rightarrow \quad a = 9.759,08 \text{ €}$$

A continuación se elabora el cuadro de amortización del préstamo, con la finalidad de determinar la cuantía del último término amortizativo, la cual se ve modificada a consecuencia de la evolución del tipo de interés. En dicho cuadro, para cada uno de los diez semestres se recoge la descomposición del término semestral en cuota de interés y cuota de amortización, así como el capital pendiente de amortizar y el total amortizado. El cuadro de amortización es el siguiente:

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Capital vivo
0	—	—	—	—	—	90.000,00
1	0,01500	9.759,08	1.350,00	8.409,08	8.409,08	81.590,92
2	0,01500	9.759,08	1.223,86	8.535,22	16.944,30	73.055,70
3	0,02500	9.759,08	1.826,39	7.932,69	24.876,99	65.123,01
4	0,02500	9.759,08	1.628,08	8.131,00	33.007,99	56.992,01
5	0,02750	9.759,08	1.567,28	8.191,80	41.199,79	48.800,21
6	0,02750	9.759,08	1.342,01	8.417,07	49.616,86	40.383,14
7	0,02875	9.759,08	1.161,02	8.598,06	58.214,92	31.785,08
8	0,02875	9.759,08	913,82	8.845,26	67.060,18	22.939,82
9	0,03000	9.759,08	688,19	9.070,89	76.131,07	13.868,93
10	0,03000	14.285,00	416,07	13.868,93	90.000,00	0,00

En el cuadro precedente se observa que la duración de la operación coincide con el plazo máximo establecido y que el importe del último término semestral asciende a 14.285 euros.

3. Una entidad financiera ofrece a un cliente un préstamo de 50.000 euros con tipos referenciados a amortizar en un plazo máximo de 7 años, con términos amortizativos anuales constantes de cuantía 8.000 euros. El tipo de interés pactado es el Euribor + 1,5%, siendo el tipo de interés a aplicar el primer año del 0,3% anual. Calcular el último término amortizativo, sabiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y restantes años es la siguiente: 3,25%, 3,75%, 3,65%, 4,15%, 3,80% y 3,95% anual.

Resolución

Se trata de un préstamo acordado con la modalidad de términos amortizativos anuales predeterminados de cuantía 8.000 €. Dicho importe permanece inalterado durante toda la vida del préstamo, modificándose únicamente en el último período para permitir la total amortización del préstamo.

© Ediciones Pirámide

Para calcular el último término amortizativo vamos a elaborar el cuadro de amortización del mismo. Para el primer año calculamos la cuota de interés, y a continuación se determina la cuota de amortización como la diferencia entre el término y la cuota de interés, ya que el importe del término amortizativo es conocido. Finalmente se obtiene el capital total amortizado y el capital vivo. Para el segundo y siguientes años la operativa es la misma, salvo en el último año, en el que se ha de amortizar totalmente el préstamo. Con respecto a este último, se obtiene primero la cuota de amortización que ha de coincidir con el capital vivo al final del sexto año, calculándose el último término como la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización.

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Capital vivo
0	—	—	—	—	—	50.000,00
1	0,0030	8.000,00	150,00	7.850,00	7.850,00	42.150,00
2	0,0475	8.000,00	2.002,13	5.997,87	13.847,87	36.152,13
3	0,0525	8.000,00	1.897,99	6.102,01	19.949,88	30.050,12
4	0,0515	8.000,00	1.547,58	6.452,42	26.402,30	23.597,70
5	0,0565	8.000,00	1.333,27	6.666,73	33.069,03	16.930,97
6	0,0530	8.000,00	897,34	7.102,66	40.171,69	9.828,31
7	0,0545	10.363,95	535,64	9.828,31	50.000,00	0,00

En consecuencia, la cuantía del último término amortizativo asciende a 10.363,95 €.

4. Un préstamo de 65.000 euros se amortiza con tipos referenciados en 4 años y con las siguientes cuotas de capital: 14.000 euros durante cada uno de los dos primeros años y 18.500 euros durante los restantes. El tipo de interés pactado para el primer año es el 3,75% anual, y para los siguientes es el Euribor + 0,75%. Calcular el importe de los distintos términos amortizativos que ha de abonar el prestatario, suponiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y siguientes años es la siguiente: 3,25%, 4,10% y 4,50%.

Resolución

Para obtener la cuantía de los términos amortizativos hay que elaborar el cuadro de amortización, teniendo en cuenta que las cuotas de amortización son de cuantía predeterminada. Tras obtener, en primer lugar, la cuota de interés, se determina el correspondiente término amortizativo como suma de la cuota de interés y la cuota de amortización. A continuación se calcula el capital vivo y el capital total amortizado. El cuadro de amortización es:

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Capital vivo
0	—	—	—	—	—	65.000,00
1	0,0375	16.437,50	2.437,50	14.000,00	14.000,00	51.000,00
2	0,0400	16.040,00	2.040,00	14.000,00	28.000,00	37.000,00
3	0,0485	20.294,50	1.794,50	18.500,00	46.500,00	18.500,00
4	0,0525	19.471,25	971,25	18.500,00	65.000,00	0,00

5. Sea un préstamo de 90.000 euros con tipos de interés referenciados a amortizar en 8 años con cuotas de amortización anuales que aumentan anualmente en 500 euros. El tipo de interés pactado para el primer año es el 2,75% anual, y para los siguientes es el Euribor + 0,5%. Calcular la cuota de interés del tercer año y el término amortizativo del mismo, suponiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y tercer año es 3% y 3,50% anual, respectivamente.

Resolución

Se trata de un préstamo a amortizar con la modalidad de plan de amortización predeterminado y términos amortizativos posdeterminados. Para determinar el importe de la primera cuota de amortización, así como el de las restantes, las cuales varían en progresión aritmética con $d = 500$, se utiliza la expresión $s = \dfrac{(A_1 + A_n)n}{2}$, que recoge la suma de una sucesión de términos de una progresión aritmética. Al sustituir en dicha expresión, teniendo en cuenta que $A_8 = A_1 + 500\ (8 - 1) = A_1 + 3.500$, se obtiene:

$$90.000 = \frac{(A_1 + A_1 + 3.500) \times 8}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 9.500$$

Una vez establecido el plan de amortización, se procede al cálculo de la cuota de interés del tercer año, la cual se obtiene a través de la expresión: $I_3 = C_2 \times i_3$.

El capital pendiente de amortizar al final del segundo año se obtiene como $C_2 = C_0 - M_2^e$, teniendo en cuenta que el capital amortizado al final del segundo año es $M_2^e = A_1 + A_2 = 9.500 + 10.000 = 19.500$, se tiene: $C_2 = 90.000 - 19.500 = = 70.500$.

La cuota de interés del tercer año, para un tipo de interés del 4% anual, es:

$$I_3 = 70.500 \times 0,04 = 2.820\ €$$

Al ser la cuota de amortización del año 3 de cuantía 10.500, se tiene que el término amortizativo de dicho año asciende a 13.320 €.

© Ediciones Pirámide

6. Una operación de amortización de 20.000 € se pacta con tipos referenciados, de duración 3 años, términos anuales posdeterminados y plan de amortización posdeterminado. Los términos amortizativos se calculan al principio de cada año en base al método francés generalizado. El tipo de interés pactado es el Euribor + 0,65%, siendo el tipo de interés a aplicar el primer año el 2,80% anual. Realizar el cuadro de amortización, suponiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y tercer año es del 3,5% anual y 3,75% anual, respectivamente.

Resolución

Para completar el cuadro de amortización es necesario calcular la cuantía de los distintos términos amortizativos, planteando las correspondientes ecuaciones de equivalencia financiera. Así, para obtener el primer término se plantea la equivalencia financiera entre la cuantía del préstamo y los términos constantes, suponiendo que el tipo de interés del primer año permanece constante durante los tres años de vida del préstamo:

$$20.000 = a_1 \times a_{\overline{3}|0,028} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 7.043,44 \text{ €}$$

Una vez determinada la primera cuota de interés (560 euros) y el importe del primer término, se obtiene la correspondiente cuota de amortización (6.483,44 euros), por lo que el saldo pendiente al final del año 1 asciende a 13.516,56 euros, obteniéndose de esta forma toda la información necesaria para completar la primera fila del cuadro de amortización. En base al saldo obtenido se calcula el segundo término amortizativo:

$$13.516,56 = a_2 \times a_{\overline{2}|0,0415} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 7.181,83 \text{ €}$$

Con la información del segundo término amortizativo se puede completar la segunda fila del cuadro de amortización, ascendiendo a 6.895,67 euros el capital pendiente de amortizar al final del segundo año. Finalmente se obtiene el tercer término, como suma de la tercera cuota de interés y del capital pendiente de amortizar al final del año 2:

$$a_3 = 303,41 + 6.895,67 = 7.199,08$$

El cuadro de amortización de esta operación se muestra a continuación:

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo
0	—	—	—	—	—	20.000,00
1	0,0280	7.043,44	560,00	6.483,44	6.483,44	13.516,56
2	0,0415	7.181,83	560,94	6.620,89	13.104,33	6.895,67
3	0,0440	7.199,08	303,41	6.895,67	20.000,00	0,00

© Ediciones Pirámide

7. Se pacta un préstamo de 30.000 €, con tipos referenciados al Euribor, términos amortizativos mensuales calculados por el método francés generalizado y con una duración de 5 años. El tipo de interés a aplicar en el primer año es el 4,2% anual pagadero mensualmente, y en los siguientes es el Euribor + 0,80%. Sabiendo que el tipo de interés se revisa anualmente, calcular el capital amortizado hasta el final del segundo año, así como la cuantía de los pagos mensuales correspondientes al año 3. Suponemos que el Euribor para el segundo año es del 4,6% anual pagadero mensualmente, y para el año 3 el 4,8%.

Resolución

En este ejercicio la periodicidad de los términos amortizativos es mensual, por lo que es necesario obtener el tipo de interés mensual equivalente al nominal. Así, para el primer año, el tipo de interés mensual es: $i_1^{(m)} = \dfrac{0{,}042}{2} = 0{,}0035$.

La cuantía de los términos amortizativos mensuales del primer año se obtiene a través de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$30.000 = a_1 \times a_{\overline{60}|0{,}0035} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 555{,}21$$

A continuación se obtiene el capital pendiente de amortizar al final del primer año, que por el método prospectivo es:

$$C_{12} = 555{,}21 \times a_{\overline{48}|0{,}0035} = 24.492{,}40$$

Como el tipo de interés se revisa anualmente, es preciso determinar, con el nuevo tipo, los términos amortizativos futuros. Así, para determinar los términos amortizativos que se han de abonar en cada mes del segundo año es necesario calcular el tipo de interés mensual equivalente al 5,4% anual pagadero mensualmente: $i_2^{(m)} = \dfrac{0{,}054}{2} = 0{,}0045$.

Al plantear la ecuación de equivalencia financiera al final del año 1, entre el saldo pendiente y los 48 términos restantes, suponiendo que el tipo de interés del segundo año permanece constante hasta el final del préstamo, obtenemos el importe de los términos mensuales correspondientes al segundo año:

$$24.492{,}40 = a_2 \times a_{\overline{48}|0{,}0045} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 568{,}49$$

El capital vivo al final del segundo año se obtiene a través del método prospectivo:

$$C_{24} = 568{,}49 \times a_{\overline{36}|0{,}0045} = 18.854{,}88$$

© Ediciones Pirámide

El capital total amortizado al final del año 2 es:

$$M_{24}^{c} = C_0 - C_{24} = 30.000 - 18.854,88 = 11.145,12 \text{ €}$$

El tipo nominal anual del año 3 es el 5,6%, por lo que el pago mensual de dicho año se deduce de:

$$18.854,88 = a_3 \times a_{\overline{36}|0,4\hat{6}} \quad \Rightarrow \quad a_3 = 570,19$$

8. Sea una operación de préstamo de cuantía 60.000 euros a amortizar en 10 años con tipos de interés referenciados. El tipo de interés pactado es el Euribor + 0,60%, el plazo de revisión del tipo de interés es anual y el tipo de interés a aplicar el primer año es el 3,5% anual pagadero mensualmente. El préstamo se amortiza con pagos mensuales según el método francés generalizado. Calcular la cuota de amortización correspondiente al sexto mes del segundo año, suponiendo que el Euribor para el segundo año es del 4,8% anual pagadero mensualmente.

Resolución

Para determinar la cuota de amortización correspondiente al sexto mes del segundo año, es decir, la cuota de capital número 18, es preciso calcular el importe de los términos amortizativos mensuales del primer y segundo año. El tipo de interés mensual correspondiente al primer año es $i_1^{(m)} = \dfrac{0,035}{12} = 0,002916\hat{6}$, de manera que para obtener el término amortizativo mensual correspondiente a los 12 primeros meses se plantea la ecuación de equivalencia financiera en el origen, suponiendo que el tipo de interés del primer año permanece constante hasta la finalización de la operación:

$$60.000 = a_1 \times a_{\overline{120}|i_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 593,32$$

Una vez calculado el primer término amortizativo, se calcula el saldo o capital pendiente de amortizar al final de los 12 primeros meses:

$$C_{12} = 593,32 \times a_{\overline{108}|i_1} = 54.899,35$$

Con dicho saldo se procede a calcular el término amortizativo mensual correspondiente al segundo año, planteando nuevamente la ecuación de equivalencia financiera al final del primer año o final de los 12 primeros meses, suponiendo que el tipo de interés mensual del segundo año $i_2^{(m)} = \dfrac{0,048 + 0,006}{12} = \dfrac{0,054}{12} = 0,0045$ permanece constante hasta la finalización del préstamo:

$$54.899,35 = a_2 \times a_{\overline{108}|0,0045} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 642,94$$

© Ediciones Pirámide

La cuota de amortización del mes 18 se obtiene como la diferencia entre el importe del término amortizativo de dicho mes y la correspondiente cuota de interés, la cual se calcula a través de la expresión: $I_{18} = C_{17} \times 0{,}45\%$. El capital vivo al final del mes 17 se obtiene a través de la expresión $C_{17} = 642{,}94 \times a_{\overline{103}|0{,}0045} = 52.902{,}18$, por lo que la cuota de interés asciende a:

$$I_{18} = 52.902{,}18 \times 0{,}0045 = 238{,}06$$

Por consiguiente, la cuota de amortización del sexto mes del segundo año es:

$$A_{18} = a_2 - I_{18} = 642{,}94 - 238{,}06 = 404{,}88\ €$$

9. Un préstamo de 15.000 euros se va a amortizar en 3 años con tipos de interés referenciados. El tipo de interés pactado es el Euribor + 0,75% y el plazo de revisión del tipo de interés es anual. El préstamo se amortiza con pagos mensuales según el método francés generalizado. Calcular el capital vivo al final del segundo año, sabiendo que la cuantía de los términos amortizativos mensuales del primer y segundo año es 440,20 € y 442,92 €, respectivamente.

Resolución

Para obtener el capital pendiente de amortizar al final del segundo año por el método retrospectivo es preciso calcular previamente el tipo de interés correspondiente al primer y segundo año del préstamo. Por ello, vamos a plantear la ecuación de equivalencia financiera en el origen, entre la cuantía del préstamo y los términos amortizativos mensuales, suponiendo que el tipo de interés mensual aplicable al primer año permanece constante hasta la finalización de la operación:

$$15.000 = 440{,}20 \times a_{\overline{36}|i_1^{(m)}} \Rightarrow i_1^{(m)} = 0{,}003$$

Una vez calculado el tipo de interés mensual correspondiente al primer año, podemos determinar el capital pendiente de amortizar al final de dicho año a través del método prospectivo:

$$C_{12} = 440{,}20 \times a_{\overline{24}|0{,}003} = 10.178{,}72$$

Con dicho saldo, y con la cuantía del término amortizativo mensual a abonar en el segundo año, se procede a plantear la ecuación de equivalencia financiera al final del primer año, o final de los 12 primeros meses, suponiendo que el tipo de interés mensual del segundo año permanece constante hasta el final de la operación, con el objetivo de determinar dicho tipo de interés mensual:

$$10.178{,}72 = 442{,}92 \times a_{\overline{24}|i_2^{(m)}} \Rightarrow i_2^{(m)} = 0{,}0035$$

© Ediciones Pirámide

Una vez calculado el tipo de interés mensual correspondiente al primer y segundo año, se puede determinar el capital pendiente de amortizar transcurridos 24 meses desde la formalización de la operación. Dicho saldo, por el método retrospectivo, es:

$$C_{24} = 15.000(1{,}003)^{12}(1{,}0035)^{12} - 440{,}20 \times s_{\overline{12}|0{,}003}(1{,}0035)^{12} - 442{,}92 \times s_{\overline{12}|0{,}0035} =$$
$$= 5.195{,}83 \text{ €}$$

Si determinamos el saldo por el método recurrente, tenemos:

$$C_{24} = 10.178{,}72(1{,}0035)^{12} - 442{,}92 \times s_{\overline{12}|0{,}0035} = 5.195{,}99 \text{ €}$$

10. Hace cinco años se pactó un préstamo a amortizar en 15 años mediante pagos mensuales de acuerdo con el método francés generalizado y tipos de interés revisables anualmente y referenciados al Euribor a un año. El tipo nominal anual para el primer año fue el 6%, y para los siguientes se estipuló un diferencial del 1%. Se sabe que el saldo al principio del segundo año de la operación ha ascendido a 191.516,71 €, y que la cuota de amortización correspondiente al segundo mes del año 5 fue 817,11 €. No se dispone de los datos correspondientes al Euribor a aplicar en los años 2 a 4, ambos inclusive, pero se sabe que para el año 5 tomó un valor del 6,2% nominal anual. Determinar el capital total amortizado en los cinco primeros años.

Resolución

El capital total amortizado en los 5 primeros años (60 meses) se obtiene según la expresión: $M^e_{60} = C_0 - C_{60}$, por lo que es preciso determinar la cuantía del préstamo y la del saldo al principio del mes 61.

De acuerdo con los datos facilitados, el tipo de interés para el primer año es el 0,5% mensual, por lo que al principio del mes 13, teniendo en cuenta que faltan por vencer 168 términos amortizativos mensuales, se verifica la siguiente ecuación, correspondiente al saldo por el método prospectivo:

$$C_{12} = 191.516{,}71 = a_1 \times a_{\overline{168}|0{,}5\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1.687{,}71$$

Asimismo, teniendo en cuenta la expresión del saldo por el método retrospectivo, se verifica:

$$C_{12} = C_0 \times (1 + 0{,}5\%)^{12} - a_1 \times s_{\overline{12}|0{,}5\%} = 191.516{,}71 \quad \Rightarrow \quad C_0 = 200.000$$

Teniendo en cuenta que el Euribor a aplicar en el año 5 es el 6,2% nominal anual, y de acuerdo con las condiciones estipuladas, el tipo de interés mensual a aplicar en dicho año es el 0,6%, deducido de la expresión: $i_5^{(m)} = \dfrac{0{,}062 + 0{,}01}{12} = 0{,}006$.

© Ediciones Pirámide

Conocemos la cuota de amortización del segundo mes del año 5, o sea, la cuota de amortización del mes 50. Como el método de amortización es el francés generalizado, las cuotas de amortización varían en progresión geométrica, por lo que se verifica: $A_{50} = A_{49} \times (1 + 0{,}6\%)$.

Al principio del año 5, o a la derecha del mes 48, faltan por vencer los términos amortizativos mensuales correspondientes a 11 años, por lo que la primera cuota de amortización del año 5 (cuota del mes 49), se obtiene, de acuerdo con el método francés, según la expresión: $A_{49} = \frac{C_{48}}{s_{\overline{11\times 12}|0{,}6\%}}$. En consecuencia, al despejar y sustituir se llega a:

$$C_{48} = A_{49} \times s_{\overline{11\times 12}|0{,}6\%} = A_{50} \times 1{,}006^{-1} \times s_{\overline{11\times 12}|0{,}6\%} = 162.797{,}79$$

Conocido el saldo al inicio del año 5 y el tipo de interés a aplicar en dicho año, podemos determinar la cuantía del término amortizativo correspondiente:

$$162.797{,}79 = a_5 \times a_{\overline{132}|0{,}6\%} \quad \Rightarrow \quad a_5 = 1.789{,}02$$

Nos falta por determinar la cuantía del saldo al principio del mes 61, la cual podemos calcular utilizando el método recurrente y en función del saldo en 48, verificándose:

$$C_{60} = C_{48} \times (1 + 0{,}6\%)^{12} - 1.789{,}02 \times s_{\overline{12}|0{,}6\%} = 152.722{,}83.$$

En consecuencia, tenemos:

$$M_{60}^{e} = C_0 - C_{60} = 200.000 - 152.722{,}83 = 47.277{,}17 \text{ €}$$

13.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea una operación de préstamo de 24.000 €, con tipos referenciados, a amortizar en un plazo máximo de 5 años. El primer término amortizativo anual asciende a 5.500 €, variando los restantes términos en progresión aritmética de razón 500 €. El tipo de interés anual pactado es el 3,5% para el primer año, y para los restantes es el Euribor + 0,75%. Calcular el importe del último término amortizativo, suponiendo que la evolución futura del Euribor para el segundo y siguientes años, es la siguiente: 3,25%, 3,75%, 4,05% y 4,25% anual.

2. Un préstamo se amortiza anualmente con tipos referenciados en 10 años y con el siguiente plan de amortización: la primera cuota de capital asciende a 10.000 euros, y las siguientes aumentan en un 12% anual. El tipo de interés anual pactado para el primer año es el 3%, y para los siguientes es el Euribor + 2%.

© Ediciones Pirámide

Calcular el último término amortizativo, suponiendo que la evolución futura del Euribor para los cuatros años siguientes es del 4% anual, y del 5% anual para los cinco años restantes.

3. Un préstamo de 150.000 € se va a amortizar en 10 años con términos amortizativos anuales y tipos referenciados. Los términos amortizativos se calculan al principio de cada año en base al método francés generalizado. El tipo de interés pactado es el Euribor + 0,49%, siendo el tipo de interés a aplicar el primer año del 2,4% anual. Calcular el capital pendiente de amortizar al principio del tercer año, suponiendo que el valor del Euribor para el segundo año es del 3,2% anual.

4. Hace tres años se concedió un préstamo de 90.000 € con tipos referenciados, amortizable anualmente en 15 años por el método francés generalizado. El tipo de interés anual pactado para el primer año fue el 2,5% y para los siguientes años el Euribor + 0,75%. Calcular el capital amortizado hasta el final del tercer año, sabiendo que el Euribor tomó un valor del 3% anual y del 3,5% anual en el segundo y tercer año, respectivamente.

5. Sea una operación de préstamo con tipos referenciados de importe 135.000 €, a amortizar en 12 años con cuotas de amortización anuales variables en progresión aritmética de razón 1.000 €. El tipo de interés para el primer año es el 4% anual, mientras que para los siguientes es el Euribor + 1%. Calcular el importe del término amortizativo correspondiente al cuarto año, suponiendo que la evolución futura del Euribor del segundo y restantes años es la siguiente: 4,10%, 4% y 4,30% anual.

6. Un préstamo de 28.000 € se va a amortizar con tipos de interés referenciados en 5 años y términos amortizativos mensuales calculados según el método francés generalizado. El tipo de interés pactado para el primer año es el 2,5% nominal anual, y para los siguientes es el Euribor + 0,25%. El plazo de revisión del tipo de interés es anual. Calcular la cuota de interés correspondiente al octavo mes del tercer año, suponiendo que el valor del Euribor para el segundo y tercer año es el 3,75% y el 4,5% anual pagadero mensualmente.

7. Sea una operación de préstamo de cuantía 500.000 euros a amortizar en 15 años con tipos de interés referenciados, revisables anualmente. El tipo de interés pactado es el Euribor + 1%. El préstamo se amortiza con pagos mensuales según el método francés generalizado. Calcular la cuota de amortización del primer mes del tercer año, sabiendo que el Euribor previsto para el año 3 es del 5% nominal anual y que la cuantía de los términos amortizativos mensuales del primer y segundo año es 3.902,07 € y 3.757,57 €, respectivamente.

© Ediciones Pirámide

14 Valor financiero del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad

OBJETIVOS

- Conocer los conceptos básicos de la valoración de préstamos: valor financiero total, valor financiero del usufructo y valor financiero de la nuda propiedad.
- Determinar el valor financiero del usufructo a través de la fórmula de Achard.
- Calcular el valor financiero total, valor financiero del usufructo y de la nuda propiedad en cualquier operación de préstamo.

SUMARIO

14.1. Conceptos básicos.
14.2. Fórmula de Achard.
14.3. Valoración en métodos particulares de amortización.
14.4. Ejercicios y problemas resueltos.
14.5. Ejercicios y problemas propuestos.

14.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Sea una operación de préstamo con contraprestación múltiple, formalizada hace s períodos, por lo que nos encontramos situados al principio del período $s + 1$. En este momento el capital pendiente de amortizar o capital vivo, C_s, se amortizará con los $(n - s)$ términos amortizativos pendientes. Gráficamente:

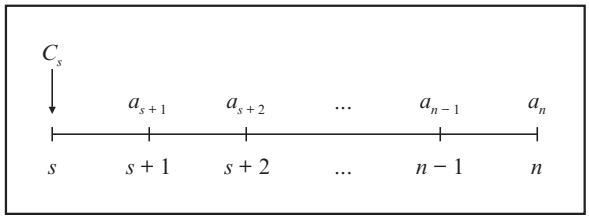


Figura 14.1.

El conjunto de los términos amortizativos pendientes de vencer $\{(a_{s+1}, s + 1), (a_{s+2}, s + 2), ..., (a_n, n)\}$ representa los derechos del prestamista sobre el préstamo que concedió.

Los términos amortizativos se pueden descomponer en cuota de interés y cuota de amortización. Las cuotas de amortización $\{(A_{s+1}, s + 1), (A_{s+2}, s + 2), ..., (A_n, n)\}$ representan el derecho de nuda propiedad del préstamo vivo, mientras que las cuotas de interés futuras $\{(I_{s+1}, s + 1), (I_{s+2}, s + 2), ..., (I_n,n)\}$ representan el derecho de usufructo del préstamo vivo.

Si al inicio del período $s + 1$, el prestamista o acreedor pacta con un tercero la cesión total o parcial de sus derechos, dicha cesión se hará con las condiciones que pacten estos sujetos. Para llevar a cabo tal cesión es preciso valorar los dere-

© Ediciones Pirámide

chos futuros sobre el préstamo al tipo de interés que para ello se pacte, que suponemos de valor constante i', dando lugar a los conceptos de valor financiero total, valor financiero de la nuda propiedad y valor financiero del usufructo, los cuales se analizan a continuación.

a) **Valor financiero del préstamo.** El valor financiero total de la operación al principio del período $s + 1$ es el valor actualizado de los términos amortizativos futuros o pendientes de vencimiento, utilizando el tipo de interés i':

$$V_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

Gráficamente, tenemos:

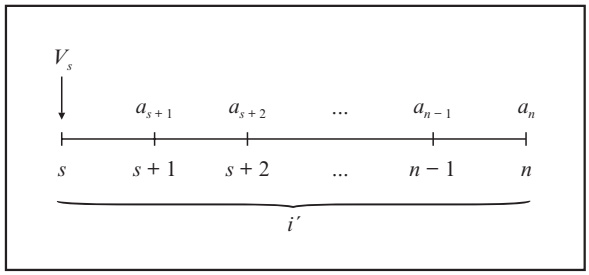


Figura 14.2.

En la hipótesis de que el préstamo sea elemental o simple, el valor financiero del mismo al principio del período $s + 1$ viene dado por la siguiente expresión:

$$V_s = [C_0(1 + i)^n](1 + i')^{-(n-s)}$$

EJERCICIO 14.1

Sea una operación de préstamo de 120.000 euros a amortizar en 25 años al 7,5% anual con términos amortizativos anuales constantes. Determinar el valor financiero total del préstamo al principio del año 10, sabiendo que el tipo de interés de valoración es el 6% anual.

Resolución

Para calcular el valor financiero del préstamo al final del año 9 o principio del año 10 es necesario determinar el importe de los términos amortizativos constantes:

$$120.000 = a \times a_{\overline{25}|0,075} \quad \Rightarrow \quad a = 10.765,28$$

© Ediciones Pirámide

A continuación se obtiene el valor financiero del préstamo actualizando los 16 términos amortizativos futuros al tipo de interés pactado:

$$V_9 = 10.765{,}28 \times a_{\overline{16}|0{,}06} = 108.792{,}79 \text{ €}$$

---

b) **Valor financiero del usufructo y de la nuda propiedad.** Dado que cada término amortizativo se descompone en cuota de interés y cuota de amortización: $a_{s+h} = I_{s+h} + A_{s+h}$, podemos obtener el valor financiero total del préstamo a través de la expresión:

$$V_s = \sum_{h=1}^{n-s} I_{s+h}(1 + i')^{-h} + \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

El primer sumatorio recoge el valor actualizado de las cuotas de interés futuras o pendientes de vencer al tipo de interés i'. Nos indica el **valor financiero del usufructo** al principio del período $s + 1$ y que denominamos U_s:

$$U_s = \sum_{h=1}^{n-s} I_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

El segundo sumatorio recoge el valor actualizado de las cuotas de amortización futuras o pendientes de vencimiento utilizando el tipo de interés i'. Dicha expresión nos indica el **valor financiero de la nuda propiedad** al principio del período $s + 1$ y que denominamos N_s:

$$N_s = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

Por consiguiente, podemos expresar el valor financiero total del préstamo como suma del valor financiero del usufructo y el valor financiero de la nuda propiedad:

$$V_s = U_s + N_s$$

Si la operación pactada es un préstamo elemental o simple, para el valor financiero del usufructo y el de la nuda propiedad al principio del período $s + 1$, tenemos:

$$U_s = C_0[(1 + i)^n - 1](1 + i')^{-(n-s)}$$

$$N_s = C_0(1 + i')^{-(n-s)}$$

14.2. FÓRMULA DE ACHARD

14.2.1. Planteamiento general

Supongamos que al inicio del período $s + 1$ se desea vender un préstamo pactado a tipo de interés constante i, valorándolo al tipo i'. En dicho momento, el

© Ediciones Pirámide

saldo del préstamo a través del método prospectivo se obtiene según la siguiente expresión:

$$C_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-h}$$

Además, y como sabemos, cualquiera de los términos amortizativos se descompone en cuota de interés y cuota de amortización, por lo que se verifica:

$$a_{s+h} = i \times C_{s+h-1} + A_{s+h}$$

Se tiene, pues, que al tipo de interés i, los términos amortizativos a_{s+h} amortizan el capital vivo C_s. Por tanto[1], al tipo de interés i' de venta del préstamo, dicho capital C_s será amortizado por otros términos amortizativos a'_{s+h}, los cuales verifican:

$$a'_{s+h} = i' \times C_{s+h-1} + A_{s+h} \left| \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h} = C_s \right.$$

Y además:

$$C_s = \sum_{h=1}^{n-s} a'_{s+h}(1+i')^{-h} = \sum_{h=1}^{n-s}(i' \times C_{s+h-1} + A_{s+h})(1+i')^{-h}$$

De manera que se puede descomponer dicho saldo C_s en los dos componentes siguientes:

$$C_s = \sum_{h=1}^{n-s} i' \times C_{s+h-1}(1+i')^{-h} + \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1+i')^{-h}$$

A continuación multiplicamos el primer sumatorio por $\frac{i}{i}$, y sabiendo que el segundo sumatorio se corresponde con el valor financiero de la nuda propiedad, obtenemos:

$$C_s = \sum_{h=1}^{n-s} i' \frac{i}{i} \times C_{s+h-1}(1+i')^{-h} + N_s = \frac{i'}{i} \times \sum_{h=1}^{n-s} i \times C_{s+h-1}(1+i')^{-h} + N_s$$

Teniendo en cuenta que el valor financiero del usufructo es $U_s = \sum_{h=1}^{n-s} i \times C_{s+h-1}(1+i')^{-h}$, se verifica:

$$C_s = \frac{i'}{i} \times U_s + N_s$$

[1] Gil Peláez (1987: 446).

© Ediciones Pirámide

Si a continuación despejamos el valor financiero del usufructo obtenemos la fórmula de **Achard,** la cual nos relaciona el valor financiero del usufructo con el valor financiero de la nuda propiedad:

$$U_s = \frac{i}{i'} \times (C_s - N_s)$$

Si sustituimos la anterior fórmula de Achard en la expresión $V_s = U_s + N_s$, que descompone el valor financiero en usufructo y nuda propiedad, obtenemos la expresión siguiente: $V_s = \frac{i}{i'} \times (C_s - N_s) + N_s$. Operando, se tiene:

$$V_s = \frac{i}{i'} \times C_s + \left(1 - \frac{i}{i'}\right) \times N_s$$

Esta expresión es conocida como la fórmula de **Makeham,** la cual nos indica que el valor financiero total del préstamo es la media ponderada entre el capital pendiente de amortizar y el valor financiero de la nuda propiedad, siendo los coeficientes de ponderación $\frac{i}{i'}$ y $\left(1 - \frac{i}{i'}\right)$, respectivamente.

EJERCICIO 14.2

Hace 10 años se formalizó una operación de préstamo con términos amortizativos variables y tipo de interés constante del 8% anual. En la actualidad, faltando 5 años para su finalización, el prestamista vende al 6% anual sus derechos sobre el préstamo. Calcular el valor financiero del préstamo y el del usufructo, sabiendo que el importe de cada una de las tres siguientes cuotas de amortización pendientes de vencer es 2.500 euros, y el importe de cada una de las dos cuotas restantes es 3.500 euros.

Resolución

Para determinar el valor financiero del usufructo vamos a utilizar la fórmula de Achard. Para ello es preciso calcular previamente el saldo o capital pendiente de amortizar, como la suma aritmética de las cuotas de amortización futuras o pendientes de vencer: $C_{10} = 3 \times 2.500 + 2 \times 3.500 = 14.500$, y el valor financiero de la nuda propiedad, como el valor actualizado de dichas cuotas de amortización al tipo de interés del 6% anual:

$$N_{10} = 2.500 \times a_{\overline{3}|0,06} + 3.500 \times a_{\overline{2}|0,06} \times 1,06^{-3} = 12.070,26$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el valor financiero del usufructo es:

$$U_{10} = \frac{0{,}08}{0{,}06}(14.500 - 12.070{,}26) = 3.239{,}65\ €$$

El valor financiero total es: $V_{10} = 3.239{,}65 + 12.070{,}26 = 15.309{,}91$ €.

Es interesante señalar que el comprador del préstamo, al abonar por el mismo una cuantía de 15.309,91 €, está invirtiendo sus recursos financieros al tipo de compra del 6% anual, mientras que el vendedor está obteniendo recursos financieros con un coste también del 6% anual.

14.2.2. Préstamo con intereses fraccionados

Si la operación de préstamo se pacta con intereses fraccionados y tipo de interés constante, siendo, por tanto, la periodicidad en el pago de las cuotas de interés inferior a la periodicidad en el pago de las cuotas de amortización, dicho fraccionamiento afecta al cálculo del valor financiero.

En este tipo de préstamos, para valorar el usufructo, las m cuotas de interés que se abonan a lo largo de cada período se pueden sustituir por su suma financiera al final de dicho período. Así, para el período s se tiene: $C_{s-1} \times i^{(m)} \times s_{\overline{m}|i'^{(m)}}$, siendo $i'^{(m)}$ el tipo de interés del subperíodo, equivalente al tipo i' de valoración del préstamo. Por tanto, el valor financiero del préstamo al principio del período $s + 1$ es:

$$V_s^{(m)} = \sum_{h=1}^{n-s} C_{s+h-1} \times i^{(m)} \times s_{\overline{m}|i'^{(m)}} (1 + i')^{-h} + \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

La expresión anterior recoge el valor actualizado, al tipo de interés de valoración i' constante, de las cuotas de interés y de las cuotas de amortización.

Sabiendo que:

$$C_{s+h-1} \times i^{(m)} \times s_{\overline{m}|i'^{(m)}} = C_{s+h-1} \times i^{(m)} \frac{(1 + i'^{(m)})^m - 1}{i'^{(m)}} = C_{s+h-1} \frac{i^{(m)} \times i'}{i'^{(m)}}$$

El valor financiero del préstamo se puede expresar como:

$$V_s^{(m)} = \sum_{h=1}^{n-s} C_{s+h-1} \frac{i^{(m)} \times i'}{i'^{(m)}} (1 + i')^{-h} + \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

El primer sumatorio recoge el valor actualizado de las cuotas de interés futuras o pendientes de vencer y nos indica el **valor financiero del usufructo:**

$$U_s^{(m)} = \sum_{h=1}^{n-s} C_{s+h-1} \frac{i^{(m)} \times i'}{i'^{(m)}} (1 + i')^{-h}$$

© Ediciones Pirámide

El segundo sumatorio recoge el valor actualizado de las cuotas de amortización futuras o pendientes de vencimiento y nos indica el **valor financiero de la nuda propiedad:**

$$N_s = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1 + i')^{-h}$$

Por tanto, se verifica:

$$V_s^{(m)} = U_s^{(m)} + N_s$$

Si multiplicamos el valor financiero del usufructo por $\frac{i}{i}$, se tiene:

$$U_s^{(m)} = \sum_{h=1}^{n-s} C_{s+h-1}\frac{i}{i} \times \frac{i^{(m)} \times i'}{i'^{(m)}}(1 + i')^{-h} = \frac{i^{(m)}}{i'^{(m)}} \times \frac{i'}{i} \times \sum_{h=1}^{n-s} C_{s+h-1} \times i \times (1 + i')^{-h}$$

Teniendo en cuenta que el valor financiero del usufructo del préstamo equivalente sin intereses fraccionados es $U_s = \sum_{h=1}^{n-s} i \times C_{s+h-1} \times (1 + i')^{-h}$, se verifica:

$$U_s^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{i'^{(m)}} \times \frac{i'}{i} \times U_s$$

Al sustituir U_s por la fórmula de Achard, obtenemos la siguiente expresión:

$$U_s^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{i'^{(m)}} \times \frac{i'}{i} \times \frac{i}{i'}(C_s - N_s)$$

Al simplificar, se tiene la fómula de **Achard** para los préstamos con intereses fraccionados:

$$U_s^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{i'^{(m)}}(C_s - N_s)$$

Ejercicio 14.3

De un préstamo con cuotas de amortización anuales y cuotas de interés semestrales se sabe que faltan 20 años para su amortización y que el tipo de interés pactado es el 4% semestral. El importe de las cuotas de amortización pendientes de vencer es X para los 10 próximos años y $0{,}5X$ para los restantes años. En la actualidad, el préstamo se vende a un tipo de valoración del 5% semestral. Sabiendo que el importe de la próxima cuota de interés es 360 euros, calcular el valor financiero del usufructo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

En primer lugar vamos a calcular el saldo o capital pendiente de amortizar a partir del importe de la próxima cuota de interés:

$$I_{n-19} = C_{n-20} \times i^{(m)} \quad \Rightarrow \quad 360 = C_{n-20} \times 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad C_{n-20} = 9.000$$

Como el saldo es la suma aritmética de las cuotas de amortización futuras o pendientes de vencer, el importe X de la cuota de amortización es:

$$C_{n-20} = 10 \times X + 10 \times 0{,}5X = 9.000 \quad \Rightarrow \quad X = 600$$

El valor financiero de la nuda propiedad se obtiene como el valor actualizado de las cuotas de amortización al tipo de interés anual equivalente al 5% semestral:

$$N_{n-20} = 600 \times a_{\overline{10}|0{,}1025} + 300 \times a_{\overline{10}|0{,}1025} \times 1{,}1025^{-10} = 4.334{,}82$$

El valor financiero del usufructo se obtiene a partir de la fórmula de Achard para préstamos con intereses fraccionados:

$$U^{(m)}_{n-20} = \frac{0{,}04}{0{,}05}(9.000 - 4.334{,}82) = 3.732{,}14 \text{ €}$$

14.3. VALORACIÓN EN MÉTODOS PARTICULARES DE AMORTIZACIÓN

En este epígrafe vamos a aplicar los conceptos de valor financiero total, valor financiero de la nuda propiedad y valor financiero del usufructo a los siguientes métodos de amortización: francés, americano y cuotas de amortización constantes, suponiendo que el tipo i' de valoración es constante.

14.3.1. Método francés

En esta modalidad de amortización, en la que tanto los términos amortizativos como el tipo de interés son constantes, se obtiene directamente el valor financiero total del préstamo a través de la expresión:

$$V_s = a \times a_{\overline{n-s}|i'}$$

Para obtener el valor financiero del usufructo podemos aplicar la fórmula de Achard, por lo que hay que calcular previamente el saldo al principio del período

© Ediciones Pirámide

$s + 1$, cuya expresión a través del método prospectivo es: $C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$, por lo que se obtiene:

$$U_s = \frac{i}{i'}(a \times a_{\overline{n-s}|i} - N_s)$$

Teniendo en cuenta que $V_s = U_s + N_s$, llegamos a la ecuación siguiente, de la cual es posible obtener el valor financiero de la nuda propiedad N_s:

$$V_s = \frac{i}{i'}(a \times a_{\overline{n-s}|i} - N_s)$$

Finalmente, el valor financiero del usufructo se obtiene como $U_s = V_s - N_s$, o bien a través de la fórmula de Achard.

Otra forma de obtener directamente el valor de la nuda propiedad es mediante el valor actualizado de las $(n - s)$ cuotas de amortización futuras. Sabiendo que las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)$, el valor financiero de la nuda propiedad se obtiene como el valor actual de una renta de términos variables en progresión geométrica, de primer término A_{s+1}:

$$N_s = A_{(A_{s+1},\ q=1+i)\overline{n-s}|i'} = A_{s+1}\frac{1-(1+i)^{n-s}(1+i')^{-(n-s)}}{(1+i')-(1+i)} =$$

$$= A_1(1+i)^s\frac{1-\left(\dfrac{1+i}{1+i'}\right)^{n-s}}{i'-i}$$

EJERCICIO 14.4

Un préstamo de 25.000 € se amortiza en 8 años por el método francés con términos amortizativos anuales al 5% anual. Calcular el valor financiero total, el valor financiero del usufructo y el valor financiero de la nuda propiedad al principio del año 4, sabiendo que el tipo de interés de venta es el 6,5% anual.

Resolución

El término amortizativo constante es:

$$25.000 = a \times a_{\overline{8}|0,05} \quad \Rightarrow \quad a = 3.868,05$$

El valor financiero del préstamo al principio del año 4 es:

$$V_3 = 3.868,05 \times a_{\overline{5}|0,065} = 16.074,38\ €$$

© Ediciones Pirámide

El saldo al principio del año 4, a través del método prospectivo, se obtiene como:

$$C_3 = 3.868{,}05 \times a_{\overline{5}|0{,}05} = 16.746{,}63$$

El valor financiero del usufructo, mediante la fórmula de Achard, verifica:

$$U_3 = \frac{0{,}05}{0{,}065}(16.746{,}63 - N_3)$$

Sabiendo que $V_3 = U_3 + N_3$, llegamos a:

$$16.074{,}38 = \frac{0{,}05}{0{,}065}(16.746{,}63 - N_3) + N_3 \quad \Rightarrow \quad N_3 = 13.833{,}55\ €$$

Por último, una vez calculado el valor financiero de la nuda propiedad, podemos obtener el valor financiero del usufructo:

$$U_3 = 16.704{,}38 - 13.833{,}55 = 2.240{,}83\ €$$

14.3.2. Método americano

En el supuesto de que las cuotas de interés sean constantes, la expresión del valor financiero del usufructo es:

$$U_s = C_0 \times i \times a_{\overline{n-s}|i'}$$

Por otra parte, al existir una única cuota de amortización de cuantía $A_n = C_0$, el valor financiero de la nuda propiedad es:

$$N_s = C_0(1 + i')^{-(n-s)}$$

Por tanto, el valor financiero total es:

$$V_s = U_s + N_s = C_0 \times i \times a_{\overline{n-s}|i'} + C_0(1 + i')^{-(n-s)}$$

Ejercicio 14.5

Un préstamo de 60.000 € se amortiza por el sistema americano en 10 años a un tipo de interés del 4% anual. Al principio del noveno año, el prestamista vende el préstamo a un tipo de interés del 7% anual. Calcular el valor financiero total, el del usufructo y el de la nuda propiedad en dicho año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El importe de las cuotas de interés que debe satisfacer el deudor durante la vida del préstamo asciende a:

$$I = 60.000 \times 0{,}04 = 2.400$$

Por lo que el valor financiero del usufructo es:

$$U_8 = 2.400 \times a_{\overline{2}|0{,}07} = 4.339{,}24 \text{ €}$$

El valor financiero de la nuda propiedad es:

$$N_8 = 60.000(1 + 0{,}07)^{-2} = 52.406{,}32 \text{ €}$$

Finalmente, el valor financiero del préstamo es:

$$V_8 = U_8 + N_8 = 4.339{,}24 + 52.406{,}32 = 56.745{,}56 \text{ €}$$

14.3.3. Método de cuotas de amortización constantes

En esta modalidad de préstamo, el valor financiero de la nuda propiedad es:

$$N_s = A \times a_{\overline{n-s}|i'}$$

En cuanto al valor financiero del usufructo, si el tipo de interés del préstamo para la parte de operación pendiente de vencimiento es constante, se calcula a través de la fórmula de Achard, por lo que es preciso determinar previamente el saldo al principio del período $s + 1$, el cual verifica: $C_s = (n - s)A$. Por tanto:

$$U_s = \frac{i}{i'}\left[(n - s)A - A \times a_{\overline{n-s}|i'}\right]$$

Finalmente, obtenemos el valor financiero del préstamo como suma del valor financiero del usufructo y de la nuda propiedad: $V_s = U_s + N_s$.

También se puede obtener directamente el valor financiero del préstamo como el valor actualizado de los términos amortizativos futuros o pendientes de vencer. Teniendo en cuenta que éstos varían en progresión aritmética de razón $d = -A \times i$, la expresión que nos permite calcular el valor financiero del préstamo es el valor actual de una renta de términos variables en progresión aritmética de primer término a_{s+1}:

$$V_s = A_{(a_{s+1};d)\overline{n-s}|i'} = \left[a_{s+1} + d(n - s) + \frac{d}{i'}\right] \times a_{\overline{n-s}|i'} - \frac{d(n - s)}{i'}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 14.6

Se concede un préstamo de 9.000 euros a amortizar con cuotas de capital constantes en 12 años al 5,5% anual. Calcular el valor financiero total, el del usufructo y el de la nuda propiedad al principio del año 5, sabiendo que el tipo de interés de venta es el 6% anual.

Resolución

El importe de las cuotas de amortización constante es:

$$A = \frac{9.000}{12} = 750$$

Por tanto, el valor financiero de la nuda propiedad es:

$$N_4 = 750 \times a_{\overline{8}|0,06} = 4.657,35 \text{ €}$$

El capital vivo o pendiente de amortizar al final del año 4 se obtiene como:

$$C_4 = (12 - 4) \times 750 = 6.000$$

Por lo que el valor financiero del usufructo, mediante la fórmula de Achard, es:

$$U_4 = \frac{0,055}{0,06}(6.000 - 4.657,35) = 1.230,76 \text{ €}$$

Por último, se obtiene el valor financiero del préstamo:

$$V_4 = U_4 + N_4 = 4.657,35 + 1.230,76 = 5.888,11 \text{ €}$$

14.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se concede un préstamo a amortizar en 15 años con cuotas de amortización anuales constantes al 7,5% anual. Si transcurridos 8 años desde la concesión del préstamo se vende el mismo a un tipo de interés del 9% anual, calcular el importe de las cuotas de amortización, sabiendo que el valor financiero total en dicho momento asciende a 10.675,45 €.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El capital pendiente de amortizar al final del octavo año es: $C_8 = (15 - 8) \times A = 7A$, siendo el valor financiero de la nuda propiedad: $N_8 = A \times a_{\overline{7}|0,09}$, por lo que el valor financiero del usufructo, mediante la fórmula de Achard, es:

$$U_8 = \frac{0,075}{0,09}(7A - A \times a_{\overline{7}|0,09})$$

Teniendo en cuenta que el valor financiero del préstamo se obtiene como la suma del valor financiero del usufructo y el valor financiero de la nuda propiedad, se tiene:

$$V_8 = 10.675,45 = \frac{0,075}{0,09}(7A - A \times a_{\overline{7}|0,09}) + A \times a_{\overline{7}|0,09} \quad \Rightarrow \quad A = 1.600\ €$$

2. Un préstamo de duración 12 años se amortiza con términos anuales constantes al 12% anual. En la actualidad, una vez transcurridos 5 años desde la formalización de la operación, se vende el préstamo a un tipo del 11% anual. Calcular el importe del préstamo, así como la cuantía del término amortizativo, sabiendo que el valor financiero de la nuda propiedad asciende a 9.463,19 €.

Resolución

Al tratarse de un préstamo amortizable por el método francés, las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)$, por lo que el valor financiero de la nuda propiedad se obtiene como el valor actual de las 7 cuotas de amortización futuras, al tipo de interés del 11% anual:

$$N_5 = A_{(A_6;\ 1,12)\overline{7}|11\%} = 9.4653,19 = A_6 \frac{1 - 1,12^7 \times 1,11^{-7}}{1,11 - 1,12} \Rightarrow A_6 = 1.460,52$$

Una vez obtenido el importe de la sexta cuota de amortización es posible calcular la cuantía de la correspondiente al primer año:

$$A_6 = A_1(1 + i)^5 \Rightarrow 1.460,52 = A_1(1 + 0,12)^5 \Rightarrow A_1 = 828,74$$

El importe del préstamo se obtiene a partir de A_1:

$$C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i} \Rightarrow C_0 = 828,74 \times s_{\overline{12}|0,12} = 20.000$$

Por lo que la cuantía del término amortizativo constante, deducida de la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación, es:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 20.000 = a \times a_{\overline{12}|0,12} \Rightarrow a = 3.328,74\ €$$

© Ediciones Pirámide

3. Sea un préstamo de 100.000 euros amortizable en 18 años al 4% anual, con términos amortizativos anuales variables en progresión aritmética de razón 120 euros. Calcular al principio del año 12 el valor financiero del préstamo al 5% anual.

Resolución

En primer lugar, hay que determinar la cuantía del primer término amortizativo anual mediante la ecuación de equivalencia financiera en el origen del préstamo:

$$100.000 = A_{(a_1,\,120)\overline{18}|4\%} = \left(a_1 + 120 \times 18 + \frac{120}{0{,}04}\right) a_{\overline{18}|0{,}04} - \frac{120 \times 18}{0{,}04} \Rightarrow a_1 = 7.004{,}97$$

Una vez obtenido el término amortizativo del primer año, se puede calcular cualquiera de los restantes a través de la expresión $a_s = a_1 + d(s - 1)$. De manera que la cuantía del término amortizativo correspondiente al año 12 asciende a:

$$a_{12} = 7.004{,}97 + 120(12 - 1) = 8.324{,}97$$

Para determinar el valor financiero del préstamo a principio del año 12, es necesario actualizar, al tipo de interés i', los términos amortizativos futuros. Sabiendo que dichos términos varían en progresión aritmética, su valor financiero es:

$$V_{11} = A_{(a_{12},\,120)\overline{18-11}|5\%} = \left(8.324{,}97 + 120 \times 7 + \frac{120}{0{,}05}\right) a_{\overline{7}|0{,}05} - \frac{120 \times 7}{0{,}05} = 50.119{,}23\ €$$

4. Se concede un préstamo de 50.000 € al 8% anual para ser amortizado en 15 años mediante términos anuales que varían de año en año en un 2% acumulativo. Transcurridos 10 años desde la concesión del préstamo, se vende a un tipo de interés del 9% anual. Calcular el valor financiero de la nuda propiedad.

Resolución

Nos encontramos ante un préstamo con términos amortizativos variables en progresión geométrica de razón q =1,02. Para calcular el importe del primer término es necesario plantear la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$50.000 = a_1 \frac{1 - 1{,}02^{15} \times 1{,}08^{-15}}{1{,}08 - 1{,}02} \Rightarrow a_1 = 5.210{,}81$$

Sabiendo que el importe del término amortizativo correspondiente al año 11 es $a_{11} = 5.210{,}81(1 + 0{,}02)^{10} = 6.351{,}95$, se puede calcular el valor financiero

© Ediciones Pirámide

del préstamo y el capital vivo, ambos al final del año 10. El valor financiero total es:

$$V_{10} = 6.351{,}95\,\frac{1 - 1{,}02^5 \times 1{,}09^{-5}}{1{,}09 - 1{,}02} = 25.627{,}69$$

El saldo o capital vivo al principio del año 11, calculado a través del método prospectivo, asciende a:

$$C_{10} = 6.351{,}95\,\frac{1 - 1{,}02^5 \times 1{,}08^{-5}}{1{,}08 - 1{,}02} = 26.316{,}25$$

El valor financiero del usufructo lo calculamos a través de la fórmula de Achard:

$$U_{10} = \frac{0{,}08}{0{,}09}(26.316{,}25 - N_{10})$$

Por último, teniendo en cuenta que $V_{10} = U_{10} + N_{10}$, llegamos a:

$$25.627{,}69 = \frac{0{,}08}{0{,}09}(26.316{,}25 - N_{10}) + N_{10} \quad \Rightarrow \quad N_{10} = 20.119{,}21\ €$$

5. Sea un préstamo de 48.000 euros a amortizar en 16 años con términos amortizativos anuales y tipo de interés del 7% anual. Durante los 4 primeros años el deudor no desembolsa ninguna cuantía, durante los 6 años siguientes los términos amortizativos son de cuantía constante, y en los restantes años la cuantía de los términos amortizativos es la mitad de la de los anteriores. Al principio del año 9 el prestamista vende el préstamo al 9% anual. Calcular el valor financiero del usufructo.

Resolución

Para calcular cualquier valor financiero es necesario determinar el importe de los términos amortizativos. Sabiendo que existe un diferimiento en el préstamo de 4 años, en el que el prestatario no paga ninguna cuantía, la ecuación de equivalencia entre la prestación y la contraprestación es:

$$48.000(1 + 0{,}07)^4 = a \times a_{\overline{6}|0{,}07} + \frac{a}{2} \times a_{\overline{6}|0{,}07}(1 + 0{,}07)^{-6} \quad \Rightarrow \quad a = 9.901{,}19$$

El valor financiero total del préstamo al principio del año 9 se obtiene como el valor actualizado, al tipo de interés de venta, de los últimos 8 términos amortizativos anuales (dos de ellos de cuantía a y los seis restantes de cuantía $\frac{a}{2}$):

$$V_8 = 9.901{,}19 \times a_{\overline{2}|0{,}09} + \frac{9.901{,}19}{2}\, a_{\overline{6}|0{,}09}(1 + 0{,}09)^{-2} = 36.109{,}29$$

© Ediciones Pirámide

El saldo, a través del método prospectivo, al principio del año 9 se obtiene como el valor actualizado, al tipo de interés del préstamo, de los últimos 8 términos:

$$C_8 = 9.901{,}19 \times a_{\overline{2}|0{,}07} + \frac{9.901{,}19}{2} \times a_{\overline{6}|0{,}07}(1 + 0{,}07)^{-2} = 38.512{,}25$$

Aplicando la fórmula de Achard, y teniendo en cuenta que $V_8 = U_8 + N_8$, se obtiene el valor financiero de la nuda propiedad:

$$36.109{,}29 = \frac{0{,}07}{0{,}09}(38.512{,}25 - N_8) + N_8 \quad \Rightarrow \quad N_8 = 27.698{,}95$$

Finalmente, el valor financiero del usufructo verifica:

$$U_8 = 36.109{,}29 - 27.698{,}95 = 8.410{,}34 \text{ €}$$

6. Sea una operación de préstamo a amortizar en 8 años con términos amortizativos mensuales constantes y tipo de interés nominal del 6% anual pagadero mensualmente. Transcurridos 5 años y 3 meses se vende el préstamo a un tipo de interés nominal del 4,5% anual pagadero mensualmente. Sabiendo que el valor financiero de la nuda propiedad es 18.693,88 euros, calcular la cuantía concedida en préstamo.

Resolución

Sabiendo que el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual pagadero mensualmente es $i^{(m)} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$, se plantea la ecuación de equivalencia financiera, obteniéndose el término amortizativo mensual en función de C_0:

$$C_0 = a \times a_{\overline{96}|0{,}005} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{C_0}{a_{\overline{96}|0{,}005}}$$

Por otro lado, tenemos que el saldo de la operación transcurridos 5 años y 3 meses por el método prospectivo es:

$$C_{63} = a \times a_{\overline{33}|0{,}005}$$

Sustituyendo en la fórmula de Achard, y teniendo en cuenta que el tipo de interés mensual de venta, equivalente al 4,5% anual pagadero mensualmente, es $i'^{(m)} = \frac{0{,}045}{12} = 0{,}00375$, se tiene:

$$U_{63} = \frac{0{,}005}{0{,}00375}(a \times a_{\overline{33}|0{,}005} - 18.693{,}88)$$

© Ediciones Pirámide

Sabiendo que el valor financiero $V_{63} = a \times a_{\overline{33}|0,00375}$ se descompone en usufructo y nuda propiedad, obtenemos la cuantía del término amortizativo:

$$a \times a_{\overline{33}|0,00375} = \frac{0,005}{0,00375}(a \times a_{\overline{33}|0,005} - 18.693,88) + 18.693,88 \quad \Rightarrow \quad a = 657,07$$

Sustituyendo en la ecuación de equivalencia financiera, se tiene:

$$C_0 = 657,07 \times a_{\overline{96}|0,005} = 49.999,89 \text{ €}$$

7. Sea una operación de préstamo de cuantía 6.000 euros a amortizar en 5 años con cuotas de amortización anuales constantes y cuotas de interés cuatrimestrales. El tipo de interés pactado en la operación es el 8% anual. Transcurridos 2 años de la concesión del préstamo se vende a un tipo de interés del 9% anual. Calcular el valor financiero total, el valor financiero del usufructo y el de la nuda propiedad.

Resolución

Se trata de un préstamo con intereses fraccionados cuatrimestrales y cuotas de amortización anuales. El importe de las cuotas de amortización constantes es:

$$A = \frac{6.000}{5} = 1.200$$

El valor financiero de la nuda propiedad es:

$$N_2 = 1.200 \times a_{\overline{3}|0,09} = 3.037,55$$

El capital vivo o pendiente de amortizar al final del segundo año es:

$$C_2 = (5 - 2) \times 1.200 = 3.600$$

Teniendo en cuenta que el tipo cuatrimestral equivalente al 8% anual y 9% anual es, respectivamente, el 2,5985568% y 2,9142467%, el valor financiero del usufructo, mediante la fórmula de Achard, es:

$$U_2^{(m)} = \frac{0,025985568}{0,029142467} \times (3.600 - 3.037,55) = 501,52 \text{ €}$$

De manera que el valor financiero del préstamo es:

$$V_2^{(m)} = U_2^{(m)} + N_2 = 501,52 + 3.037,55 = 3.539,07 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

8. Se concede un préstamo amortizable en 15 años por el método de cuotas de amortización constantes, siendo el tipo de interés el 4% anual. Sabiendo que la cuantía del término amortizativo correspondiente al año 9 es 2.560 €, calcular al principio del año 7 el valor financiero del usufructo al 5% anual.

Resolución

El valor financiero del usufructo lo vamos a calcular a través de la fórmula de Achard: $U_6 = \frac{0{,}04}{0{,}05}(C_6 - N_6)$. Para ello es necesario determinar previamente el importe de la cuota de amortización constante. Dicha cuota se obtiene a través del término amortizativo del año 9, al descomponerlo en cuota de interés y cuota de amortización: $a_9 = C_8 \times 0{,}04 + A$. Sabiendo que $C_8 = (15 - 8) \times A$, se tiene:

$$2.560 = 7A \times 0{,}04 + A \quad \Rightarrow \quad A = 2.000$$

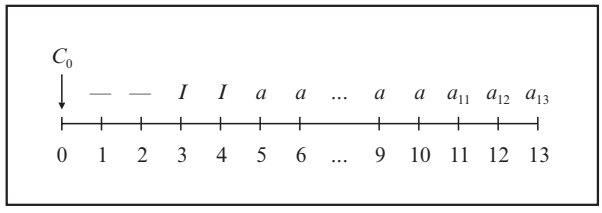
Con el importe de la cuota de amortización constante procedemos a calcular el saldo al principio de año 7: $C_6 = (15 - 6) \times A = 9 \times 2.000 = 18.000$; y el valor financiero de la nuda propiedad: $N_6 = 2.000 \times a_{\overline{9}|0{,}05} = 14.215{,}64$. Por lo que el valor financiero del usufructo es:

$$U_6 = \frac{0{,}04}{0{,}05}(18.000 - 14.215{,}64) = 3.027{,}49 \text{ €}$$

9. Sea un préstamo de 35.000 euros a amortizar en 13 años al 5% anual. En los dos primeros años no se entrega ninguna cantidad; en los dos siguientes sólo se abonan los intereses correspondientes a dichos períodos; a continuación, hasta final del año 10, se entregan términos amortizativos anuales constantes, y en los tres últimos años se amortiza por el método de cuotas de capital constantes. El saldo al principio del año 11 es 1.500 euros. Calcular, al 6% anual, el valor financiero de la nuda propiedad al principio del año 9.

Resolución

El gráfico de la operación es:



© Ediciones Pirámide

Dado que en los dos primeros años el deudor no desembolsa ningún importe, y en los siguientes sólo paga las cuotas de interés, el saldo al principio del año 3 coincide con el saldo al principio del año 5, verificándose:

$$C_2 = 35.000 \times 1{,}05^2 = 38.587{,}50 = C_4$$

El saldo al principio del año 11, a través del método recurrente, verifica:

$$C_{10} = 1.500 = C_4 \times 1{,}05^6 - a \times s_{\overline{6}|0{,}05} \quad \Rightarrow \quad a = 7.381{,}89$$

Una vez conocido el importe del término amortizativo constante que desembolsa el deudor entre los años 5 y 10, podemos determinar el saldo del préstamo en la fecha de la venta del mismo:

$$C_8 = C_4 \times 1{,}05^4 - 7.381{,}89 \times s_{\overline{4}|0{,}05} = 15.086{,}48$$

Con el saldo al principio del año 9 y el importe del término amortizativo constante, podemos determinar la cuota de amortización correspondiente al noveno año:

$$A_9 = a - I_9 = 7.381{,}89 - 15.086{,}48 \times 0{,}05 = 6.627{,}57$$

Dado que en los años 9 y 10 el préstamo se amortiza a través del método francés, se puede obtener el importe de la cuota de capital del año 10 a partir de la correspondiente al año 9, verificándose: $A_{10} = A_9 \times 1{,}05 = 6.958{,}95$.

En los tres últimos años, el préstamo se amortiza con cuotas de capital constantes, por lo que se verifica: $C_{10} = 3 \times A = 1.500 \Rightarrow A = 500$.

Una vez determinado el importe de las cuotas de amortización correspondientes a los últimos 5 años del préstamo, se procede a calcular, al tipo de interés del 6% anual, el valor financiero de la nuda propiedad al principio del año 9. Por tanto, se tiene:

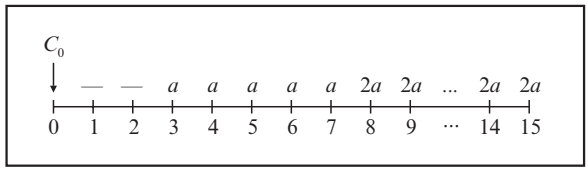
$$N_8 = A_9 \times 1{,}06^{-1} + A_{10} \times 1{,}06^{-2} + A \times a_{\overline{3}|0{,}06} \times 1{,}06^{-2} = 13.635{,}35\ €$$

10. Se concede un préstamo de 15.000 euros a amortizar en 15 años desde su concesión, con un tipo de interés del 4% anual. En los dos primeros años no se entrega ninguna cantidad; en los cinco años siguientes los términos amortizativos son constantes de cuantía *a*, y en los restantes períodos los términos amortizativos son constantes de cuantía *2a*. Al principio del año 10 el prestamista decide vender el préstamo valorándolo al 4,454% anual. Con el importe de la venta concede otro préstamo, al 5% anual, para ser amortizado en 8 años con cuotas de amortización constantes. Calcular para este segundo préstamo el valor de la nuda propiedad al principio del cuarto año, siendo el tipo de valoración el 5,5% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El gráfico del préstamo inicial es:



A través de la ecuación de equivalencia financiera en el año 2, se obtiene el importe del término amortizativo *a*:

$$15.000 \times 1{,}04^2 = a \times a_{\overline{5}|0{,}04} + 2a \times a_{\overline{8}|0{,}04} \times 1{,}04^{-5} \quad \Rightarrow \quad a = 1.045{,}40$$

El valor financiero total al principio del año 10 es:

$$V_9 = 2a \times a_{\overline{15-9}|i'} = 2.090{,}80 \times a_{\overline{6}|0{,}04454} = 10.800{,}10$$

Con dicho importe, se concede un préstamo amortizable en 8 años con cuotas de capital constantes de cuantía: $A = \dfrac{C_0}{n} = \dfrac{10.800{,}10}{8} = 1.350{,}01$. El valor financiero de la nuda propiedad de este segundo préstamo, al 5,5% anual, calculado al principio del cuarto año, asciende a:

$$N_3 = A \times a_{\overline{8-3}|i'} = 1.350{,}01 \times a_{\overline{5}|0{,}055} = 5.764{,}93 \text{ €}$$

14.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un préstamo se amortiza en 8 años con cuotas de amortización anuales constantes y tipo de interés del 3% anual. Determinar el importe del préstamo, sabiendo que el valor financiero del usufructo al principio del año 4 es 183,01 € y que el tipo de interés de venta es el 4,5% anual.

2. Un préstamo de cuantía 60.000 € se amortiza en 10 años al 7% anual con términos amortizativos anuales variables de año en año en un 5% acumulativo. Determinar el valor financiero del usufructo, si al principio del año 8 se vende el préstamo al 6% anual.

3. Se concede un préstamo de 75.000 € a amortizar en 12 años con términos amortizativos anuales constantes. El tipo de interés es del 4% anual para los 6

© Ediciones Pirámide

primeros años y del 5% anual para los restantes. Al principio del año 7 el prestamista vende el préstamo por un valor financiero total de 37.468,53 €. Calcular el tipo de interés al que se vende el préstamo.

4. Sea un préstamo de 36.000 € a amortizar en 7 años con términos amortizativos mensuales y tipo de interés del 6% anual convertible mensualmente. Durante el primer año el prestatario sólo paga intereses, y durante los siguientes años los términos amortizativos mensuales son de cuantía constante. Sabiendo que el tipo de interés de venta es el 7,5% anual convertible mensualmente, calcular el valor financiero del usufructo al principio del año 5.

5. Sea un préstamo amortizable en 15 años al 7% anual, con términos amortizativos anuales que aumentan de año en año en 300 euros. Calcular la cuantía del préstamo, sabiendo que al principio del año 9 se vende a un tipo del 5% anual, siendo el valor financiero total 84.998,57 €.

6. Un préstamo de duración 10 años se amortiza al 9% anual, abonándose en los tres primeros años sólo las cuotas de interés, y en los restantes años términos amortizativos constantes. Si al principio del año 8 se vende el préstamo a un tipo del 6% anual, calcular el valor financiero del usufructo, sabiendo que el valor financiero total asciende a 7.966,53 €.

7. Sea una operación de préstamo de duración 8 años a amortizar con cuotas de amortización anuales constantes y cuotas de interés trimestrales. El tipo de interés pactado en la operación es el 8% anual pagadero trimestralmente. Si transcurridos tres años desde la concesión del préstamo se vende a un tipo de interés del 6% anual convertible trimestralmente, calcular el valor financiero total del préstamo, sabiendo que el valor financiero de la nuda propiedad asciende a 12.590,35 €.

© Ediciones Pirámide

15 Coste y rendimiento de las operaciones financieras

OBJETIVOS

- Distinguir entre operaciones puras y operaciones con características comerciales.
- Calcular los tantos efectivos de coste, de rendimiento y TAE en distintas modalidades de operaciones financieras.
- Analizar desde un punto de vista cuantitativo las problemáticas de la cancelación anticipada de un préstamo y del reembolso parcial.
- Determinar, en base al tipo efectivo pasivo pendiente o al coste efectivo pasivo global, la conveniencia de realizar una operación de novación o de subrogación.
- Realizar la distribución temporal de ingresos y costes en las operaciones de préstamo con características comerciales.

SUMARIO

15.1. Operaciones financieras puras y con características comerciales.
15.2. Los tantos efectivos de coste y de rendimiento.
15.3. El TAE en las operaciones financieras.
15.4. Los costes efectivos en situaciones especiales.
15.5. Distribución temporal de ingresos financieros y de costes de financiación.
15.6. Ejercicios y problemas resueltos.
15.7. Ejercicios y problemas propuestos.

15.1. OPERACIONES FINANCIERAS PURAS Y CON CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

De acuerdo con el destino de los capitales que los sujetos intervinientes en una operación financiera intercambian, podemos clasificar las mismas en operaciones puras y operaciones con características comerciales. Así, en las **operaciones puras** o **normales** los capitales entregados por un sujeto los percibe íntegramente el otro y, además, las cuantías desembolsadas por el deudor lo son por los conceptos de devolución de los capitales recibidos y pago de los intereses estipulados.

En esta modalidad de operaciones, el tipo de interés pactado indica el coste o rendimiento para los sujetos intervinientes en la operación. En el supuesto de que se pacten distintos tipos de interés, el tipo constante i_m que verifica la equivalencia financiera entre los conjuntos de capitales prestación y contraprestación se denomina **tipo medio.**

EJERCICIO 15.1

Sea una operación de préstamo de 18.000 € a amortizar en 5 años con términos amortizativos anuales constantes. Los tipos de interés son el 6% anual para los dos primeros períodos y el 8% anual para los tres restantes. Calcular el tipo de interés medio de la citada operación.

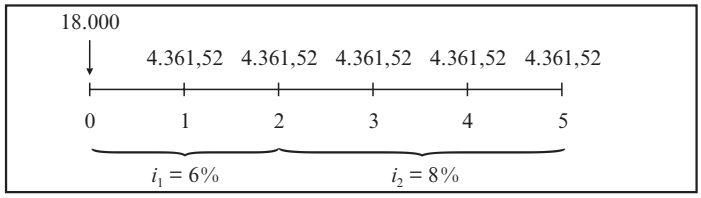
Resolución

Lo primero que se ha de determinar es la cuantía del término amortizativo constante, la cual se obtiene planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación entre la prestación y la contraprestación:

$$18.000 = a \times a_{\overline{2}|0,06} + a \times a_{\overline{3}|0,08}(1 + 0,06)^{-2} \quad \Rightarrow \quad a = 4.361,52$$

© Ediciones Pirámide

Gráficamente, el préstamo se refleja de la siguiente forma:



Una vez calculado el término amortizativo, si el propósito es determinar el tipo de interés medio, se plantea la ecuación de equivalencia financiera entre los 18.000 € que forman la prestación y las cinco cuantías de 4.361,52 € que integran la contraprestación, siendo el tipo medio resultante el 6,7571% anual:

$$18.000 = 4.361{,}52 \times a_{\overline{5}|i_m} \quad \Rightarrow \quad i_m = 6{,}7571\%$$

Tal y como se ha señalado, en las operaciones puras el tipo de interés pactado, o el tipo medio en el caso de que se pacten varios tipos de interés, es un indicador del coste o rendimiento de las mismas. Así, una operación de préstamo en la que las cuantías intercambiadas sólo son el principal, su devolución y los intereses pactados, constituye una operación pura o normal. Ahora bien, en la práctica es habitual que existan características complementarias que impliquen entradas o salidas de capitales adicionales, o una modificación de las cuantías o de los vencimientos de los capitales que integran la operación pura. Así, por ejemplo, el prestatario abona capitales no sólo por los conceptos mencionados, sino que satisface otros por diversos conceptos, como pueden ser comisión de apertura, gastos de estudio, gastos por transferencia, honorarios de notaría, etc.; o bien satisface los capitales de la operación pura en vencimientos distintos a los establecidos en ella, como es el caso en el que se calculan los términos amortizativos con vencimiento anual pero después se abonan semestralmente (fraccionamiento aritmético). También puede que el prestamista tenga que desembolsar capitales que no percibe el prestatario, como por ejemplo impuestos. La inclusión de alguno de estos elementos hace que se trate de una operación con características comerciales.

En general, estamos ante una **operación con características comerciales** cuando se produce alguna de las situaciones siguientes:

a) Existen capitales abonados o percibidos por uno de los sujetos que no son recibidos o pagados por el otro sujeto.

b) El prestatario abona capitales por conceptos distintos a la devolución de los recibidos o a sus intereses.

c) Los vencimientos de los capitales realmente intercambiados no son los mismos que los de la operación pura.

© Ediciones Pirámide

Según que el vencimiento de las características comerciales sea al inicio de la operación, durante la vida de la misma o al final, se distingue entre características comerciales **iniciales, periódicas** y **finales.**

Además, cuando las características comerciales afectan a los dos sujetos contratantes, modificando de igual forma sus compromisos, se trata de características comerciales **bilaterales** o recíprocas. En cambio, cuando existan características comerciales que afecten a uno solo de los dos sujetos de la operación, por intervenir en la misma un sujeto externo que recibe o abona los capitales correspondientes, se dice que tales características son **unilaterales.**

Al inicio de una operación de préstamo, las características comerciales más habituales son las siguientes:

— Comisión de apertura del préstamo. Suele ser un porcentaje del capital concedido en préstamo.
— Gastos de estudio. Gastos que se devengan en la operación debido al análisis que efectúa la entidad financiera con el propósito de determinar si concede el préstamo al cliente. Suele tratarse de un porcentaje sobre el capital concedido en préstamo o bien una cuantía fija.
— Gastos por la intervención de Notario. Aunque la figura del Notario sólo ha de aparecer obligatoriamente en los préstamos hipotecarios, es habitual que los préstamos personales sean también intervenidos por Notario.

Además, si la operación de préstamo es con garantía hipotecaria, también pueden aparecer otras características comerciales iniciales tales como gastos del Registro de la Propiedad, gastos de gestoría, gastos derivados de la tasación del bien a hipotecar, impuestos, etc.

En cuanto a las características comerciales periódicas, las más destacadas son: gastos de transferencia, gastos de administración del préstamo, primas de seguro, fraccionamientos aritméticos, tanto de los términos amortizativos como de las cuotas de interés, comisión por reembolso parcial, etc.

Por último, también suelen devengarse en los préstamos con garantía hipotecaria los siguientes gastos finales: gastos notariales para la cancelación de la hipoteca, gastos del Registro de la Propiedad, gastos de gestoría, impuestos, etc.

15.2. LOS TANTOS EFECTIVOS DE COSTE Y DE RENDIMIENTO

La inclusión de características comerciales en las operaciones financieras hace que los conjuntos prestación y contraprestación de la operación pura se vean modificados, obteniéndose los conjuntos prestación real y contraprestación real para cada uno de los sujetos. Como consecuencia de ello, el tipo de interés pactado o el tipo medio no refleja íntegramente el coste o rendimiento de la operación, siendo necesario determinar, tanto para el prestamista como para el prestatario, un

© Ediciones Pirámide

tipo efectivo que recoja el efecto de las características comerciales en la operación. Este tipo efectivo será el tipo de interés que verifique la equivalencia financiera entre los capitales realmente entregados y recibidos por cada sujeto[1].

Si se plantea la ecuación de equivalencia financiera entre los conjuntos de capitales realmente entregados y realmente recibidos por el prestamista, el tipo de interés que verifica dicha equivalencia se denomina **tipo de interés activo, del prestamista o de rendimiento**, el cual se suele simbolizar por i_a:

$$\{\text{Prestación real entregada}\} \underset{i_a}{\sim} \{\text{Contraprestación real recibida}\}$$

El tipo de interés activo indica el tipo medio al que el prestamista invierte los recursos financieros que cede al prestatario en una operación de préstamo.

Por otra parte, si la ecuación de equivalencia financiera se plantea entre los capitales realmente recibidos por el prestatario y los realmente entregados por éste, el tipo de interés que verifica dicha equivalencia se denomina **tipo de interés pasivo, del prestatario o de coste**, simbolizándose por i_p:

$$\{\text{Prestación real recibida}\} \underset{i_p}{\sim} \{\text{Contraprestación real entregada}\}$$

El tipo de interés pasivo indica el tipo medio que al prestatario le cuestan los recursos financieros que recibe del prestamista en una operación financiera.

EJERCICIO 15.2

Sea una operación de préstamo de 36.000 € a amortizar anualmente por el método francés en 10 años al 6% anual. Calcular los tantos efectivos activo y pasivo, sabiendo que el prestamista ha de pagar unos impuestos del 2% sobre la cuantía de cada término amortizativo y que el prestatario soporta los siguientes gastos: comisión de apertura del 3% de la cuantía del préstamo, gastos de estudio de 125 €, gastos notariales por importe de 360 € y gastos finales de gestoría de 120 €.

Resolución

Lo primero que se ha de calcular es el importe del término amortizativo, el cual se puede obtener de la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación de la operación pura:

$$36.000 = a \times a_{\overline{10}|0,06} \quad \Rightarrow \quad a = 4.891,25$$

[1] En general, a efectos de cálculo, para aquellas ecuaciones que no puedan ser resueltas mediante calculadora financiera hemos utilizado el programa Excel.

© Ediciones Pirámide

Una vez calculada la cuantía de dicho término se ha de conocer la composición de los conjuntos prestación real y contraprestación real para cada sujeto, lo cual permitirá determinar los correspondientes tipos efectivos. Así, sabiendo que la suma de gastos iniciales a desembolsar por el prestatario asciende a 1.565 €, los conjuntos de capitales reales para dicho sujeto son los siguientes:

$$\text{Prestación real recibida: } \{(36.000,0)\}$$

$$\text{Contraprestación real entregada: } \{(1.565,0); (4.891{,}25; s); (120,10); \forall s \mid s = 1,2, ..., 10\}$$

Por tanto, el tipo efectivo pasivo anual se obtiene de la equivalencia financiera entre ambos conjuntos de capitales:

$$36.000 = 1.565 + 4.891{,}25 \times a_{\overline{10}|i_p} + 120(1 + i_p)^{-10} \quad \Rightarrow \quad i_p = 6{,}9875\%$$

Por otra parte, para el cálculo del tipo efectivo activo tenemos los siguientes conjuntos de capitales:

$$\text{Prestación real entregada: } \{(36.000,0)\}$$

$$\text{Contraprestación real recibida: } \{(1.205,0); [4.891{,}25(1 - 0{,}02); s]; \forall s \mid s = 1,2, ..., 10\}$$

Finalmente, el tipo efectivo activo anual se obtiene de la equivalencia financiera entre ambos conjuntos de capitales:

$$36.000 = 1.205 + 4.891{,}25 \times (1 - 0{,}02) \times a_{\overline{10}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 6{,}2932\%$$

EJERCICIO 15.3

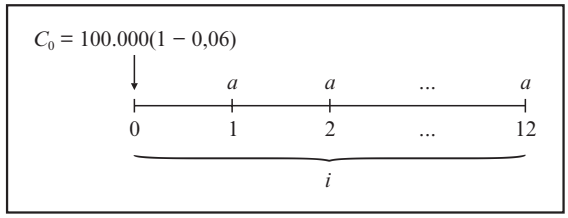
Sea un préstamo de 100.000 € a amortizar en 12 años mediante términos amortizativos anuales constantes y pago anticipado de intereses, al 6% anual prepagable. Dicho préstamo conlleva los siguientes gastos iniciales: comisión de apertura del 0,2% y gastos de gestoría del 0,25%, ambos gastos calculados sobre el principal del préstamo. Hallar los tipos efectivos pospagables activo y pasivo.

Resolución

En primer lugar debemos calcular el importe de los términos amortizativos, para lo cual hay que considerar la operación pura. Dicho importe se puede obte-

© Ediciones Pirámide

ner a través de su préstamo equivalente, que sería un préstamo francés, para lo cual previamente tenemos que hallar el tipo de interés anual pospagable equivalente al prepagable dado:



$$(1 - 0{,}06)(1 + i) = 1 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{0{,}94} - 1 = 6{,}3829787\%$$

$$C_0^*(1 - i^*) = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 100.000(1 - 0{,}06) = a \times a_{\overline{12}|6{,}3829787\%} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a = 11.448{,}64 \text{ €}$$

Además, hemos de hallar el importe de los gastos iniciales:

$$\text{Comisión de apertura} = 0{,}002 \times C_0^* = 0{,}002 \times 100.000 = 200 \text{ €}$$
$$\text{Gastos de gestoría} = 0{,}0025 \times C_0^* = 0{,}0025 \times 100.000 = 250 \text{ €}$$

En consecuencia, para el prestatario tenemos:

$$\text{Prestación neta recibida: } \{[C_0^*(1 - i^*) - 200 - 250{,}0]\}$$
$$\text{Contraprestación neta entregada: } \{(a, s);\ \forall s \mid s = 1{,}2, \ldots, 12\}$$

Por tanto, el tipo efectivo pasivo anual se deduce de la siguiente ecuación:

$$100.000(1 - 0{,}06) - 200 - 250 = 11.448{,}64 \times a_{\overline{12}|i_p} \quad \Rightarrow \quad i_p = 6{,}47157\%$$

En cambio, para el prestamista tenemos:

$$\text{Prestación neta entregada: } \{[C_0^*(1 - i^*) - 200{,}0]\}$$
$$\text{Contraprestación neta recibida: } \{(a, s);\ \forall s \mid s = 1{,}2, \ldots, 12\}$$

En consecuencia, el tipo efectivo activo anual se deduce de la ecuación:

$$100.000(1 - 0{,}06) - 200 = 11.448{,}64 \times a_{\overline{12}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 6{,}42227\%$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.4

Se concede un préstamo de 120.000 € a amortizar en 25 años con tipos de interés referenciados, revisión semestral del tipo de interés y pagos mensuales según el método francés generalizado. El prestatario soporta los siguientes gastos: comisión de apertura del préstamo 1.200 € y gastos de Notario 500 €. El tipo de interés nominal anual capitalizable mensualmente es el 3,6% para el primer semestre, y para los restantes el Euribor + 0,5%, siendo el Euribor correspondiente al segundo semestre el 4,3%. Al inicio del noveno mes, el prestatario decide cancelar el préstamo, existiendo una comisión de cancelación del 1% sobre el capital vivo. Calcular el tanto efectivo de coste anual.

Resolución

Analizamos en primer lugar la operación pura, para a continuación introducir las características comerciales iniciales y las propias de la cancelación anticipada, con lo que podremos determinar el tipo pasivo pedido.

La operación está pactada para ser amortizada con pagos mensuales durante 25 años, por lo que consta de 300 términos amortizativos. El tipo de interés mensual para el primer semestre del primer año es el 0,3%, por lo que el término amortizativo mensual se deduce de la ecuación:

$$120.000 = a_1 \times a_{\overline{300}|0,3\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 607,20$$

Transcurridos seis meses se revisa el tipo de interés, aplicándose un 0,4% mensual, que se deduce de la expresión: $i_2^{(m)} = \dfrac{4,3\% + 0,5\%}{12} = 0,4\%$. Como se ha modificado el tipo de interés, es preciso determinar la cuantía del nuevo término amortizativo. Para ello calculamos previamente el saldo al inicio del mes 7 a través del método prospectivo:

$$C_6 = 607,20 \times a_{\overline{294}|0,3\%} = 118.504,98$$

La cuantía del nuevo término amortizativo se deduce de la ecuación:

$$118.504,98 = a_2 \times a_{\overline{294}|0,4\%} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 686,22$$

En el momento de la cancelación, inicio del mes 9, el saldo pendiente es:

$$C_8 = 686,22 \times a_{\overline{292}|0,4\%} = 118.078,96$$

La comisión de cancelación asciende a 118.078,96 × 1% = 1.180,79 €. Así, ya podemos plantear la ecuación de equivalencia financiera para determinar el tipo

© Ediciones Pirámide

efectivo de coste mensual. Para ello es preciso considerar todos los capitales que el prestatario ha recibido (prestación real recibida) y todos los que ha satisfecho (contraprestación real entregada), verificándose:

$$120.000 = 1.200 + 500 + 607{,}20 \times a_{\overline{6}|i_p^{(m)}} + 686{,}22 \times a_{\overline{2}|i_p^{(m)}}(1 + i_p^{(m)})^{-6} +$$
$$+ (118.078{,}96 + 1.180{,}79)(1 + i_p^{(m)})^{-8} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0{,}628857234\%$$

El tipo efectivo mensual de coste obtenido implica un tanto anual del 7,8128%.

EJERCICIO 15.5

Determinada empresa desea obtener un préstamo de 120.000 €, para cuya formalización debe satisfacer unos honorarios de Notaría y Registro de 900 € en total. Tiene las ofertas de dos prestamistas A y B. Ambos le ofertan el préstamo al 5% anual y con una duración de 8 años. Las condiciones de A son: comisión inicial del 0,75% sobre la cuantía del préstamo y amortización anual por el método francés. Por su parte, el prestamista B asume el pago de los gastos de Notaría y Registro, no cobrándole comisión inicial a cambio de que se realice un fraccionamiento aritmético trimestral del término amortizativo anual calculado por el método francés. Determinar cuál de las dos ofertas le interesa a la empresa.

Resolución

A la empresa le interesa aquella oferta que le suponga el menor tipo efectivo anual de coste.

Para la oferta A, el término amortizativo anual se deduce de la ecuación:

$$120.000 = a \times a_{\overline{8}|5\%} \quad \Rightarrow \quad a = 18.566{,}62$$

Tanto la comisión inicial como los honorarios a favor de terceros ascienden a 900 €, por lo que el tipo efectivo anual de coste se deduce de la ecuación:

$$120.000 = 900 + 900 + 18{,}566{,}62 \times a_{\overline{8}|i_p} \quad \Rightarrow \quad i_p = 5{,}375372\%$$

En la oferta B, la cuantía del término amortizativo anual es la misma que la de A, pero como se realiza un fraccionamiento aritmético trimestral, se abona al final de cada trimestre la cuarta parte de dicha cuantía anual. Por tanto, la operación se amortiza con 32 pagos trimestrales constantes de cuantía $a' = \dfrac{a}{4} = \dfrac{18.566{,}62}{4} =$

© Ediciones Pirámide

= 4.641,66. Como en esta oferta el prestatario sólo debe abonar los pagos trimestrales citados, el tipo efectivo anual de coste es el 5,502355%, deducido de:

$$120.000 = 4.641{,}66 \times a_{\overline{8\times 4}|i_p^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 1{,}34808311\% \text{ trimestral}$$

Como el tanto efectivo anual de coste de la oferta A es inferior al de la B, al prestatario le interesa la oferta A.

EJERCICIO 15.6

Un préstamo de 180.000 € se amortiza en 10 años al 4% anual, determinándose la cuantía constante anual del término amortizativo según el método francés y abonándose con fraccionamiento aritmético mensual. La comisión inicial a favor del prestamista es del 0,5% de la cuantía del préstamo y los honorarios a favor de terceros ascienden a 700 €. Determinar los tantos efectivos activo y pasivo.

Resolución

El término amortizativo anual se deduce de la ecuación:

$$180.000 = a \times a_{\overline{10}|4\%} \quad \Rightarrow \quad a = 22.192{,}37$$

La cuantía del pago mensual con fraccionamiento aritmético es:

$$a' = \frac{a}{12} = \frac{22.192{,}37}{12} = 1.849{,}36$$

La comisión inicial asciende a 900 €, por lo que el tipo efectivo activo anual es el 4,511799%, deducido de:

$$180.000 = 900 + 1.849{,}36 \times a_{\overline{120}|i_a^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_a^{(m)} = 0{,}36842529\% \text{ mensual}$$

Teniendo en cuenta los honorarios a favor de terceros, el tipo efectivo pasivo anual es el 4,599444%, deducido de:

$$180.000 = 900 + 700 + 1.849{,}36 \times a_{\overline{120}|i_p^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0{,}37543679\% \text{ mensual}$$

EJERCICIO 15.7

Un préstamo se amortiza en 12 años mediante anualidad constante. El tipo de interés para los cinco primeros años es el 4% anual y para los siguientes es constante pero desconocido. Los gastos iniciales a abonar por el prestatario a terceros

© Ediciones Pirámide

son de 900 €. Sabiendo que el tipo medio anual de la operación es el 4,65135928 % y el tanto efectivo de coste es el 4,81043967 % anual, determinar la cuota de interés del año 8.

Resolución

Para calcular la cuota de interés del año 8 es preciso determinar el tipo de interés a aplicar en dicho año, así como el saldo al principio del mismo. Para ello, teniendo en cuenta que el término amortizativo es constante y de acuerdo con el tipo medio de la operación pura, podemos plantear la ecuación:

$$C_0 = a \times a_{\overline{12}|4{,}65135928\%}$$

Además, de acuerdo con el tipo de interés del 4 % anual para los cinco primeros años e i unitario para los siguientes, en la operación pura se verifica la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = a \times a_{\overline{5}|4\%} + a \times a_{\overline{7}|i} \times 1{,}04^{-5}$$

Al igualar los segundos miembros de las dos ecuaciones anteriores, simplificando a y realizando operaciones se obtiene $i = 6\%$ anual.

Teniendo en cuenta la ecuación del tipo efectivo pasivo, $C_0 = 900 + a \times \times a_{\overline{12}|4{,}81043967\%}$, así como la del tipo de interés medio, $C_0 = a \times a_{\overline{12}|4{,}65135928\%}$, al igualar queda:

$$a \times a_{\overline{12}|4{,}65135928\%} = 900 + a \times a_{\overline{12}|4{,}81043967\%} \quad \Rightarrow \quad a = 11.061{,}78$$

Por tanto, el saldo al inicio del año 8 por el método prospectivo verifica:

$$C_7 = 11.061{,}78 \times a_{\overline{5}|6\%} = 46.596{,}24$$

Finalmente, la cuota de interés del año 8 es: $I_8 = 46.596{,}24 \times 6\% = 2.795{,}77$ €.

15.3. EL TAE EN LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Tal y como se ha expuesto, los tantos efectivos activo y pasivo permiten conocer de manera precisa cuál es el rendimiento de la operación analizada para el prestamista o bien cuál es el coste asociado a la elección de una determinada fuente de financiación por parte del prestatario.

Ahora bien, no siempre dichos tipos efectivos se pueden obtener de forma sencilla, debido, entre otros, a los siguientes factores: determinadas cuantías que

© Ediciones Pirámide

intervienen en la operación no se pueden conocer a priori, sobre todo aquéllas relacionadas con terceros; el propio cálculo de estos tipos efectivos hace que su determinación no sea sencilla para muchos sujetos que pueden ser demandantes de operaciones de amortización; la existencia de diversas características comerciales que hacen compleja la comparación entre distintas operaciones, etc.

Todo lo anterior ha motivado que el Banco de España obligue al conjunto de entidades de crédito a facilitar a sus clientes en todo momento un tipo de interés que señale el coste o rendimiento de las operaciones financieras con ellos pactadas. Este tipo de interés se ha de calcular en base a una serie de normas dictadas por el Banco de España, en las cuales se señalan los capitales que han de incluirse para el citado cálculo. Tales normas se recogen en la **Circular 8/1990 del Banco de España, de 7 de septiembre, a entidades de crédito, sobre transparencia de las operaciones y protección de la clientela.**

La mencionada Circular, en su Norma Octava, señala que «los tipos de interés, costes o rendimientos se expresarán en tasas porcentuales anuales pagaderas a término vencido equivalentes». Además, indica que «la tasa porcentual equivalente es aquella que iguala en cualquier fecha el valor actual de los efectivos recibidos y entregados a lo largo de la operación, por todos los conceptos, incluido el saldo remanente a su término», señalando**, asimismo, determinadas excepciones en cuanto a los capitales a considerar.**

Este tipo de interés es denominado por el Banco de España tasa anual equivalente o **tipo anual equivalente (TAE),** y constituye un indicador del coste para el cliente en las operaciones activas de las entidades de crédito (préstamos y créditos concedidos por éstos) y un tipo de rendimiento para el cliente en las operaciones pasivas (cuentas corrientes, depósitos a la vista o a plazo o cualquier otro instrumento de ahorro pactado con las entidades de crédito).

Este parámetro se calcula de forma análoga a los tipos efectivos activo y pasivo, es decir, planteando la equivalencia financiera entre parte de los capitales que integran los conjuntos prestación y contraprestación reales. Es por ello por lo que, en un principio, podría confundirse el TAE con los tipos efectivos activo y pasivo. Pero, al excluirse en el cálculo del mismo determinados capitales, éste constituye sólo una aproximación a dichos tantos efectivos, siendo, pues, un indicador del rendimiento o del coste.

Así, en la citada Circular 8/1990, en el apartado 4 de su Norma Octava, se señala que en las **operaciones activas,** para el cálculo del coste efectivo se incluirán todas aquellas cuantías que el cliente esté obligado a pagar a la entidad prestamista como contraprestación de la operación. Además, no se tendrán en cuenta los gastos que el cliente pueda evitar en función de las facultades que le concede el contrato y, en su caso, los gastos de transferencia. Tampoco se considerarán los gastos a abonar a terceros, en particular los corretajes, gastos notariales, impuestos, gastos por seguros o garantías. No obstante, si la entidad impone la obligación de contratar un seguro como condición para conceder el préstamo, la prima correspondiente se incluye en el cálculo del TAE. También se indican en el citado

© Ediciones Pirámide

apartado 4 algunas normas específicas para determinadas operaciones, tales como el descuento comercial o las cuentas de crédito, que analizaremos en la lección correspondiente. Además, en el apartado 7 de la citada Norma se indica que en los documentos de liquidación periódica de las operaciones activas que se deban facilitar a los clientes de las entidades financieras, éstas señalarán el **coste efectivo remanente.** El mismo se calcula con idénticos criterios a los del TAE y tomando exclusivamente en cuenta los capitales futuros pendientes de abonar por el prestatario, por lo que se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre el saldo vivo en cada momento y los capitales de la contraprestación futura.

En cuanto a las **operaciones pasivas,** el apartado 5 de la citada Norma Octava señala las reglas a aplicar, destacando que el cálculo del tipo de rendimiento efectivo «se referirá a los importes brutos liquidados, sin tener en cuenta, en su caso, las deducciones por impuestos a cargo del perceptor, ni las ventajas fiscales por desgravaciones que puedan beneficiarle». También indican en el citado apartado 5 algunas normas específicas para determinadas operaciones, las cuales analizaremos en la lección correspondiente.

15.3.1. Cálculo del TAE en las operaciones de préstamo

De acuerdo con las normas comentadas para las operaciones activas, analizaremos a través de varios ejercicios la problemática relativa al cálculo del TAE en los préstamos cuyos tipos de interés son conocidos desde el inicio de la correspondiente operación.

Ejercicio 15.8

Calcular el TAE en función de los datos del ejercicio 15.2.

Resolución

Para el cálculo del TAE se ha de plantear una ecuación de equivalencia financiera sin tener en cuenta ciertas cuantías. En concreto, no se incluirán los gastos a abonar a terceros: gastos iniciales notariales, gastos finales de gestoría y los impuestos periódicos a abonar por parte del prestamista. Por otro lado, la comisión de apertura (1.080 €) y los gastos de estudio (125 €), al tratarse de cuantías abonadas por el prestatario que suponen ingresos al prestamista, se han de incluir en el cálculo del TAE. Por tanto, el TAE resultante es 6,7251%, el cual se obtiene de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$36.000 = 1.205 + 4.891{,}25 \times a_{\overline{10}|i_{TAE}}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.9

Una entidad financiera concede un préstamo de 120.000 euros a amortizar en 10 años con términos amortizativos constantes mensuales. Los tipos de interés pactados son el 6% nominal anual para los primeros cuatro años y el 9% nominal anual para los últimos seis años. El prestatario abona una comisión de apertura del 1% de la cuantía del préstamo, así como unos gastos de estudio por valor de 1.250 euros. Además, en la operación interviene un Notario cuyos honorarios ascienden a 2.150 euros. Calcular: *a*) tipo medio anual de la operación pura; *b*) tipos anuales efectivos pasivo y activo, y *c*) TAE de la operación.

Resolución

Para poder determinar el tipo medio de la operación pura, hemos de calcular previamente la cuantía de los términos amortizativos mensuales, siendo el tipo de interés mensual para los primeros cuatro años: $i^{(m)} = \dfrac{0{,}06}{12} = 0{,}5\%$, y para los últimos seis años: $i^{(m)} = \dfrac{0{,}09}{12} = 0{,}75\%$. Por tanto, el importe del término amortizativo que se obtiene del planteamiento de la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación de la operación pura es:

$$120.000 = a \times a_{\overline{4\times 12}|0{,}005} + a \times a_{\overline{6\times 12}|0{,}0075}(1 + 0{,}005)^{-(4\times 12)} \quad \Rightarrow \quad a = 1.391{,}37$$

Una vez calculada la cuantía del término amortizativo mensual, el tipo medio se obtiene de la ecuación de equivalencia financiera entre la cuantía concedida en préstamo y los diferentes términos amortizativos que se han de abonar, siendo la incógnita el tipo de interés medio mensual:

$$120.000 = 1.391{,}37 \times a_{\overline{10\times 12}|i_m^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_m^{(m)} = 0{,}58072941\%$$

Por lo que el tipo medio anual equivalente al 0,58072901% mensual es:

$$i_m = (1 + 0{,}0058072941)^{12} - 1 = 7{,}1957\%$$

En cuanto a la determinación de los tipos efectivos pasivo y activo, hemos de plantear la ecuación de equivalencia financiera con los conjuntos realmente entregados y recibidos. Así, para calcular el tipo efectivo pasivo hemos de considerar todos los gastos en los que incurre el prestatario en el momento inicial, es decir, comisión de apertura (1.200 €), gastos de estudio (1.250 €) y gastos a abonar a terceros (2.150 €), que ascienden a un valor total de 4.600 €. En este sentido, los conjuntos prestación real recibida y contraprestación real entregada son los siguientes:

© Ediciones Pirámide

Prestación real recibida: {(120.000,0)}

Contraprestación real entregada: {(4.600,0); (1.391,37; s); $\forall s \mid s = 1,2, ..., 120$}

Por tanto, el tipo efectivo pasivo mensual se obtiene de la equivalencia financiera entre ambos conjuntos de capitales:

$$120.000 = 4.600 + 1.391,37 \times a_{\overline{120}|i_p^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0,65468705\%$$

Siendo su equivalente anual:

$$i_p = (1 + 0,0065468705)^{12} - 1 = 8,1454\%$$

Con respecto al tipo efectivo activo, los capitales a incluir son los realmente entregados y recibidos por el acreedor inicial, por lo que de los gastos iniciales que soporta el prestatario solamente hemos de incluir aquellas cuantías que supongan cobros para el prestamista, es decir, la comisión de apertura y los gastos de estudio, cuya suma es de 2.450 €:

Prestación real entregada: {(120.000,0)}

Contraprestación real recibida: {(2.450,0); (1.391,37; s); $\forall s \mid s = 1,2, ..., 120$}

Por lo que la ecuación de equivalencia financiera que permite determinar el tipo efectivo activo mensual es:

$$120.000 = 2.450 + 1.391,37 \times a_{\overline{120}|i_a^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_a^{(m)} = 0,61960419\%$$

Siendo su equivalente anual:

$$i_a = (1 + 0,0061960419)^{12} - 1 = 7,6939\%$$

Finalmente, para determinar el TAE de la operación se ha de plantear la ecuación de equivalencia financiera sin tener en cuenta los gastos a abonar a terceros (2.150 €), obteniéndose un tipo mensual:

$$120.000 = 2.450 + 1.391,37 \times a_{\overline{120}|i_{TAE}^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0,61960419\%$$

Dado que el valor del TAE ha de estar expresado con periodicidad anual, su valor es:

$$i_{TAE} = (1 + 0,0061960419)^{12} - 1 = 7,6939\%$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.10

Sea un préstamo de 200.000 € a amortizar en 15 años mediante términos amortizativos anuales constantes con un tipo de interés anticipado del 8% anual. Del citado préstamo se sabe que existe una comisión de apertura del 1,5% del principal del préstamo y unos gastos a favor de terceros de 5.000 €. Determinar el TAE de la operación.

Resolución

En primer lugar debemos calcular el importe de los términos amortizativos, para lo cual se puede considerar la operación pura con el tipo anual equivalente pospagable:

$$i = \frac{0{,}08}{1 - 0{,}08} = 8{,}695652\%$$

Por tanto, el término amortizativo anual pospagable es el siguiente:

$$200.000(1 - 0{,}08) = a \times a_{\overline{15}|8{,}695652\%} \quad \Rightarrow \quad a = 22.418{,}30$$

El TAE de la operación se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$200.000(1 - 0{,}08) = 200.000 \times 0{,}015 + 22.418{,}30 \times a_{\overline{15}|i_{TAE}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE} = 8{,}9726\%$$

15.3.2. Cálculo del TAE en las operaciones de préstamo con tipos de interés referenciados

El análisis efectuado hasta ahora se ha centrado en el cálculo del TAE en operaciones de préstamo pactadas con tipos de interés conocidos desde el origen de la operación. En el caso de que los tipos de interés sean variables y vinculados a algún índice, la Norma Octava, en su punto 6, hace referencia al cálculo del TAE en este tipo de préstamos.

El citado cálculo presenta una problemática especial, ya que, al no conocerse cuál será el tipo de interés a aplicar a partir de la primera revisión del mismo, no se podrá conocer de manera precisa la cuantía de cada término amortizativo, la cual es necesaria para plantear la ecuación del TAE.

© Ediciones Pirámide

De acuerdo con la citada Norma Octava, en su punto 6, es posible distinguir:

a) **Préstamos con tipos referenciados desde el momento inicial.** Para calcular los términos amortizativos teóricos a partir de los cuales se obtiene el TAE, el tipo de interés a utilizar se determinará para todos los períodos según el valor del índice de referencia en el momento de la firma del contrato.

b) **Préstamos con tipos referenciados y tipo de interés fijo para un período inicial.** Para calcular los términos amortizativos teóricos a partir de los cuales se obtiene el TAE, el tipo de interés a utilizar en el período inicial será el pactado, obteniéndose los restantes tipos en función del valor del índice de referencia en el momento de la firma del contrato. Excepcionalmente, cuando el tipo inicial se aplique durante un plazo igual o superior a diez años, o durante la mitad o más de la vida del contrato y al menos durante tres años, los términos amortizativos teóricos se determinarán utilizando únicamente el tipo de interés fijo.

EJERCICIO 15.11

Se pacta una operación de préstamo de 90.000 euros a amortizar en 5 años con términos amortizativos mensuales en base al método francés generalizado. El tipo de interés aplicar se calculará añadiéndole al Euribor a un año un margen del 0,80%, siendo las revisiones semestrales. Calcular el TAE para el citado préstamo, sabiendo que la comisión de apertura es del 1% de la cuantía del mismo y que los gastos notariales ascienden a 350 €. El Euribor en la fecha de contratación del préstamo tiene un valor del 3,70% nominal anual.

Resolución

Dado que no existe un tipo de interés fijo para el período inicial, el tipo mensual a aplicar en el cálculo de la cuantía de los términos amortizativos correspondientes al primer semestre se calculará en función del índice de referencia conocido en la fecha de realización del contrato, más el margen correspondiente:

$$i_1^{(m)} = \frac{3{,}70\% + 0{,}80\%}{12} = 0{,}375\%$$

Por tanto, la cuantía del término amortizativo mensual correspondiente a cada uno de los seis primeros meses es:

$$90.000 = a_1 \times a_{\overline{5\times 12}|0{,}375\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1.677{,}87$$

A efectos del cálculo del TAE, este término amortizativo teórico se supone que permanece constante hasta la finalización de la operación, obteniéndose el

© Ediciones Pirámide

tipo de interés mensual, $i_{TAE}^{(m)}$, al plantear la ecuación de equivalencia financiera donde se incluya la comisión de apertura, pero no los gastos notariales:

$$90.000 = 900 + 1.677{,}87 \times a_{\overline{5\times 12}|i_{TAE}^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0{,}40940065\%$$

Siendo el TAE:

$$i_{TAE} = (1 + 0{,}0040940065)^{12} - 1 = 5{,}0250\%$$

EJERCICIO 15.12

Se contrata un préstamo de 60.000 € a amortizar en 10 años con términos amortizativos anuales, los cuales se calculan en base al método francés generalizado. El tipo de interés para el primer año es el 9% anual. Las revisiones se efectuarán cada año, siendo el tipo de interés el resultante de aplicarle al Euribor un margen del 0,60%. Calcular el TAE para el citado préstamo, sabiendo que la comisión de apertura es del 2% de la cuantía del préstamo y que los gastos notariales ascienden a 150 €. El Euribor en la fecha de contratación del préstamo tiene un valor del 4,40%.

Resolución

La cuantía del primer término amortizativo es:

$$60.000 = a_1 \times a_{\overline{10}|9\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 9.349{,}21$$

Para el cálculo del resto de términos amortizativos se ha de determinar, con la información disponible inicialmente, el saldo al principio del segundo año:

$$C_1 = 9.349{,}21 \times a_{\overline{9}|9\%} = 56.050{,}82$$

A efectos del cálculo del TAE, y para determinar el resto de términos amortizativos teóricos, el tipo de interés a utilizar se obtiene a partir del índice de referencia conocido en la fecha de realización del contrato:

$$i_2 = 4{,}40\% + 0{,}60\% = 5\% \quad \Rightarrow \quad 56.050{,}82 = a_2 \times a_{\overline{9}|5\%} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 7.885{,}79$$

Finalmente, el TAE se obtiene planteando la ecuación de equivalencia financiera donde se incluya la comisión de apertura:

$$60.000 = 0{,}02 \times 60.000 + 9.349{,}21(1 + i_{TAE})^{-1} + 7.885{,}79 \times a_{\overline{9}|i_{TAE}}(1 + i_{TAE})^{-1}$$

De la ecuación anterior se obtiene un TAE del 6,2265%.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.13

Se contrata un préstamo de 200.000 € a amortizar en 15 años con términos amortizativos mensuales, según el método francés generalizado. El tipo de interés para el primer año es del 3% nominal anual. Las revisiones se efectuarán cada año, siendo el tipo de interés el resultante de aplicarle al IRPH (Índice de referencia para préstamos hipotecarios) un margen del 0,20%. Calcular el TAE para el citado préstamo, sabiendo que la comisión de apertura es del 0,75% de la cuantía del préstamo, los gastos de estudio son de 250 €, los gastos notariales ascienden a 400 € y que el IRPH en la fecha de contratación del préstamo tiene un valor del 3,40%.

Resolución

Para el cálculo del TAE en este tipo de préstamos hemos de obtener previamente la cuantía de los términos amortizativos, con la información disponible en el momento de firmar el contrato. Para ello, sabiendo que las revisiones son anuales, los términos amortizativos correspondientes a los doce primeros meses se calculan en base al método francés con el tipo de interés del 0,25% mensual, tipo equivalente al inicial del 3% anual convertible mensualmente:

$$200.000 = a_1 \times a_{\overline{15\times 12}|0,25\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1.381,16$$

En el momento inicial no se conoce cuál será la cuantía de los términos amortizativos mensuales de los catorce años siguientes, ni tampoco el valor del índice de referencia. Por tanto, una vez calculado el saldo al principio del segundo año, a efectos del cálculo del TAE, dichos términos se obtendrán utilizando el índice de referencia conocido en la fecha de la firma del contrato:

$$C_{12} = 1.381,16 \times a_{\overline{14\times 12}|0,25\%} = 189.278,98$$

$$i_2^{(m)} = \frac{3,40\% + 0,20\%}{12} = 0,30\% \quad \Rightarrow \quad 189.278,98 = a_2 \times a_{\overline{14\times 12}|0,30\%} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = 1.435,98$$

Por tanto, el tipo de interés mensual $i_{TAE}^{(m)}$ se obtiene planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen, en la que se incluyan la comisión de apertura y los gastos de estudio:

$$200.000 = 0,0075 \times 200.000 + 250 + 1.381,16 \times a_{\overline{12}|i_{TAE}^{(m)}} + 1.435,98 \times$$
$$\times a_{\overline{14\times 12}|i_{TAE}^{(m)}}(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-12} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0,303673\%$$

En consecuencia, el TAE es 3,705560%.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.14

Se pacta una operación de préstamo de 24.000 euros a amortizar durante 12 años. El tipo de interés a aplicar en los 8 primeros años es del 6% nominal anual, siendo los términos amortizativos mensuales constantes. Para los restantes años, los términos amortizativos se calcularán de acuerdo con el método francés generalizado, siendo el tipo de interés nominal anual el resultante de aplicarle al Euribor a un año un margen del 1%, siendo la revisión del tipo de interés cada seis meses. Determinar el TAE de la operación, sabiendo que la entidad prestamista aplica a sus operaciones una comisión de apertura del 1,5% de la cuantía concedida, así como unos gastos de estudio de 120 euros. Además, en la citada operación interviene un Notario, ascendiendo sus honorarios a 200 euros, y se estima que en la primera revisión del tipo de interés el Euribor a un año tomará un valor del 5,4% nominal anual.

Resolución

En primer lugar, hemos de calcular la cuantía de los términos amortizativos mensuales correspondientes a los ocho primeros años, la cual se obtiene al plantear la ecuación de equivalencia financiera de la operación pura con un tipo de interés del 0,5% mensual, tipo equivalente al inicial del 6% nominal anual convertible mensualmente:

$$24.000 = a_1 \times a_{\overline{12\times 12}|0,5\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 234,20$$

Dado que el tipo de interés fijo se aplica en más de la mitad de los años de duración de la operación, los términos amortizativos deducidos con dicho tipo de interés son los únicos que hemos de utilizar para determinar el TAE de la operación. En este sentido, el tipo de interés mensual $i_{TAE}^{(m)}$ se obtiene al plantear la ecuación de equivalencia financiera donde se incluyan la comisión de apertura y los gastos de estudio, pero no los gastos notariales:

$$24.000 = 0,015 \times 24.000 + 120 + 234,20 \times a_{\overline{12\times 12}|i_{TAE}^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0,53185747\%$$

Siendo el TAE:

$$i_{TAE} = (1 + 0,0053185747)^{12} - 1 = 6,5723\%$$

EJERCICIO 15.15

Una operación de préstamo de 600.000 € se amortiza por el método francés con pagos anuales durante 10 años. La comisión inicial es del 0,1% del importe

© Ediciones Pirámide

del préstamo, existiendo unos gastos a abonar a terceros por importe de 34.200 €. Sabiendo que el TAE de la operación es el 5,020606%, determinar: *a*) tipo de interés del préstamo, y *b*) tipo efectivo de coste de la operación.

Resolución

a) De la ecuación de equivalencia financiera del TAE podemos deducir la cuantía del término amortizativo anual constante:

$$600.000 = 600 + a \times a_{\overline{10}|i_{TAE}} \quad \Rightarrow \quad a = 77.702{,}74$$

De la ecuación de equivalencia en el origen para la operación pura podemos obtener el tipo de interés del préstamo:

$$600.000 = 77.702{,}74 \times a_{\overline{10}|i} \quad \Rightarrow \quad i = 5\% \text{ anual}$$

b) El tipo efectivo de coste de la operación se deduce de la ecuación:

$$600.000 = 600 + 34.200 + 77.702{,}74 \times a_{\overline{10}|i_p} \quad \Rightarrow \quad i_p = 6{,}2495\% \text{ anual}$$

EJERCICIO 15.16

Un préstamo de 260.000 € se ha de amortizar en 15 años con pagos mensuales de cuantía constante. El tipo de interés pactado es el 7% anual efectivo. Existe una comisión inicial a favor del prestamista, así como unos gastos a favor de terceros. Se sabe que el TAE de la operación es el 7,034060%, y el tanto efectivo de coste es el 8,837098% anual. Determinar el importe de la comisión y el de los gastos a favor de terceros.

Resolución

La operación pura está pactada al 7% anual, cuyo equivalente mensual es el 0,565415%, por lo que se verifica la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la misma:

$$260.000 = a \times a_{\overline{180}|0{,}565415\%} \quad \Rightarrow \quad a = 2.305{,}81$$

De la ecuación del TAE podemos deducir la cuantía G de la comisión inicial. Para ello tenemos en cuenta que el tipo equivalente mensual al TAE dado es el 0,568082%, verificándose:

$$260.000 = G + 2.305{,}81 \times a_{\overline{180}|0{,}568082\%} \quad \Rightarrow \quad G = 520{,}04 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

Finalmente, teniendo en cuenta que el tipo pasivo mensual es el 0,708180%, se verifica la siguiente ecuación, de la que obtenemos los gastos G' a favor de terceros:

$$260.000 = 520{,}04 + G' + 2.305{,}81 \times a_{\overline{180}|0{,}708180\%} \quad \Rightarrow \quad G' = 25.300{,}01 \text{ €}$$

15.4. LOS COSTES EFECTIVOS EN SITUACIONES ESPECIALES

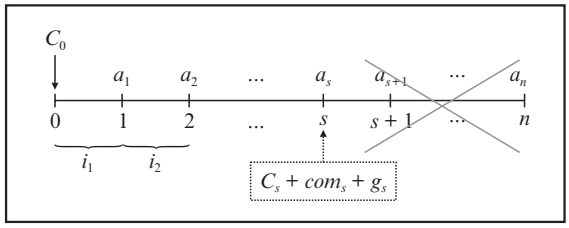
Son numerosas las ocasiones en las cuales el deudor de una operación de préstamo se plantea amortizar total o parcialmente su deuda, o bien modificar las condiciones que fueron pactadas en el momento de formalizar la operación financiera. Por ello resulta importante analizar las implicaciones financieras de estas situaciones especiales en la vida de un préstamo y su incidencia sobre los costes de la operación.

15.4.1. Amortización anticipada y reembolso parcial

a) Amortización anticipada

La amortización anticipada se produce cuando, antes de finalizar el plazo de la operación, ésta se cancela íntegramente, abonando el deudor el saldo vivo y las demás cuantías que se hayan estipulado en el contrato de préstamo, así como los gastos derivados de la operación. Usualmente, en las condiciones de la operación se establece que el prestatario abone una determinada comisión sobre el saldo vivo.

En el supuesto de que la cancelación anticipada se produzca al inicio del período $s + 1$, abonando el deudor el saldo, la comisión de amortización anticipada y otros gastos, el diagrama final de la operación es el siguiente:



EJERCICIO 15.17

Sea un préstamo de 120.000 € a amortizar en 20 años a través de términos amortizativos anuales constantes, siendo el tipo de interés pactado el 4% anual.

© Ediciones Pirámide

Los gastos iniciales totales ascienden a 1.500 €. Si al principio del año 9 el prestatario decide cancelar el préstamo, existiendo una comisión de cancelación del 1% sobre el capital pendiente y unos gastos de cancelación de 450 €, determinar el tipo efectivo de coste de la operación de financiación.

Resolución

Transcurridos los primeros ocho años de la duración del préstamo y, por tanto, una vez abonado por parte del prestatario el término amortizativo correspondiente al octavo período, para poder cancelar la operación este sujeto deberá abonar el capital vivo en dicho momento más la comisión pactada y los gastos correspondientes.

La cuantía del término amortizativo constante es:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 120.000 = a \times a_{\overline{20}|0,04} \quad \Rightarrow \quad a = 8.829,81$$

El capital pendiente de amortizar al final del año 8 es:

$$C_8 = 8.829,81 \times a_{\overline{20-8}|0,04} \quad \Rightarrow \quad 82.868,42$$

Por tanto, la cuantía M que el prestatario abona para cancelar el préstamo es:

$$M = C_8(1 + 0,01) + 450 = 82,868,42(1 + 0,01) + 450 = 84.147,10$$

Finalmente, podemos determinar el coste efectivo anual para el prestatario a través de la ecuación de equivalencia financiera entre las cuantías realmente recibidas y las entregadas por dicho sujeto:

$$120.000 = 1.500 + 8.829,81 \times a_{\overline{8}|i_p} + 84.147,10(1 + i_p)^{-8} \quad \Rightarrow \quad i_p = 4,3434\%$$

---

b) Reembolso parcial

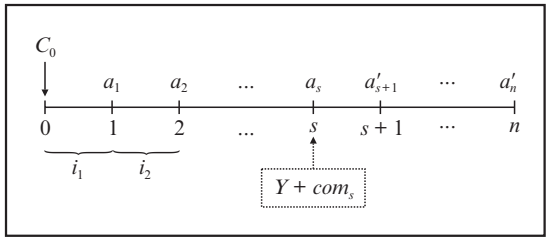
El reembolso parcial se produce cuando, antes de finalizar el plazo de la operación, el deudor abona una parte del saldo vivo, y, si así estuviera establecido en las condiciones del préstamo, una comisión. En consecuencia, una vez realizado el reembolso parcial, al haberse modificado el saldo vivo nos encontramos ante las siguientes posibilidades:

*b.*1) *Amortización con reducción de las cuantías de los términos amortizativos*

Se mantiene la duración de la operación y, por consiguiente, disminuye la cuantía de los términos amortizativos pendientes de vencimiento.

© Ediciones Pirámide

En el supuesto de que, juntamente con el término amortizativo del período s, el deudor abone una cuantía Y para el reembolso parcial y la comisión correspondiente, el diagrama de la operación es el siguiente:

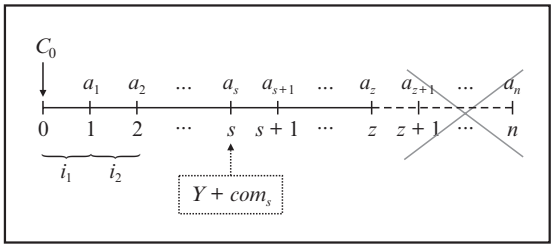


El saldo vivo después del reembolso parcial de importe Y es: $C'_s = C_s - Y$.

Las cuantías de los nuevos términos amortizativos del préstamo se obtendrán a través de la ecuación de equivalencia financiera entre el nuevo capital pendiente de amortizar, una vez se haya realizado el reembolso parcial, teniendo en cuenta la duración restante, la cual no se ha modificado.

b.2) Amortización con reducción de la duración pendiente

El prestatario continúa abonando la cuantía de los términos amortizativos inicialmente pactados, disminuyendo, por tanto, la duración del préstamo. En este caso, el diagrama de la operación es el siguiente:



Siendo Y la cuantía del reembolso parcial al principio del período $s + 1$, el saldo vivo después del mismo es: $C'_s = C_s - Y$.

La nueva duración z del préstamo debe hallarse a través de la ecuación de equivalencia financiera entre la nueva cuantía del capital pendiente de amortizar al principio del período $s + 1$, C'_s, y los términos amortizativos inicialmente pactados.

EJERCICIO 15.18

Un préstamo de 180.000 € se va a amortizar en 25 años a través de términos amortizativos anuales constantes, siendo el tipo de interés pactado el 4,5% anual.

© Ediciones Pirámide

Existen gastos iniciales por comisiones y honorarios de terceros por importe total de 8.300 €. Al principio del año 11 el prestatario realiza un reembolso parcial de 6.272,49 €, aplicándole el prestamista una comisión de reembolso parcial del 0,5% sobre el capital amortizado anticipadamente. Determinar el coste efectivo pasivo de la operación total en las dos hipótesis siguientes: *a*) se mantiene la duración de la operación; *b*) se mantiene la cuantía del término amortizativo.

Resolución

La cuantía inicial de los términos amortizativos la podemos obtener a través de la ecuación de equivalencia financiera de la operación pura inicialmente pactada:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 180.000 = a \times a_{\overline{25}|0,045} \quad \Rightarrow \quad a = 12.139,03$$

Dado que el reembolso parcial se realiza al principio del año 11, hemos de determinar el saldo vivo en dicho momento, el cual asciende a: $C_{10} = 12.139,03 \times \times a_{\overline{25-10}|4,5\%} = 130.367,67$. Por tanto, el saldo una vez efectuado el reembolso es:

$$C'_{10} = 130.367,67 - 6.272,49 = 124.095,18$$

La comisión por reembolso parcial es $6272,49 \times 0,5\% = 31,36$. En consecuencia, el prestatario al final del año 10 desembolsa una cuantía total de 18.442,88, que es la suma del término amortizativo correspondiente, la cuantía del reembolso parcial y la comisión por el mismo.

a) Si la duración total de la operación no se modifica, el saldo vivo al principio del año 11 ha de ser amortizado en 15 períodos con una nueva cuantía constante anual, que se determina a través de la ecuación:

$$C'_{10} = 124.095,18 = a' \times a_{\overline{25-10}|4,5\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 11.554,97$$

Para determinar el tipo efectivo pasivo de toda la operación hemos de tener en cuenta todas las cuantías recibidas y entregadas por el prestatario. De acuerdo con ello, la ecuación de equivalencia financiera es:

$$180.000 = 8.300 + 12.139,03 \times a_{\overline{9}|i_p} + 18.442,88(1 + i_p)^{-10} + 11.554,97 \times \\ \times a_{\overline{15}|i_p}(1 + i_p)^{-10}$$

Al resolver se obtiene un tipo efectivo de coste del 4,9726% anual.

© Ediciones Pirámide

b) Si no se modifica la cuantía de los términos amortizativos futuros es preciso reducir la duración de la operación. El número x de períodos pendientes se obtiene de la ecuación:

$$C'_{10} = 124.095{,}18 = 12.139{,}03 \times a_{\overline{x}|4{,}5\%} \quad \Rightarrow \quad x = 14$$

Por tanto, la operación finalizará transcurridos 14 años después de realizado el reembolso parcial. El tipo efectivo pasivo se deduce de la ecuación:

$$180.000 = 8.300 + 12.139{,}03 \times a_{\overline{9}|i_p} + 18.442{,}88(1 + i_p)^{-10} + 12.139{,}03 \times \\ \times a_{\overline{14}|i_p}(1 + i_p)^{-10}$$

Se obtiene un tanto efectivo de coste del 4,9804% anual.

EJERCICIO 15.19

Sea un préstamo de 60.000 € a amortizar en 6 años con términos amortizativos mensuales constantes, siendo el tipo de interés pactado el 8,4% nominal anual. Los gastos iniciales de la operación son 2.300 €. Al principio del quinto año el prestatario realiza un reembolso parcial de 15.000 €, aplicándole el prestamista una comisión de cancelación parcial del 0,5% sobre dicho reembolso, la cual abona también en dicho momento. Determinar el coste efectivo pasivo de la operación total en el caso de que el prestatario prefiera reducir la duración pendiente de la operación.

Resolución

La cuantía inicial de los términos amortizativos la podemos obtener a través de la ecuación de equivalencia financiera de la operación pura inicialmente pactada al 0,7% mensual, tipo equivalente al inicial del 8,4% nominal anual convertible mensualmente:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 60.000 = a \times a_{\overline{6\times 12}|0{,}7\%} \quad \Rightarrow \quad a = 1.063{,}75$$

Dado que el reembolso parcial se realiza al principio del año 5, hemos de determinar el saldo vivo en dicho momento:

$$C_{4\times 12} = 1.063{,}75 \times a_{\overline{72-48}|0{,}7\%} = 23.425{,}49$$

Por tanto, el saldo una vez efectuado el reembolso parcial de 15.000 € es:

$$C'_{4\times 12} = 23.425{,}49 - 15.000 = 8.425{,}49$$

© Ediciones Pirámide

De acuerdo con lo expuesto, el prestatario en el momento de la realización del reembolso parcial ha de abonar la cuantía del término amortizativo correspondiente (1.063,75 €), la cuantía del reembolso parcial (15.000 €) y la comisión por el mismo (75 €), siendo la suma de estas tres cantidades de 16.138,75 €.

Dado que la cuantía de los términos amortizativos futuros no se ve alterada, es preciso reducir la duración pendiente. En este sentido, el número x de períodos mensuales pendientes se obtiene de la ecuación:

$$8.425{,}49 = 1.063{,}75 \times a_{\overline{x}|0{,}7\%} \quad \Rightarrow \quad x = 8{,}18$$

Si se desea que la duración sea un número entero de períodos mensuales, el prestatario puede decidir abonar la cuantía del término amortizativo durante 8 meses y, con el objetivo de saldar la operación, abonar en el mes siguiente la cantidad que permita la finalización de la misma. Para ello debemos determinar el saldo vivo transcurridos 8 meses desde el reembolso parcial:

$$C'_{4\times 12+8} = 8.425{,}49(1 + 0{,}007)^8 - 1.063{,}75 \times s_{\overline{8}|0{,}7\%} = 187{,}60$$

Dicho saldo equivale a la última cuota de amortización; sabiendo que la cuota de interés es de 187,60 × 0,007 = 1,31, el último término amortizativo es:

$$a_n = 187.60 + 1{,}31 = 188{,}91$$

Por tanto, el tipo efectivo pasivo mensual es el 0,83256305%, el cual se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$60.000 = 2.300 + 1.063{,}75 \times a_{\overline{4\times 12+8}|i_p^{(m)}} + 15.075(1 + i_p^{(m)})^{-4\times 12} + \\ + 188{,}91(1 + i_p^{(m)})^{-(4\times 12+9)}$$

Siendo el tipo efectivo pasivo anual:

$$i_p = (1 + 0{,}0083256305)^{12} - 1 = 10{,}4612\%$$

Si en lugar de abonar el saldo pendiente y sus intereses en el mes 9 desde el reembolso parcial, se optase por cancelar la operación en el mes 8, el deudor simplemente tendría que abonar en dicho punto la cuantía del término amortizativo mensual (1.063,75 €) junto al saldo pendiente (187,60 €). El tipo efectivo pasivo mensual se deduce de la ecuación:

$$60.000 = 2.300 + 1.063{,}75 \times a_{\overline{4\times 12+8}|i_p^{(m)}} + 15.075(1 + i_p^{(m)})^{-4\times 12} + \\ + 187{,}60(1 + i_p^{(m)})^{-(4\times 12+8)} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0{,}83257214\%$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.20

Se pacta un préstamo de 24.000 € a amortizar en 8 años con términos amortizativos semestrales constantes, siendo el tipo de interés el 4% semestral. Además, existen unos gastos iniciales por diversos conceptos por importe de 950 €. Al principio del quinto mes del tercer año el prestatario realiza un pago adicional de 3.000 €, el cual se destinará a reembolso parcial y al pago de la comisión correspondiente, la cual es del 1% sobre el capital amortizado anticipadamente. Determinar el coste efectivo pasivo de la operación total en el caso de que se mantenga la duración de la misma.

Resolución

La cuantía inicial de los términos amortizativos se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera en la operación pura inicialmente pactada:

$$24.000 = a \times a_{\overline{16}|4\%} \quad \Rightarrow \quad a = 2.059,68$$

El reembolso parcial se realiza al principio del quinto mes del tercer año, por lo que hemos de determinar el saldo vivo en dicho momento, debiéndose calcular previamente el saldo al principio del quinto semestre:

$$C_4 = 2.059,68 \times a_{\overline{16-4}|4\%} = 19.330,25$$

El saldo en el momento previo al reembolso parcial es:

$$C_{4+\frac{4}{6}} = 19.330,25(1 + 0,04)^{\frac{4}{6}} = 19.842,35$$

Sabiendo que la cantidad desembolsada por el prestatario es de 3.000 €, con la cual se ha de hacer frente tanto al reembolso parcial como a la comisión, la cuantía que se destina a dicho reembolso parcial es:

$$3.000 = Y + 0,01 \times Y \quad \Rightarrow \quad Y = 2.970,30$$

En consecuencia, el saldo, una vez efectuado el reembolso parcial, es:

$$C'_{4+\frac{4}{6}} = 19.842,35 - 2.970,30 = 16.872,05$$

Si la duración total de la operación no se modifica, los nuevos términos amortizativos constantes se obtienen de la ecuación de equivalencia financiera entre el nuevo saldo vivo y la duración restante:

$$16.872,05 = a' \times a_{\overline{16-4}|4\%}(1 + 0,04)^{\frac{4}{6}} \quad \Rightarrow \quad a' = 1.751,36$$

© Ediciones Pirámide

En relación con la ecuación anterior, téngase en cuenta que $a' \times a_{\overline{16-4}|4\%}$ nos da el valor al principio del semestre 5, por lo que se ha de capitalizar 4 meses para valorarlo en el momento en el que se produce el reembolso parcial.

Finalmente, para determinar el tipo efectivo pasivo semestral de toda la operación hemos de tener en cuenta todas las cuantías realmente recibidas y entregadas por el prestatario. De acuerdo con ello, el tipo efectivo pasivo semestral es del 4,612038%, el cual se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$24.000 = 950 + 2.059{,}68 \times a_{\overline{4}|i_p^{(m)}} + 3.000(1 + i_p^{(m)})^{-\left(4+\frac{4}{6}\right)} + 1.751{,}36 \times$$
$$\times\, a_{\overline{12}|i_p^{(m)}}(1 + i_p^{(m)})^{-4}$$

El tipo efectivo pasivo anual es:

$$i_p = (1 + 0{,}04612038)^2 - 1 = 9{,}436785\%$$

15.4.2. Novación y subrogación

En los préstamos con garantía hipotecaria, al ser pactados a muy largo plazo, es normal que las condiciones del mercado suelan variar apareciendo ofertas que mejoren a las inicialmente pactadas. Por tanto, en un determinado momento, el prestatario se puede plantear la refinanciación de la operación, es decir, analizar la posibilidad de cambiar las condiciones iniciales pactadas con el objetivo de mejorarlas. Para ello, dicho sujeto puede realizar lo siguiente:

a) Renegociar las condiciones iniciales con el mismo prestamista, lo cual constituye una **novación.**

b) Cancelar la operación con el prestamista inicial y contratar la operación pendiente con otro prestamista, lo cual constituye una **subrogación.**

De acuerdo con lo expuesto, y con el objetivo de conocer si al prestatario le interesa continuar con la operación inicial o su refinanciación, es preciso determinar el tipo efectivo de coste, i_{p1}, de la primera operación, como si ésta continuase hasta la fecha de amortización inicialmente pactada, y compararlo con el tipo pasivo global, i_{pg}, resultante de la primera operación hasta su cancelación y la nueva operación.

Con idéntico objetivo también se puede comparar el tipo de coste de la parte de operación pendiente inicial **(tipo efectivo pasivo pendiente),** i_{pp}, con el tipo de coste de la nueva operación, i_{p2}.

En cualquier caso, interesa la nueva operación si $i_{pg} < i_{p1}$, o bien si $i_{p2} < i_{pp}$.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.21

Hace 12 años fue concedido un préstamo por importe de 75.000 euros a amortizar en 20 años con términos anuales constantes y tipo de interés del 9% anual. Los gastos iniciales fueron del 1% del importe del préstamo en concepto de comisión de apertura y de 600 euros en concepto de gastos de notaría y gestoría. Además, se considera que existirán unos gastos finales de 250 euros. En estos momentos, tras haber abonado el correspondiente término amortizativo, el prestatario se replantea la operación al ofrecerle otra entidad financiera por el tiempo restante un tipo de interés del 5% con una comisión de apertura del 0,5% de la cuantía a conceder en préstamo y previéndose unos gastos finales de 200 euros. Sabiendo que, en caso de acceder a la operación, el prestatario tendría que abonar una comisión de cancelación del 1% del saldo vivo del préstamo inicial y unos gastos de gestoría y notaría de 85 euros, cantidades que el prestatario incluiría en la cuantía del nuevo préstamo, determinar si le interesa la subrogación.

Resolución

Para conocer si le interesa la operación de subrogación, el prestatario ha de calcular inicialmente el tipo efectivo pasivo del primer préstamo. En este sentido, a través de la ecuación de equivalencia financiera se obtiene el importe del término amortizativo:

$$75.000 = a \times a_{\overline{20}|0,09} \quad \Rightarrow \quad a = 8.215,99$$

Por tanto, el tipo efectivo pasivo anual, i_{p1}, de la operación de préstamo inicial asciende a 9,2645%, el cual se obtiene de la siguiente ecuación:

$$75.000 = 75.000 \times 0,01 + 600 + 8.215,99 \times a_{\overline{20}|i_{p1}} + 250(1 + i_{p1})^{-20}$$

Una vez conocido el tipo efectivo de la primera operación, se ha de calcular el saldo vivo en el momento en el que se plantea la refinanciación:

$$C_{12} = 8.215,99 \times a_{\overline{8}|0,09} \quad \Rightarrow \quad C_{12} = 45.474,02$$

Sabiendo que se incluye en la cuantía del nuevo préstamo la comisión de cancelación, que asciende al 1% del saldo vivo en ese momento, y unos gastos de gestoría y notaría de 85 €, el nuevo préstamo asciende a 46.013,76 euros, por lo que el nuevo término amortizativo es:

$$46.013,76 = a' \times a_{\overline{8}|0,05} \quad \Rightarrow \quad a' = 7.119,33$$

© Ediciones Pirámide

Para poder decidir si interesa la subrogación, se ha de comparar el tipo efectivo pasivo de la primera operación con el de la operación global i_{pg}, es decir, con el tipo efectivo resultante de la ecuación de equivalencia financiera, que incluye los capitales entregados y recibidos por el prestatario desde el momento inicial de la primera operación hasta el año 12, y los de la segunda:

$$75.000 = 75.000 \times 0{,}01 + 600 + 8.215{,}99 \times a_{\overline{12}|i_{pg}} + 0{,}005 \times 46.013{,}76(1 + i_{pg})^{-12} + \\ + 7.119{,}33 \times a_{\overline{8}|i_{pg}}(1 + i_{pg})^{-12} + 200(1 + i_{pg})^{-20}$$

En la expresión anterior, los tres primeros sumandos del segundo miembro son los desembolsos derivados de la operación inicial hasta el año 12, y los siguientes sumandos son los de la nueva operación.

De la anterior ecuación se obtiene un tipo efectivo pasivo global del 8,8641% anual. Por tanto, al ser $i_{pg} < i_{p1}$, interesa la subrogación.

A idéntica conclusión se puede llegar determinando el tipo pasivo correspondiente exclusivamente a la parte de operación inicial pendiente de vencimiento, o tipo pasivo pendiente, y el de coste de la nueva operación. Para ello planteamos las siguientes ecuaciones:

Si el prestatario continúa con la operación inicial, el tipo pasivo anual pendiente (i_{pp}) se obtiene de la ecuación:

$$45.474{,}02 = 8.215{,}99 \times a_{\overline{8}|i_{pp}} + 250(1 + i_{pp})^{-8} \quad \Rightarrow \quad i_{pp} = 9{,}0740\%$$

Si realiza la refinanciación, pactando la nueva operación, el tipo pasivo de la misma se deduce de la ecuación de equivalencia entre la cuantía del nuevo préstamo y todos los desembolsos vinculados al mismo:

$$46.013{,}76 = 0{,}005 \times 46.013{,}76 + 7.119{,}33 \times a_{\overline{8}|i_{p2}} + 200(1 + i_{p2})^{-8} \Rightarrow i_{p2} = 5{,}1966\%$$

Al ser $i_{p2} < i_{pp}$, interesa la subrogación.

EJERCICIO 15.22

Cierto sujeto pacta una operación de préstamo de 350.000 € a amortizar en 20 años con términos amortizativos mensuales constantes en base al método francés, siendo el tipo de interés nominal anual del 6%. Los gastos iniciales ascienden en total a 30.000 €, previendo también unos gastos finales de 2.500 €. Transcurridos 8 años, tras haber abonado el correspondiente término amortizativo, el prestatario se replantea la operación al ofrecerle otra entidad financiera por el tiempo restante un tipo de interés nominal del 5,7% con una comisión de apertura del 2% de la cuantía a conceder en préstamo y estimando unos gastos finales de 2.000 euros. Sabiendo que, en caso de acceder a la operación, el prestatario tendría que

© Ediciones Pirámide

abonar una comisión de cancelación del 0,25% del saldo vivo y unos gastos de gestoría y notaría de 7.000 €, cantidades que el prestatario incluiría en la cuantía del nuevo préstamo, determinar si le interesa o no la subrogación en función del tipo efectivo pasivo pendiente.

Resolución

El importe del término amortizativo correspondiente a la primera operación se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera de la operación pura con un tipo de interés del 0,5% mensual, tipo equivalente al inicial del 6% nominal anual convertible mensualmente:

$$350.000 = a \times a_{\overline{20\times 12}|0,5\%} \quad \Rightarrow \quad a = 2.507,51$$

Para determinar si interesa o no la refinanciación de la operación, se ha de calcular previamente el saldo en el momento en que se plantea esta posibilidad:

$$C_{8\times 12} = 2.507,51 \times a_{\overline{240-8\times 12}|0,5\%} \quad \Rightarrow \quad C_{8\times 12} = 256.956,44$$

Siendo, por tanto, el tipo efectivo pasivo pendiente el que resulta de plantear la ecuación de equivalencia financiera entre este saldo y las cuantías pendientes de vencimiento:

$$256.956,44 = 2.507,51 \times a_{\overline{240-8\times 12}|i_{pp}^{(m)}} + 2.500(1 + i_{pp}^{(m)})^{-(240-8\times 12)}$$

Siendo el tipo efectivo pasivo pendiente el 0,50740138% mensual, su equivalente anual es:

$$i_{pp} = (1 + 0,0050740138)^{12} - 1 = 6,2616\%$$

Por otra parte, la cuantía del préstamo resultante de la subrogación, en caso de producirse, es:

$$C'_{8\times 12} = 256.956,44 + 0,0025 \times 256.956,44 + 7.000 = 264.598,83$$

La cuantía de los términos amortizativos, con un tipo de interés del 0,475% mensual, tipo equivalente al 5,7% nominal, sería la siguiente:

$$264.598,83 = a' \times a_{\overline{240-8\times 12}|0,475\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 2.541,20$$

Finalmente, el tipo efectivo pasivo resultante de esta opción se obtiene al plantear la ecuación de equivalencia financiera con todas las cantidades entregadas por el prestatario, es decir, comisión de apertura de 264.598,83 × 0,02 =

© Ediciones Pirámide

= 5.291,98 euros, los correspondientes términos amortizativos y los gastos finales de 2.000 euros:

$$264.598{,}83 = 5.291{,}98 + 2.541{,}20 \times a_{\overline{240-8\times12}|i_{p2}^{(m)}} + 2.000(1 + i_{p2}^{(m)})^{-(240-8\times12)}$$

Siendo el tipo efectivo pasivo de esta opción el 0,512501% mensual, su equivalente anual es:

$$i_{p2} = (1+ 0{,}00512501)^{12} - 1 = 6{,}3264\%$$

Al ser $i_{p2} > i_{pp}$, al prestatario no le interesa la refinanciación.

Observación

Si la cuantía del nuevo préstamo sólo cubriese el saldo pendiente de la operación inicial, los gastos derivados de la subrogación (0,25% del saldo y gastos de gestoría y notaría) se deben considerar en la contraprestación a abonar con el nuevo préstamo, a efectos de determinar su tipo de coste, $i_{p2.}$

15.5. DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE INGRESOS FINANCIEROS Y DE COSTES DE FINANCIACIÓN

Tras el análisis efectuado anteriormente, no cabe duda que en la mayoría de operaciones financieras existen características comerciales que complementan la operación pura, por lo que el tipo de interés pactado entre las partes no refleja realmente cuál es el rendimiento o coste de la operación, sino que se hace necesario el cálculo del tipo efectivo activo y pasivo, respectivamente.

Otro de los problemas con el que se encuentran el prestatario y el prestamista es el derivado de la necesidad de periodificar en el tiempo el conjunto total de costes e ingresos financieros vinculados a la operación, distinguiendo entre los correspondientes a la operación pura y los vinculados a la operación con características comerciales. Para ello es preciso elaborar un cuadro de distribución en el que se registren, período a período, las cuantías totales que le correspondan.

La distribución en el tiempo de las cuantías de ingresos y costes se realiza de acuerdo con las cuantías netas realmente entregadas y recibidas por cada sujeto, y, por tanto, utilizando los tipos efectivos activo y pasivo. En cualquier caso, se trata de distribuir cada una de las cuantías que recibe el prestamista y cada una de las que abona el prestatario en dos sumandos, uno representativo de ingresos para el prestamista o costes para el prestatario, y otro de amortización (recuperación del capital neto entregado por el prestamista y devolución del capital neto

© Ediciones Pirámide

recibido por el prestatario). Además, tanto en los ingresos como en los costes se distinguirá entre los correspondientes a la operación pura y los derivados de las características comerciales.

La problemática correspondiente la vamos a analizar a través de distintos ejercicios en los que pondremos de manifiesto la metodología a utilizar para la distribución temporal y la confección de los cuadros correspondientes, analizando también las situaciones de reembolso parcial y de préstamos con tipos referenciados. Además, por razones didácticas consideramos más adecuado exponer en primer lugar la casuística correspondiente a los préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses pospagables; en segundo término, idéntica problemática en los préstamos con intereses anticipados; y en último lugar, analizar la relativa a los préstamos simples.

15.5.1. Préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses pospagables

EJERCICIO 15.23

Se pacta una operación de amortización con un capital de 18.000 euros a devolver en 5 años con términos amortizativos anuales, siendo el tipo de interés del 6% anual. Realizar la distribución temporal de ingresos financieros y de costes de financiación, así como los correspondientes cuadros, sabiendo que existe una comisión de apertura del 2% de la cuantía concedida, así como unos gastos a abonar a terceros por importe de 450 €.

Resolución

El término amortizativo anual de la operación pura es:

$$18.000 = a \times a_{\overline{5}|6\%} \quad \Rightarrow \quad a = 4.273{,}14$$

El cuadro de amortización es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	18.000,00
1	6	4.273,14	3.193,14	1.080,00	3.193,14	14.806,86
2	6	4.273,14	3.384,73	888,41	6.577,87	11.422,13
3	6	4.273,14	3.587,81	685,33	10.165,68	7.834,32
4	6	4.273,14	3.803,08	470,06	13.968,76	4.031,24
5	6	4.273,14	4.031,24	241,90	18.000,00	0,00

© Ediciones Pirámide

a) *Distribución de ingresos financieros*

En esta operación, el prestamista percibe unos ingresos financieros integrados por las cuotas de interés de la operación pura y la comisión de apertura. La distribución en el tiempo de dichos ingresos se realiza de acuerdo con el tipo efectivo activo de la operación, el cual se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas (cuantía del préstamo) y las recibidas (comisión de apertura y términos amortizativos):

$$18.000 - 360 = 17.640 = 4.273{,}14 \times a_{\overline{5}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 6{,}74710137\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestamista la operación supone invertir una cuantía de 17.640 € al 6,74710137% anual, recuperándose la misma en 5 años con términos anuales, percibiendo un precio financiero o ingresos financieros totales de 3.725,70 €, suma de las cuotas de interés de la operación pura y la comisión de apertura.

El cuadro de distribución lo realizamos de forma análoga al cuadro de amortización. Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	17.640,00
1	6,74710137	4.273,14	1.190,19	3.082,95	14.557,05
2	6,74710137	4.273,14	982,18	3.290,96	11.266,09
3	6,74710137	4.273,14	760,13	3.513,01	7.753,08
4	6,74710137	4.273,14	523,11	3.750,03	4.003,05
5	6,74710137	4.273,14	270,09	4.003,05	0,00

En el cuadro anterior, los ingresos financieros correspondientes a cada período se obtienen al aplicar el tipo efectivo activo a la cuantía del capital pendiente neto de recuperar por el prestamista al inicio de cada período.

Tal y como hemos señalado, los ingresos financieros derivados de la inversión a su vez se pueden descomponer en precio financiero de la operación pura (cuotas de interés) y precio financiero derivado de las características comerciales. Dicha descomposición se recoge en la siguiente tabla:

Período	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	1.190,19	1.080,00	110,19
2	982,18	888,41	93,77
3	760,13	685,33	74,80
4	523,11	470,06	53,05
5	270,09	241,90	28,19
Total	3.725,70	3.365,70	360,00

© Ediciones Pirámide

En el cuadro anterior se observa que los ingresos financieros totales, 3.725,70 €, se distribuyen en 5 años, correspondiendo 3.365,70 a intereses y 360 a la comisión inicial.

b) *Distribución de costes de financiación*

El prestatario soporta unos costes financieros integrados por las cuotas de interés de la operación pura, la comisión de apertura y los gastos a terceros. La distribución en el tiempo de dichos costes se realiza de acuerdo con el tipo efectivo pasivo de la operación:

$$18.000 = 360 + 450 + 4.273,14 \times a_{\overline{5}|i_p}$$

$$17.190 = 4.273,14 \times a_{\overline{5}|i_p} \quad \Rightarrow \quad i_p = 7,71574369\,\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestatario la operación supone obtener un préstamo neto de 17.190 € al 7,71574369 % anual, amortizándose el mismo en 5 años con términos anuales, satisfaciendo un precio financiero o costes financieros totales de 4.175,70 €, suma de las cuotas de interés de la operación pura con la comisión de apertura y con los gastos a favor de terceros. Para imputar a cada período la parte que le corresponde de tales costes financieros, se utiliza el tipo efectivo pasivo de la operación, realizándose el siguiente cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	17.190,00
1	7,71574369	4.273,14	1.326,34	2.946,80	14.243,20
2	7,71574369	4.273,14	1.098,97	3.174,17	11.069,03
3	7,71574369	4.273,14	854,06	3.419,08	7.649,95
4	7,71574369	4.273,14	590,25	3.682,89	3.967,06
5	7,71574369	4.273,14	306,08	3.967,06	0,00

De igual forma a la indicada para la distribución de ingresos, los costes de financiación correspondientes a cada período se obtienen al aplicar el tipo efectivo pasivo a la cuantía del capital neto pendiente de devolver por el prestatario al inicio de cada período.

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	1.326,34	1.080,00	246,34
2	1.098,97	888,41	210,56
3	854,06	685,33	168,73
4	590,25	470,06	120,19
5	306,08	241,90	64,18
Total	4.175,70	3.365,70	810,00

Observamos en el cuadro anterior que los costes de financiación, 4.175,70 €, se distribuyen en 5 años, correspondiendo 3.365,70 a intereses y 810 a la suma de la comisión inicial (360) y a gastos a favor de terceros (450).

EJERCICIO 15.24

Confeccionar el cuadro de distribución de ingresos y costes para un préstamo de 12.000 euros a amortizar en 12 meses con términos amortizativos mensuales y tipo de interés del 9% nominal anual, abonándose el primer término amortizativo al final del mes de septiembre. Además, se sabe que el prestatario ha de abonar en concepto de comisión de apertura un 1,5% de la cuantía del préstamo y que en dicha operación interviene un Notario, siendo sus honorarios de 350 euros.

Resolución

Dado que el tipo de interés mensual equivalente al 9% nominal anual pagadero mensualmente es del $\frac{0{,}09}{12} = 0{,}75\%$, el valor del término amortizativo mensual es el siguiente:

$$12.000 = a \times a_{\overline{12}|0{,}75\%} \quad \Rightarrow \quad a = 1.049{,}42$$

Asimismo, el cuadro de amortización es:

Mes	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	12.000,00
1	0,75	1.049,42	959,42	90,00	959,42	11.040,58
2	0,75	1.049,42	966,62	82,80	1.926,04	10.073,96
3	0,75	1.049,42	973,87	75,55	2.899,91	9.100,09
4	0,75	1.049,42	981,17	68,25	3.881,08	8.118,92
5	0,75	1.049,42	988,53	60,89	4.869,61	7.130,39

© Ediciones Pirámide

Mes	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
6	0,75	1.049,42	995,94	53,48	5.865,55	6.134,45
7	0,75	1.049,42	1.003,41	46,01	6.868,96	5.131,04
8	0,75	1.049,42	1.010,94	38,48	7.879,90	4.120,10
9	0,75	1.049,42	1.018,52	30,90	8.898,42	3.101,58
10	0,75	1.049,42	1.026,16	23,26	9.924,58	2.075,42
11	0,75	1.049,42	1.033,85	15,57	10.958,43	1.041,57
12	0,75	1.049,42	1.041,57	7,85	12.000,00	0,00

Debemos señalar que, al realizarse el pago del primer término amortizativo al final del mes de septiembre, al año correspondiente a dicho mes le son imputables cuatro cuotas de interés (las cuatro primeras), cuya suma es 316,60 €.

a) *Distribución de ingresos financieros*

Para la confección del cuadro de distribución de ingresos hemos de hallar previamente el tipo efectivo activo mensual:

$$12.000 - 180 = 11.820 = 1.049{,}42 \times a_{\overline{12}|i_a^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_a^{(m)} = 0{,}98835280\,\%$$

Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos resultante de aportar de forma neta el prestamista 11.820 euros y recibir al final de cada uno de 12 meses que dura la operación 1.049,42 euros, siendo el tipo de interés efectivo activo del 0,9883528% mensual, es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	11.820,00
1	0,98835280	1.049,42	116,82	932,60	10.887,40
2	0,98835280	1.049,42	107,61	941,81	9.945,59
3	0,98835280	1.049,42	98,30	951,12	8.994,47
4	0,98835280	1.049,42	88,90	960,52	8.033,95
5	0,98835280	1.049,42	79,40	970,02	7.063,93
6	0,98835280	1.049,42	69,82	979,60	6.084,33
7	0,98835280	1.049,42	60,13	989,29	5.095,04
8	0,98835280	1.049,42	50,36	999,06	4.095,98
9	0,98835280	1.049,42	40,48	1.008,94	3.087,04
10	0,98835280	1.049,42	30,51	1.018,91	2.068,13
11	0,98835280	1.049,42	20,44	1.028,98	1.039,15
12	0,98835280	1.049,42	10,27	1.039,15	0,00

© Ediciones Pirámide

La separación de los ingresos financieros en precio financiero de la operación pura (cuota de interés) y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Período	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	116,82	90,00	26,82
2	107,61	82,80	24,81
3	98,30	75,55	22,75
4	88,90	68,25	20,65
5	79,40	60,89	18,51
6	69,82	53,48	16,34
7	60,13	46,01	14,12
8	50,36	38,48	11,88
9	40,48	30,90	9,58
10	30,51	23,26	7,25
11	20,44	15,57	4,87
12	10,27	7,85	2,42

Los ingresos financieros correspondientes a los cuatro meses del año de concesión del préstamo ascienden a 411,63 €, distribuyéndose entre precio financiero de la operación pura (316,60 €) y precio financiero de las características comerciales (95,03 €).

b) *Distribución de costes de financiación*

El tipo efectivo de coste mensual, incluyendo la comisión de apertura de 180 euros y los gastos abonar a terceros de 350 euros, es:

$$12.000 - 180 - 350 = 11.470 = 1.049{,}42 \times a_{\overline{12}|i_p^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 1{,}46716701\,\%$$

Por tanto, el cuadro de distribución de costes resultante de recibir de forma neta el prestatario 11.470 euros y entregar al final de cada uno de los 12 meses 1.049,42 euros, siendo el tipo de interés efectivo del 1,46716701% mensual, es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	11.470,00
1	1,46716701	1.049,42	168,28	881,14	10.588,86
2	1,46716701	1.049,42	155,36	894,06	9.694,80
3	1,46716701	1.049,42	142,24	907,18	8.787,62

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
4	1,46716701	1.049,42	128,93	920,49	7.867,13
5	1,46716701	1.049,42	115,42	934,00	6.933,13
6	1,46716701	1.049,42	101,72	947,70	5.985,43
7	1,46716701	1.049,42	87,82	961,60	5.023,83
8	1,46716701	1.049,42	73,71	975,71	4.048,12
9	1,46716701	1.049,42	59,39	990,03	3.058,09
10	1,46716701	1.049,42	44,87	1.004,55	2.053,54
11	1,46716701	1.049,42	30,13	1.019,29	1.034,25
12	1,46716701	1.049,42	15,17	1.034,25	0,00

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	168,28	90,00	78,28
2	155,36	82,80	72,56
3	142,24	75,55	66,69
4	128,93	68,25	60,68
5	115,42	60,89	54,53
6	101,72	53,48	48,24
7	87,82	46,01	41,81
8	73,71	38,48	35,23
9	59,39	30,90	28,49
10	44,87	23,26	21,61
11	30,13	15,57	14,56
12	15,17	7,85	7,32

Los costes financieros correspondientes a los cuatro meses del año de concesión del préstamo ascienden a 594,81 €, distribuyéndose entre precio financiero de la operación pura (316,60 €) y precio financiero de las características comerciales (278,21 €).

EJERCICIO 15.25

Con fecha 8 de octubre del año 2009 se pacta una operación de préstamo de 50.000 €, que se ha de amortizar anualmente por el método francés en 5 años al 6% anual. El prestamista percibe una comisión inicial del 1% de la cuantía del

© Ediciones Pirámide

préstamo. Existen unos gastos a favor de terceros de 1.500 €. Confeccionar el cuadro de distribución de los ingresos financieros y el de los costes de financiación.

Resolución

El valor del término amortizativo anual es:

$$50.000 = a \times a_{\overline{5}|6\%} \quad \Rightarrow \quad a = 11.869{,}82$$

Asimismo, el cuadro de amortización de la operación por períodos unitarios anuales es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	50.000,00
1	6,00	11.869,82	8.869,82	3.000,00	8.869,82	41.130,18
2	6,00	11.869,82	9.402,01	2.467,81	18.271,83	31.728,17
3	6,00	11.869,82	9.966,13	1.903,69	28.237,96	21.762,04
4	6,00	11.869,82	10.564,10	1.305,72	38.802,06	11.197,94
5	6,00	11.869,82	11.197,94	671,88	50.000,00	0,00

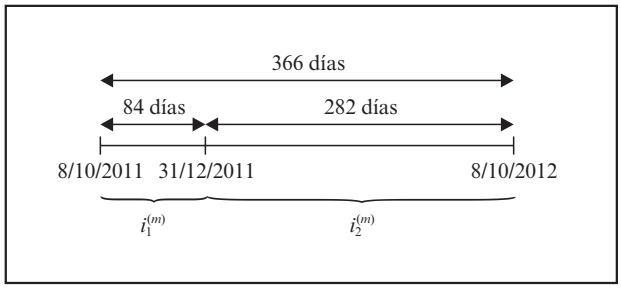
Como los términos amortizativos tienen vencimiento el 8 de octubre de cada año, los correspondientes intereses anuales han de imputarse a dos años naturales consecutivos, de acuerdo con los días transcurridos desde el 8 de octubre al 31 de diciembre y con los del 31 de diciembre al 8 de octubre del año siguiente. Por tanto, para confeccionar el cuadro de amortización hemos de calcular el tipo de interés que corresponde al conjunto de días de cada uno de los períodos citados. Dichos tipos se calculan de acuerdo con el criterio **Real/Real,** según el cual, para convertir los días en fracción de año, en el numerador consideramos los días reales del calendario y en el denominador los reales transcurridos entre dos vencimientos consecutivos de los términos amortizativos[2]. En consecuencia, el tipo de interés para el período de 84 días que va desde el 8 de octubre al 31 de diciembre es $i_1^{(m)} = (1 + 0{,}06)^{\frac{84}{365}} - 1 = 1{,}35001459\%$. Para el período comprendido entre el 31 de diciembre y el 8 de octubre siguiente (año no bisiesto), 281 días, tenemos: $i_2^{(m)} = (1 + 0{,}06)^{\frac{281}{365}} - 1 = 4{,}58804611\%$.

Un aspecto a resaltar en cuanto al cálculo de los tipos de interés equivalentes es el referente a la existencia del año bisiesto. En este sentido, dado que se aplica

[2] Ello es así porque los términos amortizativos forman una renta anual cuyo período de maduración es el número de días reales transcurridos desde el 8 de octubre de un año al 8 de octubre del año siguiente.

© Ediciones Pirámide

el criterio Real/Real, el período de maduración del término de la renta con vencimiento el 8 de octubre de 2012 está compuesto por 366 días. Por tanto, para confeccionar el cuadro de amortización por fechas, el tipo de interés del 6% anual se ha de dividir en dos partes, utilizando para ello 366 días como base: la primera comprendida entre el 8 de octubre de 2011 hasta el 31 de diciembre del mismo año, y la segunda abarca desde esta fecha hasta el 8 de octubre de 2012. Gráficamente:



Dado que el 6% anual es equivalente a los tipos de interés citados anteriormente, se ha de verificar la igualdad: $1 + 0{,}06 = (1 + i_1^{(m)})(1 + i_2^{(m)})$, siendo $i_1^{(m)} = (1 + 0{,}06)^{\frac{84}{366}} - 1 = 1{,}34630131\%$; $i_2^{(m)} = (1 + 0{,}06)^{\frac{282}{366}} - 1 = 4{,}59187817\%$.

Por tanto, el cuadro de amortización por fechas es:

Fecha	Días	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
08/10/2009	—	—	—	—	—	50.000,00
31/12/2009	84	1,35001459	0,00	−675,01	675,01	50.675,01
08/10/2010	281	4,58804611	11.869,82	9.544,83	2.324,99	41.130,18
31/12/2010	84	1,35001459	0,00	−555,26	555,26	41.685,44
08/10/2011	281	4,58804611	11.869,82	9.957,27	1.912,55	31.728,17
31/12/2011	84	1,34630131	0,00	−427,16	427,16	32.155,33
08/10/2012	282	4,59187817	11.869,82	10.393,29	1.476,53	21.762,04
31/12/2012	84	1,35001459	0,00	−293,79	293,79	22.055,83
08/10/2013	281	4,58804611	11.869,82	10.857,89	1.011,93	11.197,94
31/12/2013	84	1,35001459	0,00	−151,17	151,17	11.349,11
08/10/2014	281	4,58804611	11.869,82	11.349,11	520,71	0,00

Por tanto, la cuota de interés de cada año natural es la suma de las correspondientes cuotas con fecha 8 de octubre y 31 de diciembre de cada año.

© Ediciones Pirámide

a) *Distribución de ingresos financieros*

Para la confección del cuadro de distribución de ingresos hemos de hallar previamente el tipo efectivo activo, cuyo valor es 6,36701554% anual[3], y a continuación calculamos el tipo de interés equivalente para períodos de 84, 281 y 282 días.

El tipo efectivo activo anual se obtiene de la siguiente ecuación:

$$50.000 - 500 = 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{365}{365}} + 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{730}{365}} +$$
$$+ 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{1.096}{365}} + 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{1.461}{365}} + 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{1.826}{365}}$$

El tipo de interés equivalente correspondiente a cada uno de los períodos de 84, 281 y 282 días es, respectivamente:

$$i_{a1}^{(m)} = 1{,}0636701554^{\frac{84}{365}} - 1 = 1{,}43066579\%$$

$$i_{a2}^{(m)} = 1{,}0636701554^{\frac{281}{365}} - 1 = 4{,}86672321\%$$

$$i_{a3}^{(m)} = 1{,}0636701554^{\frac{282}{365}} - 1 = 4{,}8445877\%$$

Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos resultante de aportar de forma neta el prestamista 49.500 euros y recibir cinco términos amortizativos de 11.869,82 euros el 8 de octubre de cada año, es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
08/10/2009	—	—	—	—	—	49.500,00
31/12/2009	84	1,43066579	0,00	708,18	−708,18	50.208,18
08/10/2010	281	4,86672321	11.869,82	2.443,49	9.426,33	40.781,85
31/12/2010	84	1,43066579	0,00	583,45	−583,45	41.365,30
08/10/2011	281	4,86672321	11.869,82	2.013,13	9.856,69	31.508,61
31/12/2011	84	1,43066579	0,00	450,78	−450,78	31.959,39
08/10/2012	282	4,88445877	11.869,82	1.561,04	10.308,78	21.650,61
31/12/2012	84	1,43066579	0,00	309,75	−309,75	21.960,36
08/10/2013	281	4,86672321	11.869,82	1.068,75	10.801,07	11.159,29
31/12/2013	84	1,43066579	0,00	159,65	−159,65	11.318,94
08/10/2014	281	4,86672321	11.869,82	550,88	11.318,94	0,00

[3] Tanto para dicho cálculo como para el de los tipos de interés del cuadro de distribución hemos utilizado el criterio **Real/365,** dado que es el implementado en la hoja de cálculo Excel para la función *TIR.NO.PER*. No obstante, si se realizan los cálculos sin tener en cuenta el día de más del año bisiesto, la diferencia no es significativa.

© Ediciones Pirámide

La separación de los ingresos financieros en precio financiero de la operación pura (cuota de interés) y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
08/10/2009	—	—	—	—
31/12/2009	84	708,18	675,01	33,17
08/10/2010	281	2.443,49	2.324,99	118,50
31/12/2010	84	583,45	555,26	28,19
08/10/2011	281	2.013,13	1.912,55	100,58
31/12/2011	84	450,78	427,16	23,62
08/10/2012	282	1.561,04	1.476,53	84,51
31/12/2012	84	309,75	293,79	15,96
08/10/2013	281	1.068,75	1.011,93	56,82
31/12/2013	84	159,65	151,17	8,48
08/10/2014	281	550,88	520,71	30,17

b) *Distribución de costes de financiación*

El tipo efectivo de coste anual, que incluye la comisión de apertura de 500 € y los gastos a abonar a terceros de 1.500 €, se deduce de la ecuación:

$$50.000 - 500 - 1.500 = 48.000 = 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{365}{365}} + 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{730}{365}} +$$
$$+ 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{1.096}{365}} + 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{1.461}{365}} + 11.869{,}82(1 + i_a)^{-\frac{1.826}{365}}$$

Por tanto, el cuadro de distribución de costes resultante de recibir de forma neta el prestatario 48.000 euros y entregar al final de cada uno de los 5 años que dura la operación 11.869,82 euros, siendo el tipo de interés efectivo pasivo del 7,51460522% anual, es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
08/10/2009	—	—	—	—	—	48.000,00
31/12/2009	84	1,68147265	0,00	807,11	−807,11	48.807,11
08/10/2010	281	5,73667200	11.869,82	2.799,90	9.069,92	39.737,19
31/12/2010	84	1,68147265	0,00	668,17	−668,17	40.405,36
08/10/2011	281	5,73667200	11.869,82	2.317,92	9.551,90	30.853,46
31/12/2011	84	1,68147265	0,00	518,79	−518,79	31.372,25
08/10/2012	282	5,75766398	11.869,82	1.806,31	10.063,51	21.308,74
31/12/2012	84	1,68147265	0,00	358,30	−358,30	21.667,04
08/10/2013	281	5,73667200	11.869,82	1.242,97	10.626,85	11.040,19
31/12/2013	84	1,68147265	0,00	185,64	−185,64	11.225,83
08/10/2014	281	5,73667200	11.869,82	643,99	11.225,83	0,00

© Ediciones Pirámide

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
08/10/2009	—	—	—	—
31/12/2009	84	807,11	675,01	132,10
08/10/2010	281	2.799,90	2.324,99	474,91
31/12/2010	84	668,17	555,26	112,91
08/10/2011	281	2.317,92	1.912,55	405,37
31/12/2011	84	518,79	427,16	91,63
08/10/2012	282	1.806,31	1.476,53	329,78
31/12/2012	84	358,30	293,79	64,51
08/10/2013	281	1.242,97	1.011,93	231,04
31/12/2013	84	185,64	151,17	34,47
08/10/2014	281	643,99	520,71	123,28

EJERCICIO 15.26

Un préstamo de 240.000 € se ha de amortizar por el método francés con términos amortizativos anuales en 5 años al 8% anual. El prestamista percibe una comisión inicial del 1,75% de la cuantía del préstamo. Además, existen unos gastos a favor de terceros de 8.000 €. Confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes, sabiendo que al principio del año 4 dicho sujeto efectúa un reembolso parcial de 50.000 euros, el cual está sujeto a una comisión del 0,50% de dicho importe, abonándose la misma en efectivo, y que no se desea modificar la duración restante tras el reembolso parcial.

Resolución

El término amortizativo de la operación pura se deduce de la ecuación:

$$240.000 = a \times a_{\overline{5}|8\%} \quad \Rightarrow \quad a = 60.109{,}55$$

Los cuadros de amortización y de distribución se realizan de la forma ya descrita. Pero, llegado el inicio del año 4, se produce un reembolso parcial por importe de 50.000 €, ocasionando unos gastos de 250 €, por lo que a partir de dicho momento es preciso modificar tales cuadros.

© Ediciones Pirámide

El término amortizativo calculado anteriormente permanecerá constante hasta el final del año 3, momento en el cual efectúa un reembolso parcial. Por tanto, es necesario calcular el saldo financiero en dicho momento:

$$C_3 = 60.109{,}55 \times a_{\overline{5-3}|8\%} = 107.191{,}24$$

Siendo el saldo vivo resultante en dicho punto tras hacerse efectivo el reembolso parcial:

$$C'_3 = 107.191{,}24 - 50.000 = 57.191{,}24$$

Dicho capital ha de amortizarse con dos anualidades, siendo el importe de las mismas el siguiente:

$$57.191{,}24 = a' \times a_{\overline{5-3}|8\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 32.071{,}09$$

El siguiente cuadro de amortización registra lo acontecido en la operación pura hasta la finalización de la misma, incluyendo el reembolso parcial en 3:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	240.000,00
1	8	60.109,55	40.909,55	19.200,00	40.909,55	199.090,45
2	8	60.109,55	44.182,31	15.927,24	85.091,86	154.908,14
3	8	60.109,55	47.716,90	12.392,65	132.808,76	107.191,24
3	8	50.000,00	50.000,00	0,00	182.808,76	57.191,24
4	8	32.071,09	27.495,79	4.575,30	210.304,55	29.695,45
5	8	32.071,09	29.695,45	2.375,64	240.000,00	0,00

a) *Distribución de ingresos financieros*

En el origen de la operación se determina el tipo efectivo activo anual con los datos conocidos en dicho momento, el cual se utiliza para confeccionar el cuadro de distribución hasta el momento del reembolso parcial. Dicho tipo se deduce de la ecuación:

$$240.000 - 4.200 = 235.800 = 60.109{,}55 \times a_{\overline{5}|i_{a1}} \quad \Rightarrow \quad i_{a1} = 8{,}67340385\%$$

El cuadro correspondiente hasta el momento previo al reembolso parcial es:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	235.800,00
1	8,67340385	60.109,55	20.451,89	39.657,66	196.142,34
2	8,67340385	60.109,55	17.012,22	43.097,33	153.045,01
3	8,67340385	60.109,55	13.274,21	46.835,34	106.209,67

© Ediciones Pirámide

En el momento de realizarse el reembolso parcial, el capital pendiente neto es 106.209,67 €. El prestatario entrega una cuantía total de 50.250 €, cuya descomposición, siguiendo el mismo criterio de los períodos precedentes, ha de hacerse en los mismos dos sumandos. Ahora bien, como no ha transcurrido tiempo alguno desde el vencimiento de la anterior cuantía percibida por el prestamista, no se devengan intereses, siendo nulos los ingresos financieros, por lo que la totalidad corresponde a amortización, distribuyéndose los 250 € de comisión en los períodos siguientes.

En consecuencia, el capital pendiente neto una vez efectuado el reembolso parcial es 55.959,67 €, por lo que el tipo efectivo anual correspondiente a la operación pendiente se deduce de la ecuación:

$$106.209{,}67 - 50.250 = 55.959{,}67 = 32.071{,}09 \times a_{\overline{5-3}|i_{a2}} \quad \Rightarrow \quad i_{a2} = 9{,}60149424\%$$

Con el tipo efectivo anterior se completa el cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	235.800,00
1	8,67340385	60.109,55	20.451,89	39.657,66	196.142,34
2	8,67340385	60.109,55	17.012,22	43.097,33	153.045,01
3	8,67340385	60.109,55	13.274,21	46.835,34	106.209,67
3	—	50.250,00	0,00	50.250,00	55.959,67
4	9,60149424	32.071,09	5.372,96	26.698,13	29.261,54
5	9,60149424	32.071,09	2.809,55	29.261,54	0,00

Finalmente, la separación de los ingresos financieros entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Período	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	20.451,89	19.200,00	1.251,89
2	17.012,22	15.927,24	1.084,98
3	13.274,21	12.392,65	881,56
3	0,00	0,00	0,00
4	5.372,96	4.575,30	797,66
5	2.809,55	2.375,64	433,91

b) *Distribución de costes de financiación*

De forma similar a lo señalado anteriormente, el tipo efectivo anual de coste en el origen de la operación se deduce de la ecuación:

$$240.000 - 4.200 - 8.000 = 227.800 = 60.109{,}55 \times a_{\overline{5}|i_{p1}} \quad \Rightarrow \quad i_{p1} = 10{,}01073689\%$$

© Ediciones Pirámide

El cuadro de distribución correspondiente hasta el momento previo al reembolso parcial es:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	227.800,00
1	10,01073689	60.109,55	22.804,46	37.305,09	190.494,91
2	10,01073689	60.109,55	19.069,94	41.039,61	149.455,30
3	10,01073689	60.109,55	14.961,58	45.147,97	104.307,33

En el momento de realizarse el reembolso parcial, el capital pendiente neto es 104.307,33. El prestatario entrega una cuantía total de 50.250 €, cuya descomposición, siguiendo el mismo criterio de los períodos precedentes, ha de hacerse en los mismos dos sumandos. Ahora bien, como no ha transcurrido tiempo alguno desde el vencimiento de la anterior cuantía abonada por el prestatario, los costes de financiación son nulos, por lo que la totalidad corresponde a amortización. En consecuencia, el capital pendiente neto una vez efectuado el reembolso parcial es 54.057,33 €, por lo que el tipo efectivo anual correspondiente a la operación pendiente se deduce de la ecuación:

$$104.307{,}33 - 50.250 = 54.057{,}33 = 32.071{,}09 \times a_{\overline{5-3}|i_{p2}} \quad \Rightarrow \quad i_{p2} = 12{,}20330044\%$$

Con el tipo efectivo anterior se completa el cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	227.800,00
1	10,01073689	60.109,55	22.804,46	37.305,09	190.494,91
2	10,01073689	60.109,55	19.069,94	41.039,61	149.455,30
3	10,01073689	60.109,55	14.961,58	45.147,97	104.307,33
3	—	50.250,00	0,00	50.250,00	54.057,33
4	12,20330044	32.071,09	6.596,78	25.474,31	28.583,02
5	12,20330044	32.071,09	3.488,07	28.583,02	0,00

Finalmente, la separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	22.804,46	19.200,00	3.604,46
2	19.069,94	15.927,24	3.142,70
3	14.961,58	12.392,65	2.568,93
3	0,00	0,00	0,00
4	6.596,78	4.575,30	2.021,48
5	3.488,07	2.375,64	1.112,43

EJERCICIO 15.27

Un préstamo de 400.000 € se ha de amortizar con pagos semestrales durante 8 años. Los gastos iniciales ascienden al 0,25% de la cuantía del préstamo, así como 23.000 € a abonar a terceros. El tipo de interés pactado se revisa anualmente y está referenciado al Euribor anual con un diferencial de 0,60%, siendo el valor del Euribor para el primer año del 4,50% anual. Supóngase que el Euribor sólo se modifica en la revisión del principio del año 6, tomando el valor 5,20% anual. Confeccionar el cuadro de distribución de los costes de financiación, sabiendo que el préstamo se amortiza por el método francés generalizado.

Resolución

Para el cálculo del cuadro de distribución de costes hemos de obtener previamente la cuantía de los diferentes términos amortizativos semestrales. Para ello, el tipo de interés efectivo semestral correspondiente al primer año es el siguiente:

$$i_1^{(m)} = \frac{4{,}50\% + 0{,}60\%}{2} = 2{,}55\%$$

Siendo el término amortizativo semestral:

$$400.000 = a_1 \times a_{\overline{8\times 2}|2{,}55\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 30.758{,}94$$

Este término amortizativo permanecerá constante hasta el final del año 5, dado que el tipo de interés no varía hasta ese momento.

El cuadro de amortización hasta el momento de la modificación del tipo de interés es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Saldo financiero
0	—	—	—	—	400.000,00
1	2,5500	30.758,94	10.200,00	20.558,94	379.441,06

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Saldo financiero
2	2,5500	30.758,94	9.675,75	21.083,19	358.357,87
3	2,5500	30.758,94	9.138,13	21.620,81	336.737,06
4	2,5500	30.758,94	8.586,80	22.172,14	314.564,92
5	2,5500	30.758,94	8.021,41	22.737,53	291.827,39
6	2,5500	30.758,94	7.441,60	23.317,34	268.510,05
7	2,5500	30.758,94	6.847,01	23.911,93	244.598,12
8	2,5500	30.758,94	6.237,25	24.521,69	220.076,43
9	2,5500	30.758,94	5.611,95	25.146,99	194.929,44
10	2,5500	30.758,94	4.970,70	25.788,24	169.141,20

El valor del capital pendiente de amortizar al principio del sexto año es 169.141,20.

Al principio del año 6 varía el índice de referencia, por lo que el tipo semestral correspondiente es:

$$i_6^{(m)} = \frac{5{,}20\% + 0{,}60\%}{2} = 2{,}90\%$$

Puesto que el tipo de referencia no varía hasta la finalización de la operación, este tipo de interés es el que permanecerá vigente hasta la conclusión de la misma, por lo que el término amortizativo semestral correspondiente a los últimos 3 años es:

$$169.141{,}20 = a_6 \times a_{\overline{3\times 2}|2{,}90\%} \quad \Rightarrow \quad a_6 = 31.119{,}64$$

Por tanto, el cuadro de amortización completo es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Saldo financiero
0	—	—	—	—	400.000,00
1	2,5500	30.758,94	10.200,00	20.558,94	379.441,06
2	2,5500	30.758,94	9.675,75	21.083,19	358.357,87
3	2,5500	30.758,94	9.138,13	21.620,81	336.737,06
4	2,5500	30.758,94	8.586,80	22.172,14	314.564,92
5	2,5500	30.758,94	8.021,41	22.737,53	291.827,39
6	2,5500	30.758,94	7.441,60	23.317,34	268.510,05
7	2,5500	30.758,94	6.847,01	23.911,93	244.598,12

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Saldo financiero
8	2,5500	30.758,94	6.237,25	24.521,69	220.076,43
9	2,5500	30.758,94	5.611,95	25.146,99	194.929,44
10	2,5500	30.758,94	4.970,70	25.788,24	169.141,20
11	2,9000	31.119,64	4.905,09	26.214,55	142.926,65
12	2,9000	31.119,64	4.144,87	26.974,77	115.951,88
13	2,9000	31.119,64	3.362,60	27.757,04	88.194,84
14	2,9000	31.119,64	2.557,65	28.561,99	59.632,85
15	2,9000	31.119,64	1.729,35	29.390,29	30.242,56
16	2,9000	31.119,64	877,08	30.242,56	0,00

Para elaborar el cuadro de distribución de costes hemos de tener en cuenta el tipo efectivo pasivo semestral, calculado en el origen de la operación:

$$400.000 - 1.000 - 23.000 = 376.000 = 30.758{,}94 \times a_{\overline{8\times 2}|i_{p1}^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_{p1}^{(m)} = 3{,}358022\,\%$$

El cuadro hasta el momento de la modificación del tipo de interés es:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	376.000,00
1	3,358022	30.758,94	12.626,16	18.132,78	357.867,22
2	3,358022	30.758,94	12.017,26	18.741,68	339.125,54
3	3,358022	30.758,94	11.387,91	19.371,03	319.754,51
4	3,358022	30.758,94	10.737,43	20.021,51	299.733,00
5	3,358022	30.758,94	10.065,10	20.693,84	279.039,16
6	3,358022	30.758,94	9.370,20	21.388,74	257.650,42
7	3,358022	30.758,94	8.651,96	22.106,98	235.543,44
8	3,358022	30.758,94	7.909,60	22.849,34	212.694,10
9	3,358022	30.758,94	7.142,31	23.616,63	189.077,47
10	3,358022	30.758,94	6.349,26	24.409,68	164.667,79

Al modificarse el tipo de interés de la operación pura, hemos de calcular el tipo efectivo pasivo semestral de la operación pendiente, el cual se deduce de la ecuación:

$$164.667{,}79 = 31.119{,}64 \times a_{\overline{3\times 2}|i_{p2}^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_{p2}^{(m)} = 3{,}713171\,\%$$

© Ediciones Pirámide

Finalmente, el cuadro completo de distribución de costes es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	376.000,00
1	3,358022	30.758,94	12.626,16	18.132,78	357.867,22
2	3,358022	30.758,94	12.017,26	18.741,68	339.125,54
3	3,358022	30.758,94	11.387,91	19.371,03	319.754,51
4	3,358022	30.758,94	10.737,43	20.021,51	299.733,00
5	3,358022	30.758,94	10.065,10	20.693,84	279.039,16
6	3,358022	30.758,94	9.370,20	21.388,74	257.650,42
7	3,358022	30.758,94	8.651,96	22.106,98	235.543,44
8	3,358022	30.758,94	7.909,60	22.849,34	212.694,10
9	3,358022	30.758,94	7.142,31	23.616,63	189.077,47
10	3,358022	30.758,94	6.349,26	24.409,68	164.667,79
11	3,713171	31.119,64	6.114,40	25.005,24	139.662,55
12	3,713171	31.119,64	5.185,91	25.933,73	113.728,82
13	3,713171	31.119,64	4.222,95	26.896,69	86.832,13
14	3,713171	31.119,64	3.224,23	27.895,41	58.936,72
15	3,713171	31.119,64	2.188,42	28.931,22	30.005,50
16	3,713171	31.119,64	1.114,14	30.005,50	0,00

15.5.2. Préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses prepagables

En los préstamos con intereses anticipados realizamos las correspondientes distribuciones, de acuerdo con los valores derivados del respectivo préstamo equivalente con intereses pospagables.

EJERCICIO 15.28

Se concede un préstamo de 125.000 € para ser amortizado en 8 años mediante anualidades constantes y tipo de interés anticipado del 8% anual. Además, existe una comisión de apertura del 1% de la cuantía nominal del préstamo y unos gastos a favor de terceros de 850 €. Para la citada operación, confeccionar: *a*) cuadro de amortización con intereses anticipados; *b*) cuadro de amortización que resulta de utilizar el tipo de interés pospagable equivalente; *c*) cuadro de distribución de ingresos financieros, y *d*) cuadro de distribución de costes de financiación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Dado que hemos de calcular el importe de los términos amortizativos, dicho importe se puede obtener al plantear la ecuación de equivalencia utilizando el tipo de interés pospagable anual equivalente al 8% anual anticipado:

$$i = \frac{0{,}08}{1 - 0{,}08} = 8{,}695652\%$$

Por tanto, el término amortizativo pospagable es el siguiente:

$$125.000(1 - 0{,}08) = a \times a_{\overline{8}|8{,}695652\%} \quad \Rightarrow \quad a = 20.543{,}11$$

a) Cuadro de amortización con intereses anticipados:

Período	Tipo de interés anticipado (%)	Término amortizativo	Cuota de interés prepagable	Cuota de amortización nominal	Capital nominal total amortizado	Capital nominal vivo
0	8	10.000,00	10.000,00	0,00	0,00	125.000,00
1	8	20.543,11	9.083,17	11.459,94	11.459,94	113.540,06
2	8	20.543,11	8.086,70	12.456,41	23.916,35	101.083,65
3	8	20.543,11	7.003,53	13.539,58	37.455,93	87.544,07
4	8	20.543,11	5.826,17	14.716,94	52.172,87	72.827,13
5	8	20.543,11	4.546,44	15.996,67	68.169,54	56.830,46
6	8	20.543,11	3.155,42	17.387,69	85.557,23	39.442,77
7	8	20.543,11	1.643,45	18.899,66	104.456,89	20.543,11
8	8	20.543,11	0,00	20.543,11	125.000,00	0,00

b) Cuadro de amortización que resulta de utilizar el tipo de interés pospagable equivalente:

Período	Tipo de interés pospagable (%)	Término amortizativo	Cuota de interés pospagable	Cuota de amortización neta	Capital neto total amortizado	Saldo financiero neto
0	—	—	—	—	—	115.000,00
1	8,695652	20.543,11	10.000,00	10.543,11	10.543,11	104.456,89
2	8,695652	20.543,11	9.083,21	11.459,90	22.003,01	92.996,99
3	8,695652	20.543,11	8.086,69	12.456,42	34.459,43	80.540,57
4	8,695652	20.543,11	7.003,53	13.539,58	47.999,01	67.000,99
5	8,695652	20.543,11	5.826,17	14.716,94	62.715,95	52.284,05
6	8,695652	20.543,11	4.546,44	15.996,67	78.712,62	36.287,38
7	8,695652	20.543,11	3.155,42	17.387,69	96.100,31	18.899,69
8	8,695652	20.543,11	1.643,42	18.899,69	115.000,00	0,00

© Ediciones Pirámide

c) Distribución de ingresos financieros:

Para realizar la distribución de los ingresos financieros en el tiempo, hemos de determinar el tipo efectivo activo anual pospagable de la operación, el cual se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas (cuantía neta del préstamo) y las recibidas (comisión de apertura y términos amortizativos pospagables):

$$125.000(1 - 0{,}08) - 1.250 = 113.750 = 20.543{,}11 \times a_{\overline{8}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 8{,}988739\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestamista la operación supone invertir una cuantía de 113.750 € al 8,988739% anual, recuperándose la misma en 8 años con términos anuales. Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos financieros es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	113.750,00
1	8,988739	20.543,11	10.224,69	10.318,42	103.431,58
2	8,988739	20.543,11	9.297,20	11.245,91	92.185,67
3	8,988739	20.543,11	8.286,33	12.256,78	79.928,89
4	8,988739	20.543,11	7.184,60	13.358,51	66.570,38
5	8,988739	20.543,11	5.983,84	14.559,27	52.011,11
6	8,988739	20.543,11	4.675,14	15.867,97	36.143,14
7	8,988739	20.543,11	3.248,81	17.294,30	18.848,84
8	8,988739	20.543,11	1.694,27	18.848,84	0,00

Tal y como hemos señalado, los ingresos financieros derivados de la inversión se han de separar a su vez en precio financiero de la operación pura (cuotas de interés equivalentes pospagables) y precio financiero pospagable derivado de las características comerciales. Dicha separación se recoge en la siguiente tabla:

Período	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	10.224,69	10.000,00	224,69
2	9.297,20	9.083,21	213,99
3	8.286,33	8.086,69	199,64
4	7.184,60	7.003,53	181,07
5	5.983,84	5.826,17	157,67
6	4.675,14	4.546,44	128,70
7	3.248,81	3.155,42	93,39
8	1.694,27	1.643,42	50,85

© Ediciones Pirámide

d) Distribución de costes de financiación:

Para elaborar el citado cuadro hemos de determinar previamente el tipo efectivo pasivo anual pospagable, el cual se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$125.000(1 - 0{,}08) - 1.250 - 850 = 112.900 = 20.543{,}11 \times a_{\overline{8}|i_p} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_p = 9{,}190926\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestatario la operación supone obtener un préstamo neto de 112.900 € al 9,190926% anual, amortizándose el mismo en 8 años con términos anuales. Por tanto, el cuadro de distribución de costes de financiación es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	112.900,00
1	9,190926	20.543,11	10.376,56	10.166,55	102.733,45
2	9,190926	20.543,11	9.442,16	11.100,95	91.632,50
3	9,190926	20.543,11	8.421,88	12.121,23	79.511,27
4	9,190926	20.543,11	7.307,82	13.235,29	66.275,98
5	9,190926	20.543,11	6.091,38	14.451,73	51.824,25
6	9,190926	20.543,11	4.763,13	15.779,98	36.044,27
7	9,190926	20.543,11	3.312,80	17.230,31	18.813,96
8	9,190926	20.543,11	1.729,15	18.813,96	0,00

Finalmente, la separación de los costes de financiación entre precio financiero pospagable de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	10.376,56	10.000,00	376,56
2	9.442,16	9.083,21	358,95
3	8.421,88	8.086,69	335,19
4	7.307,82	7.003,53	304,29
5	6.091,38	5.826,17	265,21
6	4.763,13	4.546,44	216,69
7	3.312,80	3.155,42	157,38
8	1.729,15	1.643,42	85,73

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 15.29

El 30 de mayo de 2009 se pacta una operación de préstamo de cuantía 90.000 € que se amortiza en 6 años mediante anualidades constantes y tipo de interés anticipado del 5% anual. El prestamista percibe una comisión inicial del 1% de la cuantía nominal del préstamo, existiendo unos gastos a favor de terceros de 575 €. Confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

El tipo de interés pospagable anual equivalente al 5% anual anticipado es:

$$i = \frac{0{,}05}{1 - 0{,}05} = 5{,}263158\%$$

Por tanto, el término amortizativo pospagable es el siguiente:

$$90.000(1 - 0{,}05) = a \times a_{\overline{6}|5{,}263158\%} \quad \Rightarrow \quad a = 16.987{,}02$$

Para confeccionar el cuadro de amortización por fechas hemos de calcular el tipo de interés pospagable que corresponde al conjunto de días que transcurren entre el 30 de mayo y el 31 de diciembre de cada año, así como desde dicha fecha hasta el 30 de mayo del siguiente año, utilizando para ello el criterio Real/Real. En consecuencia, el cuadro de amortización con intereses pospagables equivalentes y por fechas es:

Fecha	Días	Tipo de interés pospagable (%)	Término amortizativo	Cuota de interés pospagable	Cuota amortización neta	Saldo financiero neto
30/05/2009	—	—	—	—	—	85.500,00
31/12/2009	215	3,067493	0,00	2.622,71	−2.622,71	88.122,71
30/05/2010	150	2,130318	16.987,02	1.877,29	15.109,73	73.012,98
31/12/2010	215	3,067493	0,00	2.239,67	−2.239,67	75.252,65
30/05/2011	150	2,130318	16.987,02	1.603,12	15.383,90	59.868,75
31/12/2011	215	3,058985	0,00	1.831,38	−1.831,38	61.700,13
30/05/2012	151	2,138749	16.987,02	1.319,61	15.667,41	46.032,72
31/12/2012	215	3,067493	0,00	1.412,05	−1.412,05	47.444,77
30/05/2013	150	2,130318	16.987,02	1.010,72	15.976,30	31.468,47
31/12/2013	215	3,067493	0,00	965,29	−965,29	32.433,76
30/05/2014	150	2,130318	16.987,02	690,94	16.296,08	16.137,68
31/12/2014	215	3,067493	0,00	495,02	−495,02	16.632,70
30/05/2015	150	2,130318	16.987,02	354,32	16.632,70	0,00

© Ediciones Pirámide

Por tanto, la cuota de interés de cada año natural es la suma de las correspondientes cuotas con fecha 30 de mayo y 31 de diciembre de cada año.

a) *Distribución de ingresos financieros*

Para la confección del cuadro de distribución de ingresos, hemos de hallar previamente, utilizando el criterio Real/365, el tipo efectivo activo, cuyo valor es 5,593615% anual. Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos resultante de aportar de forma neta el prestamista 84.600 euros y recibir seis términos amortizativos de 16.987,02 euros el 30 de mayo de cada año, es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
30/05/2009	—	—	—	—	—	84.600,00
31/12/2009	215	3,257963	0,00	2.756,24	−2.756,24	87.356,24
30/05/2010	150	2,261959	16.987,02	1.975,96	15.011,06	72.345,18
31/12/2010	215	3,257963	0,00	2.356,98	−2.356,98	74.702,16
30/05/2011	150	2,261959	16.987,02	1.689,73	15.297,29	59.404,87
31/12/2011	215	3,257963	0,00	1.935,39	−1.935,39	61.340,26
30/05/2012	151	2,277209	16.987,02	1.396,85	15.590,17	45.750,09
31/12/2012	215	3,257963	0,00	1.490,52	−1.490,52	47.240,61
30/05/2013	150	2,261959	16.987,02	1.068,56	15.918,46	31.322,15
31/12/2013	215	3,257963	0,00	1.020,46	−1.020,46	32.342,61
30/05/2014	150	2,261959	16.987,02	731,58	16.255,44	16.087,17
31/12/2014	215	3,257963	0,00	524,11	−524,11	16.611,28
30/05/2015	150	2,261959	16.987,02	375,74	16.611,28	0,00

La separación de los ingresos financieros entre precio financiero de la operación pura (cuota de interés pospagables) y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
30/05/2009	—	—	—	—
31/12/2009	215	2.756,24	2.622,71	133,53
30/05/2010	150	1.975,96	1.877,29	98,67
31/12/2010	215	2.356,98	2.239,67	117,31
30/05/2011	150	1.689,73	1.603,12	86,61
31/12/2011	215	1.935,39	1.831,38	104,01

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
30/05/2012	151	1.396,85	1.319,61	77,24
31/12/2012	215	1.490,52	1.412,05	78,47
30/05/2013	150	1.068,56	1.010,72	57,84
31/12/2013	215	1.020,46	965,29	55,17
30/05/2014	150	731,58	690,94	40,64
31/12/2014	215	524,11	495,02	29,09
30/05/2015	150	375,74	354,32	21,42

b) *Distribución de costes de financiación*

El tipo efectivo anual de coste, incluyendo la comisión de apertura de 900 euros y los gastos a abonar a terceros de 575 euros, es del 5,809432%. Por tanto, el cuadro de distribución de costes resultante de recibir de forma neta el prestatario 84.025 euros y entregar al final de cada uno de los 6 años que dura la operación 16.987,02 euros, siendo el tipo de interés efectivo pasivo del 5,809432% anual, es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
30/05/2009	—	—	—	—	—	84.025,00
31/12/2009	215	3,382224	0,00	2.841,91	−2.841,91	86.866,91
30/05/2010	150	2,347800	16.987,02	2.039,46	14.947,56	71.919,35
31/12/2010	215	3,382224	0,00	2.432,47	−2.432,47	74.351,82
30/05/2011	150	2,347800	16.987,02	1.745,63	15.241,39	59.110,43
31/12/2011	215	3,382224	0,00	1.999,25	−1.999,25	61.109,68
30/05/2012	151	2,363636	16.987,02	1.444,41	15.542,61	45.567,07
31/12/2012	215	3,382224	0,00	1.541,18	−1.541,18	47.108,25
30/05/2013	150	2,347800	16.987,02	1.106,01	15.881,01	31.227,24
31/12/2013	215	3,382224	0,00	1.056,18	−1.056,18	32.283,42
30/05/2014	150	2,347800	16.987,02	757,95	16.229,07	16.054,35
31/12/2014	215	3,382224	0,00	542,99	−542,99	16.597,34
30/05/2015	150	2,347800	16.987,02	389,68	16.597,34	0,00

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
30/05/2009	—	—	—	—
31/12/2009	215	2.841,91	2.622,71	219,20
30/05/2010	150	2.039,46	1.877,29	162,17
31/12/2010	215	2.432,47	2.239,67	192,80
30/05/2011	150	1.745,63	1.603,12	142,51
31/12/2011	215	1.999,25	1.831,38	167,87
30/05/2012	151	1.444,41	1.319,61	124,80
31/12/2012	215	1.541,18	1.412,05	129,13
30/05/2013	150	1.106,01	1.010,72	95,29
31/12/2013	215	1.056,18	965,29	90,89
30/05/2014	150	757,95	690,94	67,01
31/12/2014	215	542,99	495,02	47,97
30/05/2015	150	389,68	354,32	35,36

15.5.3. Préstamos amortizables con contraprestación única

La distribución temporal de ingresos y costes en este tipo de préstamos se realiza de manera análoga a la efectuada en los préstamos con contraprestación múltiple.

EJERCICIO 15.30

El 19 de junio del año 2010 la empresa A obtiene de cierto banco un capital de 30.000 € para la financiación de una maquinaria. Dicho importe, junto con los intereses que se devenguen, se devolverá en un solo pago el 2 de noviembre del año siguiente. Dicha operación se pacta bajo el sistema de capitalización simple (Real/Real), siendo el tipo de interés el 10% anual. Además, la empresa ha de abonar el 3% del importe del préstamo como comisión de apertura y unos gastos a favor de terceros de 1.250 €. Confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

Se trata de una operación pactada bajo el sistema de capitalización simple, siendo el período temporal de 501 días, que son los comprendidos entre el 19 de

© Ediciones Pirámide

junio de 2010 y el 2 de noviembre del año siguiente. Por tanto, el capital a devolver es:

$$C_n = 30.000\left(1 + \frac{501}{365} \times 0{,}10\right) = 34.117{,}81$$

a) *Distribución de ingresos financieros*

Una vez conocidas las diferentes cantidades a abonar y recibir por parte del prestamista, el tipo efectivo activo anual es[4]:

$$30.000 = 900 + 34.117{,}81(1 + i_a)^{-\frac{501}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_a = 12{,}288088\,\%$$

El tipo de interés anual que corresponde a los 195 días del año 2010 se deduce de la ecuación:

$$1 + i_{a1}^{(m)} = (1 + i_a)^{\frac{195}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_{a1}^{(m)} = 6{,}387499\,\%$$

Igualmente, el correspondiente a los 306 días del año 2011 se obtiene de:

$$1 + i_{a2}^{(m)} = (1 + i_a)^{\frac{306}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_{a2}^{(m)} = 10{,}204050\,\%$$

El cuadro de distribución es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Cobros	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
19/06/2010	—	—	—	—	—	29.100,00
31/12/2010	195	6,387499	0,00	1.858,76	−1.858,76	30.958,76
02/11/2011	306	10,204050	34.117,81	3.159,05	30.958,76	0,00

La separación de los ingresos financieros en precio financiero de la operación pura (interés) y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (intereses)	Precio financiero de las características comerciales
19/06/2010	—	—	—	—
31/12/2010	195	1.858,76	1.602,74	256,03
02/11/2011	306	3.159,05	2.515,07	643,98

[4] Aunque la operación se pacte en capitalización simple, los tipos efectivos se calculan en capitalización compuesta Real/Real.

© Ediciones Pirámide

Para el cuadro anterior hemos tenido en cuenta que los intereses simples correspondientes al año 2010 y al 2011 son, respectivamente:

$$I_1 = 30.000 \times \frac{195}{365} \times 0{,}10 = 1.602{,}74$$

$$I_2 = 30.000 \times \frac{306}{365} \times 0{,}10 = 2.515{,}07$$

b) *Distribución de costes de financiación*

Una vez conocidas las diferentes cantidades a recibir y abonar por parte del prestatario, el tipo efectivo pasivo anual es:

$$30.000 - 900 - 1.250 = 34.117{,}81(1 + i_p)^{-\frac{501}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_p = 15{,}937889\%$$

El cuadro de distribución es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Pagos	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
19/06/2010	—	—	—	—	—	27.850,00
31/12/2010	195	8,221162	0,00	2.289,59	−2.289,59	30.139,59
02/11/2011	306	13,199302	34.117,81	3.978,22	30.139,59	0,00

La separación de los costes de financiación en precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (intereses)	Precio financiero de las características comerciales
19/06/2010	—	—	—	—
31/12/2010	195	2.289,59	1.602,74	686,85
02/11/2011	306	3.978,22	2.515,07	1.463,15

EJERCICIO 15.31

Para poder solventar problemas de liquidez, cierta empresa concierta con una entidad financiera una operación de préstamo. El nominal del mismo es de 125.000 €, pactándose el sistema financiero de capitalización simple con un interés anticipado del 12% anual (Real/Real). El banco entrega el capital correspondien-

© Ediciones Pirámide

te el 30 de septiembre de 2010 y la empresa se compromete a devolver el nominal de la operación el 23 de diciembre del año siguiente. Sabiendo que en la citada operación financiera existe una comisión de apertura del 2,5% del nominal y unos gastos a favor de terceros de 4.500 €, confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

Se trata de una operación pactada bajo el sistema de capitalización simple, pero con intereses anticipados, siendo el período temporal de 449 días, que son los comprendidos entre el 30 de septiembre de 2010 y el 23 de diciembre del año siguiente. Los intereses anticipados ascienden a:

$$I^* = 125.000 \times \frac{449}{365} \times 0{,}12 = 18.452{,}05$$

En consecuencia, la cuantía neta del préstamo es:

$$125.000 - 18.452{,}05 = 106.547{,}95$$

Los cuadros de distribución los realizamos con los importes correspondientes al préstamo equivalente con intereses pospagables.

a) *Distribución de ingresos financieros*

Una vez conocidas las diferentes cantidades a abonar y recibir por parte del prestamista, el tipo efectivo activo anual pospagable es:

$$106.547{,}95 - 3.125 = 103.422{,}95 = 125.000(1 + i_a)^{-\frac{449}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_a = 16{,}653427\%$$

El cuadro de distribución es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Cobros	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
30/09/2010	—	—	—	—	—	103.422,95
31/12/2010	92	3,958938	0,00	4.094,45	−4.094,45	107.517,40
23/12/2011	357	16,260251	125.000,00	17.482,60	107.517,40	0,00

La separación de los ingresos financieros entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (intereses)	Precio financiero de las características comerciales
30/09/2010	—	—	—	—
31/12/2010	92	4.094,95	3.780,82	313,63
23/12/2011	357	17.482,60	14.671,23	2.811,37

b) *Distribución de costes de financiación*

Una vez conocidas las diferentes cantidades a recibir y abonar por parte del prestatario, el tipo efectivo pasivo anual es:

$$106.547{,}95 - 3.125 - 4.500 = 98.922{,}95 = 125.000(1 + i_p)^{-\frac{449}{365}} \Rightarrow i_p = 20{,}949188\%$$

El cuadro de distribución es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Pagos	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
30/09/2010	—	—	—	—	—	98.922,95
31/12/2010	92	4,910866	0,00	4.857,97	−4.857,97	103.780,92
23/12/2011	357	20,446028	125.000,00	21.219,08	103.780,92	0,00

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (intereses)	Precio financiero de las características comerciales
30/09/2010	—	—	—	—
31/12/2010	92	4.857,97	3.780,82	1.077,15
23/12/2011	357	21.219,08	14.671,23	6.547,85

15.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea una operación de préstamo de 24.000 € a amortizar en 10 años con términos amortizativos anuales constantes. Los tipos de interés son del 4% anual para los dos primeros períodos, del 6% anual para los cuatro siguientes y del 8% para los restantes. Calcular el tipo de interés medio de la citada operación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La cuantía del término amortizativo constante se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación:

$$24.000 = a \times a_{\overline{2}|0,04} + a \times a_{\overline{4}|0,06}(1 + 0,04)^{-2} +$$
$$+ a \times a_{\overline{4}|0,08}(1 + 0,04)^{-2}(1 + 0,06)^{-4} \quad \Rightarrow \quad a = 3.193,46$$

Finalmente, para calcular el tipo de interés medio anual se plantea la ecuación de equivalencia financiera entre los 24.000 € que forman la prestación y las diez cuantías de 3.193,46 € que constituyen la contraprestación, siendo el tipo medio resultante el 5,5617% anual:

$$24.000 = 3.193,46 \times a_{\overline{10}|i_m} \quad \Rightarrow \quad i_m = 5,5617\%$$

2. Se concede un préstamo de 120.000 euros a amortizar en 20 años con términos anuales constantes y tipo de interés del 8% anual. Los gastos iniciales fueron del 1% por comisión de apertura y 750 euros de honorarios notariales y registrales. Además, se estiman unos gastos finales de 300 euros. Transcurridos 5 años, tras haber abonado el correspondiente término amortizativo, el prestatario se replantea la operación al ofrecerle otra entidad financiera por el tiempo restante un tipo de interés del 7,5% con una comisión de apertura del 1,5% de la cuantía a conceder en préstamo, gastos de estudio por importe de 150 euros y unos gastos finales de 250 euros. Sabiendo que en caso de acceder a la operación, el prestatario tendría que abonar una comisión de cancelación del 1% del saldo vivo y unos gastos de gestoría y notaría de 120 euros, cantidades que el prestatario incluiría en la cuantía del nuevo préstamo, determinar si le interesa la subrogación en función del tipo efectivo pasivo global.

Resolución

Para conocer si le interesa la operación de subrogación, el prestatario ha de calcular inicialmente el tipo efectivo pasivo del primer préstamo. En este sentido, a través de la ecuación de equivalencia financiera se obtiene el importe del término amortizativo:

$$120.000 = a \times a_{\overline{20}|8\%} \quad \Rightarrow \quad a = 12.222,27$$

Por tanto, el tipo efectivo pasivo anual, i_{p1}, de la operación de préstamo inicial asciende a 8,2283%, el cual se obtiene de la siguiente ecuación:

$$120.000 = 120.000 \times 0,01 + 750 + 12.222,27 \times a_{\overline{20}|i_{p1}} + 300(1 + i_{p1})^{-20}$$

© Ediciones Pirámide

El saldo vivo en el momento en el que se plantea la refinanciación es:

$$C_5 = 12.222{,}27 \times a_{\overline{15}|0{,}08} \quad \Rightarrow \quad C_5 = 104.616{,}26$$

Por tanto, sabiendo que se incluye en la cuantía del nuevo préstamo la comisión de cancelación que asciende al 1% del saldo vivo en ese momento y unos gastos de 120 €, el nuevo préstamo asciende a 105.782,42 euros, por lo que el nuevo término amortizativo es:

$$105.782{,}42 = a' \times a_{\overline{15}|0{,}075} \quad \Rightarrow \quad a' = 11.983{,}80$$

Para poder decidir si interesa la subrogación se ha de comparar el tipo efectivo pasivo de la primera operación con el de la operación global i_{pg}, es decir, con el tipo efectivo resultante de la ecuación de equivalencia financiera, que incluye los capitales entregados y recibidos por el prestatario desde el momento inicial de la primera operación hasta la finalización de la segunda:

$$120.000 = 120.000 \times 0{,}01 + 750 + 12.222{,}27 \times a_{\overline{5}|i_{pg}} + (0{,}015 \times$$
$$\times\ 105.782{,}42 + 50)(1 + i_{pg})^{-5} + 11.983{,}80 \times a_{\overline{15}|i_p}(1 + i_{pg})^{-5} + 250(1 + i_{pg})^{-20}$$

De la anterior ecuación se obtiene un tipo efectivo pasivo global anual del 8,2056%. Por tanto, al ser $i_{p1} > i_{pg}$, interesa la subrogación.

3. Un préstamo de 25.000 € se va a amortizar en 5 años, con un tipo de interés del 6% nominal anual pagadero mensualmente. El prestatario ha de abonar una comisión inicial del 2% sobre la cuantía del préstamo. Además, la citada operación está intervenida por fedatario público, el cual cifra sus honorarios en 240 €. La amortización se puede efectuar con cualquiera de las siguientes opciones: *a*) términos amortizativos constantes mensuales y abono al final de la vida del préstamo del 30% de la cuantía del mismo; *b*) términos amortizativos constantes mensuales durante los cinco años, y devolver, junto con sus intereses, el 30% de la cuantía del préstamo al final de la vida del mismo. Determinar el tipo efectivo de coste y el TAE de cada opción de amortización.

Resolución

Para determinar los tipos efectivos hemos de cuantificar previamente el importe del término amortizativo de cada opción. Además, en cualquiera de las dos el tipo de interés mensual es el 0,5%, y el prestatario abona al inicio de la operación 500 € en concepto de comisión y 240 € en concepto de honorarios del fedatario público.

© Ediciones Pirámide

Opción *a*): En esta opción se abonan términos amortizativos mensuales constantes durante 5 años, y además, debido al aplazamiento del 30% de la cuantía del préstamo, en el último mes se abona dicho 30%, 7.500 €. Por tanto, la ecuación de equivalencia financiera que permite determinar la cuantía constante del término amortizativo mensual es:

$$25.000 = a \times a_{\overline{60}|0,005} + 7.500(1 + 0,005)^{-60} \quad \Rightarrow \quad a = 375,82$$

Para el tipo efectivo de coste, tenemos:

$$25.000 = 500 + 240 + 375,82 \times a_{\overline{60}|i_p^{(m)}} + 7.500(1 + i_p^{(m)})^{-60} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0,58452176\% \text{ mensual}; \; i_p = 7,2442\% \text{ anual}$$

Para calcular el TAE se tiene:

$$25.000 = 500 + 375,82 \times a_{\overline{60}|i_{TAE}^{(m)}} + 7.500(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-60} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0,556727\% \text{ mensual}; \; i_{TAE} = 6,889132\% \text{ anual}$$

Opción *b*): En esta opción también se abonan términos amortizativos mensuales constantes, y además, en el último mes, se amortiza el 30% de la cuantía del préstamo, devolviéndose el importe y sus intereses acumulados, $7.500 \times 1,005^{60} =$ $= 10.116,38$. En consecuencia, la ecuación de equivalencia financiera que permite determinar la cuantía constante del término amortizativo mensual es:

$$25.000 = a \times a_{\overline{60}|0,005} + 10.116,38 \times 1,005^{-60} \quad \Rightarrow \quad a = 338,32$$

Vemos que esta opción equivale a amortizar con los términos amortizativos constantes el 70% de la cuantía del préstamo, y el 30% restante se amortiza al final de la vida del préstamo mediante reembolso único comprensivo de capital e intereses, abonando por ello 10.116,38 € junto con el último término amortizativo.

La ecuación del tanto efectivo de coste es:

$$25.000 = 500 + 240 + 338,32 \times a_{\overline{60}|i_p^{(m)}} + 10.116,38(1 + i_p^{(m)})^{-60} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0,57917881\% \text{ mensual}; \; i_p = 7,1759\% \text{ anual}$$

Para el TAE se verifica:

$$25.000 = 500 + 338,32 \times a_{\overline{60}|i_{TAE}^{(m)}} + 10.116,38(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-60} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0,553149\% \text{ mensual}; \; i_{TAE} = 6,8435\% \text{ anual}$$

© Ediciones Pirámide

4. Se contrata un préstamo de 150.000 € a amortizar en 25 años con términos amortizativos mensuales, los cuales se calculan al principio de cada año según el método francés generalizado. El tipo de interés para el primer año es del 6% nominal anual. Las revisiones se efectuarán cada año, siendo el tipo de interés el resultante de aplicarle al Euribor un margen del 1%. Calcular el TAE para el citado préstamo sabiendo que la comisión de apertura es del 0,5% de la cuantía del préstamo, los gastos de estudio son 300 €, los gastos notariales ascienden a 550 €, y que el Euribor en la fecha de contratación del préstamo tenía un valor del 2%.

Resolución

Para el cálculo del TAE en este tipo de préstamos, hemos de obtener previamente la cuantía de los términos amortizativos con la información disponible en el momento de firmar el contrato. Para ello, sabiendo que las revisiones son anuales, los términos amortizativos correspondientes a los doce primeros meses se calculan de acuerdo con el método francés con el tipo de interés del 0,5% mensual, tipo equivalente al inicial del 6% anual convertible mensualmente:

$$150.000 = a_1 \times a_{\overline{25\times 12}|0,5\%} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 966,45$$

Transcurridos los doce primeros meses se ha de revisar el tipo de interés. Ahora bien, en el origen de la operación, que es cuando es preciso calcular el TAE, no se conoce cuál será la cuantía de los restantes términos amortizativos, ni tampoco el valor del índice de referencia. Por tanto, una vez calculado el saldo al principio del segundo año, a efectos del cálculo del TAE, dichos términos se obtendrán utilizando el valor del índice de referencia conocido en la fecha de realización del contrato:

$$C_1 = 966,45 \times a_{\overline{24\times 12}|0,5\%} = 147.329,62$$

$$i_2^{(m)} = \frac{2\% + 1\%}{12} = 0,25\% \quad \Rightarrow \quad 147.329,62 = a_2 \times a_{\overline{24\times 12}|0,25\%} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 718,25$$

Por tanto, el tipo de interés mensual $i_{TAE}^{(m)}$ se obtiene planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen, considerándose la comisión de apertura y los gastos de estudio:

$$150.000 = 0,005 \times 150.000 + 300 + 966,45 \times a_{\overline{12}|i_{TAE}^{(m)}} + 718,25 \times$$
$$\times a_{\overline{24\times 12}|i_{TAE}^{(m)}}(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-12} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 0,27799612\% \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_{TAE} = (1 + 0,27799612\%)^{12} - 1 = 3,3874\%$$

© Ediciones Pirámide

5. Sea un préstamo de cuantía 120.000 € a amortizar en 20 años con términos amortizativos mensuales, los cuales se calculan de acuerdo con el método francés generalizado. Las revisiones se efectúan de forma anual, siendo el tipo de interés el resultante de aplicarle al Euribor un margen del 0,75%. Calcular el TAE para el citado préstamo, sabiendo que existe una comisión inicial del 1% de la cuantía del préstamo y que el Euribor en la fecha de contratación tiene un valor del 2,25%.

Resolución

Lo primero que se ha de efectuar es calcular las cuantías de los distintos términos amortizativos a los que da lugar el préstamo. Dado que no existe un tipo de interés fijo para un período inicial, el tipo de interés mensual a utilizar para calcular la cuantía de dichos términos en el primer año es el siguiente:

$$i^{(m)} = \frac{2{,}25\% + 0{,}75\%}{12} = 0{,}25\%$$

A efectos del cálculo del TAE, los términos amortizativos teóricos del préstamo son de la siguiente cuantía:

$$120.000 = a \times a_{\overline{20\times 12}|0{,}25\%} \quad \Rightarrow \quad a = 665{,}52$$

Por tanto, al incluir la comisión de apertura en la ecuación de equivalencia financiera, se obtiene el tipo mensual $i^{(m)}_{TAE}$:

$$120.000 = 120.000 \times 0{,}01 + 665{,}52 \times a_{\overline{20\times 12}|i^{(m)}_{TAE}} \quad \Rightarrow \quad i^{(m)}_{TAE} = 0{,}25930192\%$$

Finalmente, el equivalente anual al tipo $i^{(m)}_{TAE}$ será el valor del TAE que ha de figurar en el contrato:

$$(1 + i_{TAE}) = (1 + i^{(m)}_{TAE})^{12} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE} = (1 + 0{,}25930192\%)^{12} - 1 = 3{,}1564\%$$

6. Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar en 9 años con términos anuales, siendo el tipo de interés para los 5 primeros años del 6% y para los restantes se calcularán por el método francés generalizado, añadiéndole al Euribor un margen del 1%. Sabiendo que el valor del Euribor en el momento de la firma del contrato es del 3,50%, y que existe una comisión de apertura de 275 €, determinar el TAE.

Resolución

En primer lugar, se ha de determinar la cuantía de los términos amortizativos de los cinco primeros períodos, la cual se obtiene de la ecuación de equivalencia

© Ediciones Pirámide

financiera, suponiendo que el tipo de interés fijo permanece vigente durante toda la duración del préstamo:

$$30.000 = a \times a_{\overline{9}|6\%} \quad \Rightarrow \quad a = 4.410,67$$

Dado que el período con tipo de interés fijo es superior al 50% de la duración total del contrato de préstamo, a efectos del cálculo del TAE solamente se tendrá en cuenta dicho tipo de interés fijo. Por tanto, si se incluye la comisión de apertura en la ecuación de equivalencia financiera, se obtendrá el valor del TAE:

$$30.000 = 275 + 4.410,67 \times a_{\overline{9}|i_{TAE}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE} = 6,2121\%$$

7. Sea un préstamo de 150.000 € a amortizar en 10 años mediante términos amortizativos anuales constantes, con un tipo de interés anticipado del 7% anual. Se sabe que existe una comisión de apertura del 2,5% del principal y unos gastos a favor de terceros de 5.750 €. Determinar los tipos efectivos activo, pasivo y TAE de la operación.

Resolución

En primer lugar debemos calcular el importe de los términos amortizativos, para lo que consideramos la operación pura con el tipo anual equivalente pospagable:

$$i = \frac{0,07}{1 - 0,07} = 7,52688172\%$$

Por tanto, el término amortizativo pospagable es el siguiente:

$$150.000(1 - 0,07) = a \times a_{\overline{10}|7,52688172\%} \quad \Rightarrow \quad a = 20.348,14$$

El tipo efectivo activo anual pospagable se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre los capitales entregados y recibidos por el prestamista, es decir, incluyendo la comisión de apertura:

$$150.000(1 - 0,07) - 3.750 = 135.750 = 20.348,14 \times a_{\overline{10}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 8,128473\%$$

Por su parte, el tipo efectivo pasivo anual pospagable se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre los capitales entregados y recibidos por el prestatario, por lo que hemos de incluir junto a la comisión de apertura (3.750 €) los gastos a favor de terceros (5.750 €):

$$150.000(1 - 0,07) - 3.750 - 5.750 = 130.000 = 20.348,14 \times a_{\overline{10}|i_p} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_p = 9,102551\%$$

© Ediciones Pirámide

Finalmente, para determinar el TAE de la operación hemos de efectuar la equivalencia financiera entre los capitales entregados y recibidos por ambos sujetos según las normas del Banco de España, es decir, incluyendo la comisión de apertura, pero sin considerar los gastos a abonar a terceros (5.750 €). En consecuencia:

$$150.000(1 - 0{,}07) - 3.750 = 135.750 = 20.348{,}14 \times a_{\overline{10}|i_{TAE}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE} = 8{,}128473\%$$

8. Un préstamo de 250.000 € se ha de amortizar en 6 años por el método francés al 5% anual. El prestamista percibe una comisión inicial del 2% de la cuantía del préstamo. Además, existen unos gastos a favor de terceros de 14.500 €. Confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

El término amortizativo anual de la operación pura es:

$$250.000 = a \times a_{\overline{6}|5\%} \quad \Rightarrow \quad a = 49.254{,}37$$

Asimismo, el cuadro de amortización es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Amortización	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	250.000,00
1	5	49.254,37	36.754,37	12.500,00	36.754,37	213.245,63
2	5	49.254,37	38.592,09	10.662,28	75.346,46	174.653,54
3	5	49.254,37	40.521,69	8.732,68	115.868,15	134.131,85
4	5	49.254,37	42.547,78	6.706,59	158.415,93	91.584,07
5	5	49.254,37	44.675,17	4.579,20	203.091,10	46.908,90
6	5	49.254,37	46.908,90	2.345,47	250.000,00	0,00

a) *Distribución de ingresos financieros*

La distribución en el tiempo de los ingresos financieros recibidos por el prestamista se realiza de acuerdo con el tipo efectivo activo anual de la operación, el cual se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$250.000 - 5.000 = 245.000 = 49.254{,}37 \times a_{\overline{6}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 5{,}63529622\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestamista la operación supone invertir una cuantía de 245.000 € al 5,63529622% anual, recuperándose la misma en 6 años con términos anuales. Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos financieros es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	245.000,00
1	5,63529622	49.254,37	13.806,48	35.447,89	209.552,11
2	5,63529622	49.254,37	11.808,88	37.445,49	172.106,62
3	5,63529622	49.254,37	9.698,72	39.555,65	132.550,97
4	5,63529622	49.254,37	7.469,64	41.784,73	90.766,24
5	5,63529622	49.254,37	5.114,95	44.139,42	46.626,82
6	5,63529622	49.254,37	2.627,55	46.626,82	0,00

Los ingresos financieros derivados de la inversión se han de separar a su vez en precio financiero de la operación pura (cuotas de interés) y precio financiero derivado de las características comerciales. Dicha separación se recoge en la siguiente tabla:

Período	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	13.806,48	12.500,00	1.306,48
2	11.808,88	10.662,28	1.146,60
3	9.698,72	8.732,68	966,04
4	7.469,64	6.706,59	763,05
5	5.114,95	4.579,20	535,75
6	2.627,55	2.345,47	282,08

b) *Distribución de costes de financiación*

El tipo efectivo de coste anual, incluyendo la comisión de apertura de 5.000 € y los gastos a favor de terceros de 14.500 €, es:

$$250.000 - 5.000 - 14.500 = 230.500 = 49.254{,}37 \times a_{\overline{6}|i_p} \quad \Rightarrow \quad i_p = 7{,}59810329\,\%$$

Por tanto, el cuadro de distribución de costes resultante es:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	230.500,00
1	7,59810329	49.254,37	17.513,63	31.740,74	198.759,26
2	7,59810329	49.254,37	15.101,93	34.152,44	164.606,82
3	7,59810329	49.254,37	12.507,00	36.747,37	127.859,45
4	7,59810329	49.254,37	9.714,89	39.539,48	88.319,97
5	7,59810329	49.254,37	6.710,64	42.543,73	45.776,24
6	7,59810329	49.254,37	3.478,13	45.776,24	0,00

© Ediciones Pirámide

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	17.513,63	12.500,00	5.013,63
2	15.101,93	10.662,28	4.439,65
3	12.507,00	8.732,68	3.774,32
4	9.714,89	6.706,59	3.008,30
5	6.710,64	4.579,20	2.131,44
6	3.478,13	2.345,47	1.132,66

9. El 21 de febrero de 2010 se pacta una operación de préstamo de cuantía 75.000 €, que se ha de amortizar por el método francés en 4 años al 10% anual. El prestamista percibe una comisión inicial del 4% de la cuantía del préstamo. Además, existen unos gastos a favor de terceros de 2.500 €. Confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

El valor del término amortizativo anual es:

$$75.000 = a \times a_{\overline{4}|10\%} \quad \Rightarrow \quad a = 23.660,31$$

Asimismo, el cuadro de amortización de la operación pura por períodos unitarios anuales es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	75.000,00
1	10	23.660,31	16.160,31	7.500,00	16.160,31	58.839,69
2	10	23.660,31	17.776,34	5.883,97	33.936,65	41.063,35
3	10	23.660,31	19.553,97	4.106,34	53.490,62	21.509,38
4	10	23.660,31	21.509,38	2.150,93	75.000,00	0,00

Para confeccionar el cuadro de amortización por fechas hemos de calcular el tipo de interés que corresponde al conjunto de días que transcurren entre el 21 de febrero y el 31 de diciembre de cada año, así como desde dicha fecha hasta el 21 de febrero del siguiente año, utilizando para ello el criterio Real/Real. En consecuencia, el cuadro de amortización por fechas es:

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
21/02/2010	—	—	—	—	—	75.000,00
31/12/2010	313	8,51646680	0,00	−6.387,35	6.387,35	81.387,35
21/02/2011	52	1,36710422	23.660,31	22.547,66	1.112,65	58.839,69
31/12/2011	313	8,51646680	0,00	−5.011,06	5.011,06	63.850,75
21/02/2012	52	1,36710422	23.660,31	22.787,40	872,91	41.063,35
31/12/2012	314	8,52049279	0,00	−3.498,80	3.498,80	44.562,15
21/02/2013	52	1,36334362	23.660,31	23.052,77	607,54	21.509,38
31/12/2013	313	8,51646680	0,00	−1.831,84	1.831,84	23.341,22
21/02/2014	52	1,36710422	23.660,31	23.341,22	319,09	0,00

Por tanto, la cuota de interés de cada año natural es la suma de las correspondientes cuotas con fecha 21 de febrero y 31 de diciembre de cada año.

a) *Distribución de ingresos financieros*

Para la confección del cuadro de distribución de ingresos, hemos de hallar previamente el tipo efectivo activo, cuyo valor es 11,90421045% anual.

Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos resultante de aportar de forma neta el prestamista 72.000 euros y recibir cuatro términos amortizativos de 23.660,31 euros el 21 de febrero de cada año, es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
21/02/2010	—	—	—	—	—	72.000,00
31/12/2010	313	10,12539630	0,00	7.290,29	−7.290,29	79.290,29
21/02/2011	52	1,61526243	23.660,31	1.280,75	22.379,56	56.910,73
31/12/2011	313	10,12539630	0,00	5.762,44	−5.762,44	62.673,17
21/02/2012	52	1,61526243	23.660,31	1.012,34	22.647,97	40.025,20
31/12/2012	314	10,15933616	0,00	4.066,29	−4.066,29	44.091,49
21/02/2013	52	1,61526243	23.660,31	712,19	22.948,12	21.143,37
31/12/2013	313	10,12539630	0,00	2.140,85	−2.140,85	23.284,22
21/02/2014	52	1,61526243	23.660,31	376,09	23.284,22	0,00

La separación de los ingresos financieros en precio financiero de la operación pura (cuota de interés) y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
21/02/2010	—	—	—	—
31/12/2010	313	7.290,29	6.387,35	902,94
21/02/2011	52	1.280,75	1.112,65	168,10
31/12/2011	313	5.762,44	5.011,06	751,38
21/02/2012	52	1.012,34	872,91	139,43
31/12/2012	314	4.066,29	3.498,80	567,49
21/02/2013	52	712,19	607,54	104,65
31/12/2013	313	2.140,85	1.831,84	309,01
21/02/2014	52	376,09	319,09	57,00

b) *Distribución de costes de financiación*

El tipo efectivo de coste anual, incluyendo la comisión de apertura de 3.000 euros y los gastos a abonar a terceros de 2.500 euros es el 13,59853208%.

Por tanto, el cuadro de distribución de costes resultante de recibir de forma neta el prestatario 69.500 euros y entregar al final de cada uno de los 4 años que dura la operación 23.660,31 euros, siendo el tipo de interés efectivo pasivo del 13,59853208% anual, es el siguiente:

Fecha	Días	Tipo de interés (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
21/02/2010	—	—	—	—	—	69.500,00
31/12/2010	313	11,55370611	0,00	8.029,83	−8.029,83	77.529,83
21/02/2011	52	1,83304172	23.660,31	1.421,15	22.239,16	55.290,67
31/12/2011	313	11,55370611	0,00	6.388,12	−6.388,12	61.678,79
21/02/2012	52	1,83304172	23.660,31	1.130,60	22.529,71	39.149,08
31/12/2012	314	11,59268043	0,00	4.538,43	−4.538,43	43.687,51
21/02/2013	52	1,83304172	23.660,31	800,81	22.859,50	20.828,01
31/12/2013	313	11,55370611	0,00	2.406,41	−2.406,41	23.234,42
21/02/2014	52	1,83304172	23.660,31	425,89	23.234,42	0,00

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Costes totales de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
21/02/2010	—	—	—	—
31/12/2010	313	8.029,83	6.387,35	1.642,48
21/02/2011	52	1.421,15	1.112,65	308,50
31/12/2011	313	6.388,12	5.011,06	1.377,06
21/02/2012	52	1.130,60	872,91	257,69
31/12/2012	314	4.538,43	3.498,80	1.039,63
21/02/2013	52	800,81	607,54	193,27
31/12/2013	313	2.406,41	1.831,84	574,57
21/02/2014	52	425,89	319,09	106,80

10. Con fecha 30/09/2013, se pacta una operación de préstamo de 85.000 €, que se ha de amortizar por el método francés en 6 años al 7% anual. El prestamista percibe una comisión inicial del 2% de la cuantía del préstamo. Existen unos gastos a favor de terceros de 7.500 €. Confeccionar el cuadro de distribución de los costes de financiación y el de los ingresos financieros, sabiendo que el 14 de febrero de 2015 se realiza un reembolso parcial de 30.000 €, debiéndose abonar una comisión del 1%, la cual se paga en efectivo, y no se pretende modificar la duración restante.

Resolución

El valor del término amortizativo anual es:

$$85.000 = a \times a_{\overline{6}|7\%} \quad \Rightarrow \quad a = 17.832,64$$

Esta cuantía es la encargada de amortizar el préstamo transcurridos los 6 años desde su concesión, realizándose los cuadros de amortización y de distribución de la forma ya descrita. No obstante, el 14 de febrero de 2015 se realiza un reembolso parcial, por lo que es preciso modificar los cuadros iniciales. Por tanto, se hace necesario determinar el importe del saldo financiero en el momento de hacerse efectivo el reembolso parcial. En este sentido, el saldo financiero correspondiente al 30/09/2014 es:

$$C_1 = 17.832,64 \times a_{\overline{6-1}|7\%} = 73.117,34$$

Sabiendo que transcurren 137 días entre el 30/09/2014 y el 14/02/2015, el saldo vivo resultante en el momento de hacerse efectivo el reembolso parcial es:

$$C'_{12} = 73.117,34(1 + 0,07)^{\frac{137}{365}} - 30.000 = 44.997,94$$

Dicho capital ha de amortizarse con cinco anualidades, siendo el importe de las mismas el siguiente:

$$44.997,94 = a' \times a_{\overline{5}|7\%}(1 + 0,07)^{\frac{137}{365}} \quad \Rightarrow \quad a' = 10.699,39$$

© Ediciones Pirámide

El siguiente cuadro de amortización registra lo acontecido en la operación pura hasta la finalización de la misma, incluyendo el reembolso parcial el 14/02/2015. Además, se ha calculado el tipo de interés que corresponde al conjunto de días que transcurren entre el 14 de febrero y el 31 de diciembre de cada año, así como desde dicha fecha hasta el 14 de febrero del siguiente año, utilizando para ello el criterio Real/Real. En consecuencia, el cuadro de amortización por fechas es:

Fecha	Días	Tipo de interés (%)	Términos de la contraprestación	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
30/09/2013	—	—	—	—	—	85.000,00
31/12/2013	92	1,71999310	0,00	−1.461,99	1.461,99	86.461,99
30/09/2014	273	5,19072676	17.832,64	13.344,63	4.488,01	73.117,36
31/12/2014	92	1,71999310	0,00	−1.257,61	1.257,61	74.374,97
14/02/2015	45	0,83763643	30.000,00	29.377,01	622,99	44.997,96
30/09/2015	228	4,31693015	10.699,39	8.756,86	1.942,53	36.241,10
31/12/2015	92	1,71525359	0,00	−621,63	621,63	36.862,73
30/09/2016	274	5,19562821	10.699,39	8.784,14	1.915,25	28.078,59
31/12/2016	92	1,71999310	0,00	−482,95	482,95	28.561,54
30/09/2017	273	5,19072676	10.699,39	9.216,84	1.482,55	19.344,70
31/12/2017	92	1,71999310	0,00	−332,73	332,73	19.677,43
30/09/2018	273	5,19072676	10.699,39	9.677,99	1.021,40	9.999,44
31/12/2018	92	1,71999310	0,00	−171,99	171,99	10.171,43
30/09/2019	273	5,19072676	10.699,39	10.171,43	527,96	0,00

a) *Distribución de ingresos financieros*

En el origen de la operación se determina el tipo efectivo activo anual con los datos conocidos en dicho momento, el cual se utiliza para confeccionar el cuadro de distribución hasta el momento del reembolso parcial. Se obtiene un tanto anual del 7,65410930%.

El cuadro correspondiente hasta el momento del reembolso parcial es:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
30/09/2013	—	—	—	—	—	83.300,00
31/12/2013	92	1,87637171	0,00	1.563,02	−1.563,02	84.863,02
30/09/2014	273	5,67132249	17.832,64	4.812,86	13.019,78	71.843,24
31/12/2014	92	1,87637171	0,00	1.348,05	−1.348,05	73.191,29
14/02/2015	45	0,91343271	30.300,00	668,55	29.631,45	43.559,84

© Ediciones Pirámide

En el momento de realizarse el reembolso parcial, el prestatario entrega una cuantía total de 30.300 €, cuya descomposición, siguiendo el mismo criterio de los períodos precedentes, ha de hacerse en los mismos dos sumandos, teniendo en cuenta que, al haber transcurrido 45 días desde el 31/12/2014, se devengarán ingresos financieros por ese período, dedicándose a amortización la diferencia entre lo aportado y los citados ingresos. En consecuencia, el capital pendiente una vez efectuado el reembolso parcial es 43.559,84 €, por lo que el tipo efectivo anual correspondiente a la operación pendiente es el 8,40513557%.

Con el tipo efectivo anterior se completa el cuadro de distribución:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
30/09/2013	—	—	—	—	—	83.300,00
31/12/2013	92	1,87637171	0,00	1.563,02	−1.563,02	84.863,02
30/09/2014	273	5,67132249	17.832,64	4.812,86	13.019,78	71.843,24
31/12/2014	92	1,87637171	0,00	1.348,05	−1.348,05	73.191,29
14/02/2015	45	0,91343271	30.300,00	668,55	29.631,45	43.559,84
30/09/2015	228	5,17055292	10.699,39	2.252,28	8.447,11	35.112,73
31/12/2015	92	2,05504639	0,00	721,58	−721,58	35.834,31
30/09/2016	274	6,24570910	10.699,39	2.238,11	8.461,28	27.373,03
31/12/2016	92	2,05504639	0,00	562,53	−562,53	27.935,56
30/09/2017	273	6,22221967	10.699,39	1.738,21	8.961,18	18.974,38
31/12/2017	92	2,05504639	0,00	389,93	−389,93	19.364,31
30/09/2018	273	6,22221967	10.699,39	1.204,89	9.494,50	9.869,81
31/12/2018	92	2,05504639	0,00	202,83	−202,83	10.072,64
30/09/2019	273	6,22221967	10.699,39	626,75	10.072,64	0,00

Finalmente, la separación de los ingresos financieros entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
30/09/2013	—	—	—	—
31/12/2013	92	1.563,02	1.461,99	101,03
30/09/2014	273	4.812,86	4.488,01	324,85
31/12/2014	92	1.348,05	1.257,61	90,44
14/02/2015	45	668,55	622,99	45,56
30/09/2015	228	2.252,28	1.942,53	309,75
31/12/2015	92	721,58	621,63	99,95

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
30/09/2016	274	2.238,11	1.915,25	322,86
31/12/2016	92	562,53	482,95	79,58
30/09/2017	273	1.738,21	1.482,55	255,66
31/12/2017	92	389,93	332,73	57,20
30/09/2018	273	1.204,89	1.021,40	183,49
31/12/2018	92	202,83	171,99	30,84
30/09/2019	273	626,75	527,96	98,79

b) *Distribución de costes de financiación*

De forma similar a lo señalado anteriormente, el tipo efectivo anual de coste en el origen de la operación es el 10,82992256%.

El cuadro correspondiente hasta el momento del reembolso parcial es:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
30/09/2013	—	—	—	—	—	75.800,00
31/12/2013	92	2,62567307	0,00	1.990,26	−1.990,26	77.790,26
30/09/2014	273	7,99434415	17.832,64	6.218,82	11.613,82	66.176,44
31/12/2014	92	2,62567307	0,00	1.737,58	−1.737,58	67.914,02
14/02/2015	45	1,27579504	30.300,00	866,44	29.433,56	38.480,46

En el momento de realizarse el reembolso parcial, el prestatario entrega una cuantía total de 30.300 €, cuya descomposición, siguiendo el mismo criterio de los períodos precedentes, ha de hacerse en los mismos dos sumandos, teniendo en cuenta que, al haber transcurrido 45 días desde el 31/12/2014, se soportarán costes de financiación por ese período, dedicándose a amortización la diferencia entre lo aportado y los citados costes. En consecuencia, el capital pendiente una vez efectuado el reembolso parcial es 38.480,46 €, por lo que el tipo efectivo anual correspondiente a la operación pendiente es el 14,11608636%.

Con el tipo efectivo anterior se completa el cuadro de distribución:

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
30/09/2013	—	—	—	—	—	75.800,00
31/12/2013	92	2,62567307	0,00	1.990,26	−1.990,26	77.790,26
30/09/2014	273	7,99434415	17.832,64	6.218,82	11.613,82	66.176,44

© Ediciones Pirámide

Fecha	Días	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
31/12/2014	92	2,62567307	0,00	1.737,58	−1.737,58	67.914,02
14/02/2015	45	1,27579504	30.300,00	866,44	29.433,56	38.480,46
30/09/2015	228	8,59808168	10.699,39	3.308,58	7.390,81	31.089,65
31/12/2015	92	3,38429089	0,00	1.052,16	−1.052,16	32.141,81
30/09/2016	274	10,42042908	10.699,39	3.349,31	7.350,08	24.791,73
31/12/2016	92	3,38429089	0,00	839,02	−839,02	25.630,75
30/09/2017	273	10,38048951	10.699,39	2.660,60	8.038,79	17.591,96
31/12/2017	92	3,38429089	0,00	595,36	−595,36	18.187,32
30/09/2018	273	10,38048951	10.699,39	1.887,93	8.811,46	9.375,86
31/12/2018	92	3,38429089	0,00	317,31	−317,31	9.693,17
30/09/2019	273	10,38048951	10.699,39	1.006,22	9.693,17	0,00

Finalmente, la separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Fecha	Días	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
30/09/2013	—	—	—	—
31/12/2013	92	1.990,26	1.461,99	528,27
30/09/2014	273	6.218,82	4.488,01	1.730,81
31/12/2014	92	1.737,58	1.257,61	479,97
14/02/2015	45	866,44	622,99	243,45
30/09/2015	228	3.308,58	1.942,53	1.366,05
31/12/2015	92	1.052,16	621,63	430,53
30/09/2016	274	3.349,31	1.915,25	1.434,06
31/12/2016	92	839,02	482,95	356,07
30/09/2017	273	2.660,60	1.482,55	1.178,05
31/12/2017	92	595,36	332,73	262,63
30/09/2018	273	1.887,93	1.021,40	866,53
31/12/2018	92	317,31	171,99	145,32
30/09/2019	273	1.006,22	527,96	478,26

11. Se pacta un préstamo de 125.000 € a amortizar en 8 años con términos amortizativos anuales constantes, siendo el tipo de interés el 12% anual. Además, existen unos gastos iniciales de 1.450 €. Al principio del décimo mes del cuarto año el prestatario realiza un pago adicional de 25.000 €, el cual se destinará a reembolso parcial, teniendo que desembolsar, además en concepto de comisión por

© Ediciones Pirámide

dicho reembolso, el 1% del capital amortizado anticipadamente. Calcular: *a*) el cuadro de amortización en el caso de que se mantenga la duración de la operación; *b*) si se decide reducir en 2 años la duración restante, determinar cuál sería el importe del reembolso parcial si se mantiene constante la cuantía de los términos amortizativos.

Resolución

De acuerdo con los datos iniciales, el valor del término amortizativo anual es:

$$125.000 = a \times a_{\overline{8}|12\%} \quad \Rightarrow \quad a = 25.162,86$$

Al principio del décimo mes del cuarto año se realiza un reembolso parcial, por lo que el cuadro de amortización de la operación inicial variará. Por tanto, se hace necesario determinar el importe del saldo financiero en el momento de hacerse efectivo el reembolso parcial. En este sentido, el saldo financiero al principio del cuarto año es:

$$C_3 = 25.162,86 \times a_{\overline{8-3}|12\%} = 90.706,48$$

Sabiendo que transcurren 9 meses desde el principio del año 4 hasta el momento del reembolso parcial, el saldo vivo resultante en dicho momento es:

$$C'_r = 90.706,48(1 + 0,12)^{\frac{9}{12}} - 25.000 = 73.753,35$$

a) En el caso de mantenerse la duración, dicho capital ha de amortizarse con cinco anualidades, siendo el importe de las mismas el siguiente:

$$73.753,35 = a' \times a_{\overline{5}|12\%}(1 + 0,12)^{\frac{9}{12}} \quad \Rightarrow \quad a' = 18.792,73$$

El siguiente cuadro de amortización registra lo acontecido en la operación pura hasta la finalización de la misma, incluyendo el reembolso parcial de 25.000 €:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	125.000,00
1	12	25.162,86	10.162,86	15.000,00	10.162,86	114.837,14
2	12	25.162,86	11.382,40	13.780,46	21.545,26	103.454,74
3	12	25.162,86	12.748,29	12.414,57	34.293,55	90.706,45
3 + 9/12	8,8713271	25.000,00	16.953,13	8.046,87	51.246,68	73.753,32
4	2,8737345	18.792,73	16.673,26	2.119,47	67.919,94	57.080,06
5	12	18.792,73	11.943,12	6.849,61	79.863,06	45.136,94
6	12	18.792,73	13.376,30	5.416,43	93.239,36	31.760,64
7	12	18.792,73	14.981,45	3.811,28	108.220,81	16.779,19
8	12	18.792,73	16.779,19	2.013,54	125.000,00	0,00

© Ediciones Pirámide

b) En el caso de que se quiera reducir la duración restante en dos años, es decir, que se abonen 3 términos amortizativos de valor 25.162,86 euros, el reembolso parcial se calcula planteando la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$90.706{,}48(1 + 0{,}12)^{\frac{9}{12}} - X = 25.162{,}86 \times a_{\overline{3}|12\%}(1 + 0{,}12)^{\frac{9}{12}} \quad \Rightarrow \quad X = 32.954{,}85\ €$$

12. Cierto sujeto, debido a un problema eventual de liquidez, acude a una entidad financiera con el propósito de obtener un préstamo de 3.000 euros a devolver en 6 meses con pagos constantes. La entidad financiera le ofrece un préstamo con la duración que quería el cliente y a un tipo de interés del 0%. Confeccionar el cuadro de distribución, sabiendo que existe una comisión de apertura del 3% del nominal del préstamo.

Resolución

Al ser el tipo de interés del 0%, el término amortizativo mensual de la operación pura se puede obtener simplemente dividiendo la cuantía del préstamo entre el número de meses de duración del mismo:

$$a = \frac{3.000}{6} = 500$$

Por lo que el cuadro de amortización de la operación pura es:

Período	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	3.000,00
1	0	500,00	500,00	0,00	500,00	2.500,00
2	0	500,00	500,00	0,00	1.000,00	2.000,00
3	0	500,00	500,00	0,00	1.500,00	1.500,00
4	0	500,00	500,00	0,00	2.000,00	1.000,00
5	0	500,00	500,00	0,00	2.500,00	500,00
6	0	500,00	500,00	0,00	3.000,00	0,00

Por otro lado, al existir características comerciales en el origen de la operación, el tipo de interés del 0% no implica que el coste de la operación financiera sea nulo. Al contrario, al incluir una comisión de apertura del 3% del nominal (90 euros), el tipo efectivo pasivo mensual es el siguiente:

$$3.000 - 90 = 2.910 = 500 \times a_{\overline{6}|i_p^{(m)}} \quad \Rightarrow \quad i_p^{(m)} = 0{,}87726738\%$$

© Ediciones Pirámide

Como la única característica comercial del préstamo es bilateral, el tanto efectivo activo coincide con el pasivo, por lo que la distribución temporal de ingresos coincide con la de costes.

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, y por ejemplo para el prestatario, la operación supone obtener un préstamo neto de 2.910 € al 0,87726738% mensual, amortizándose el mismo en 6 meses con términos mensuales constantes de 500 €, satisfaciendo un precio financiero o costes financieros totales de 90 €, los cuales corresponden íntegramente a la comisión de apertura. La imputación a cada período mensual se refleja en el siguiente cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	2.910,00
1	0,87726738	500,00	25,53	474,47	2.435,53
2	0,87726738	500,00	21,37	478,63	1.956,90
3	0,87726738	500,00	17,17	482,83	1.474,07
4	0,87726738	500,00	12,93	487,07	987,00
5	0,87726738	500,00	8,66	491,34	495,66
6	0,87726738	500,00	4,34	495,66	0,00

13. Se concede un préstamo de 75.000 € para ser amortizado en 10 años mediante anualidades constantes y tipo de interés anticipado del 5% anual. Además, existe una comisión de apertura del 2% de la cuantía nominal del préstamo y unos gastos a favor de terceros de 2.350 €. Para la citada operación, confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

Dado que hemos de calcular el importe de los términos amortizativos, dicho importe se puede obtener al plantear la ecuación de equivalencia financiera, utilizando el tipo de interés pospagable anual equivalente al 5% anual anticipado:

$$i = \frac{0{,}05}{1 - 0{,}05} = 5{,}263158\%$$

Por tanto, el término amortizativo pospagable es el siguiente:

$$75.000(1 - 0{,}05) = a \times a_{\overline{10}|5{,}263158\%} \quad \Rightarrow \quad a = 9.345{,}49$$

a) *Distribución de ingresos financieros*

Para realizar la distribución de los ingresos financieros en el tiempo hemos de determinar el tipo efectivo activo anual pospagable de la operación, el cual se de-

© Ediciones Pirámide

duce de la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas (cuantía neta del préstamo) y las recibidas (comisión de apertura y términos amortizativos pospagables):

$$75.000(1 - 0{,}05) - 1.500 = 69.750 = 9.345{,}49 \times a_{\overline{10}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 5{,}706583\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestamista la operación supone invertir una cuantía de 69.750 € al 5,706583% anual, recuperándose la misma mediante 10 anualidades de 9.345,49 €. Por tanto, el cuadro de distribución de ingresos financieros es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	69.750,00
1	5,706583	9.345,49	3.980,34	5.365,15	64.384,85
2	5,706583	9.345,49	3.674,17	5.671,32	58.713,53
3	5,706583	9.345,49	3.350,54	5.994,95	52.718,58
4	5,706583	9.345,49	3.008,43	6.337,06	46.381,52
5	5,706583	9.345,49	2.646,80	6.698,69	39.682,83
6	5,706583	9.345,49	2.264,53	7.080,96	32.601,87
7	5,706583	9.345,49	1.860,45	7.485,04	25.116,83
8	5,706583	9.345,49	1.433,31	7.912,18	17.204,65
9	5,706583	9.345,49	981,80	8.363,69	8.840,96
10	5,706583	9.345,49	504,53	8.840,96	0,00

b) *Distribución de costes de financiación*

Para elaborar el citado cuadro, hemos de determinar previamente el tipo efectivo pasivo anual pospagable, el cual se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$75.000(1 - 0{,}05) - 1.500 - 2.350 = 67.400 = 9.345{,}49 \times a_{\overline{10}|i_p} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_p = 6{,}431193\%$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestatario la operación supone obtener un préstamo neto de 67.400 € al 6,431193% anual, amortizándose el mismo en 10 años con términos anuales. Por tanto, el cuadro de distribución de costes de financiación es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	67.400,00
1	6,431193	9.345,49	4.334,62	5.010,87	62.389,13
2	6,431193	9.345,49	4.012,37	5.333,12	57.056,01
3	6,431193	9.345,49	3.669,38	5.676,11	51.379,90
4	6,431193	9.345,49	3.304,34	6.041,15	45.338,75
5	6,431193	9.345,49	2.915,82	6.429,67	38.909,08
6	6,431193	9.345,49	2.502,32	6.843,17	32.065,91
7	6,431193	9.345,49	2.062,22	7.283,27	24.782,64
8	6,431193	9.345,49	1.593,82	7.751,67	17.030,97
9	6,431193	9.345,49	1.095,29	8.250,20	8.780,77
10	6,431193	9.345,49	564,72	8.780,77	0,00

14. Un préstamo de 125.000 € se amortiza por el método americano simple en 5 años con abono anual de intereses. El tipo de interés para los primeros tres años es el 4% anual, y para los siguientes el 5% anual. Existe una comisión inicial a favor del prestamista del 1,5% de la cuantía del préstamo, así como unos gastos a abonar por el prestatario a terceros por importe de 4.300 €. Confeccionar los cuadros de distribución de ingresos y costes.

Resolución

Tratándose de un préstamo amortizable por el método americano simple, el prestatario abona en los cuatro primeros años únicamente las cuotas de interés correspondientes, y en el último año abona la cuota de interés y la cuota de amortización que permite amortizar la operación. Todo ello se recoge en el cuadro de amortización siguiente:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	125.000,00
1	4	5.000,00	0,00	5.000,00	0,00	125.000,00
2	4	5.000,00	0,00	5.000,00	0,00	125.000,00
3	4	5.000,00	0,00	5.000,00	0,00	125.000,00
4	5	6.250,00	0,00	6.250,00	0,00	125.000,00
5	5	131.250,00	125.000,00	6.250,00	125.000,00	0,00

Para confeccionar los cuadros de distribución distinguimos entre el correspondiente al prestamista y al prestatario.

© Ediciones Pirámide

a) *Distribución de ingresos financieros*

El prestamista percibe unos ingresos financieros integrados por las cuotas de interés de la operación pura y la comisión de apertura, la cual asciende a 1.875 €. La distribución en el tiempo de dichos ingresos se realiza de acuerdo con el tipo efectivo activo de la operación, deducido de la correspondiente ecuación de equivalencia financiera:

$$125.000 - 1.875 = 123.125 = 5.000 \times a_{\overline{3}|i_a} + 6.250 \times a_{\overline{2}|i_a}(1 + i_a)^{-3} + 125.000(1 + i_a)^{-5}$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestamista la operación supone invertir una cuantía de 123.125 € al 4,71634037% anual, recuperándose la misma en 5 años con términos anuales, percibiendo un precio financiero o ingresos financieros totales de 29.375 €, suma de las cuotas de interés de la operación pura y la comisión de apertura.

El cuadro de distribución de los ingresos financieros es el siguiente:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	123.125,00
1	4,71634037	5.000,00	5.806,99	−806,99	123.931,99
2	4,71634037	5.000,00	5.845,05	−845,05	124.777,04
3	4,71634037	5.000,00	5.884,91	−884,91	125.661,95
4	4,71634037	6.250,00	5.926,65	323,35	125.338,60
5	4,71634037	131.250,00	5.911,40	125.338,60	0,00

En el cuadro anterior se puede observar que, al ser los cobros en los tres primeros años inferiores a los ingresos financieros respectivos, la amortización es negativa, por lo que el capital pendiente neto aumenta.

Los ingresos financieros derivados de la inversión se pueden descomponer en precio financiero de la operación pura (cuotas de interés) y precio financiero derivado de las características comerciales. Dicha descomposición se recoge en la siguiente tabla:

Período	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	5.806,99	5.000,00	806,99
2	5.845,05	5.000,00	845,05
3	5.884,91	5.000,00	884,91
4	5.926,65	6.250,00	−323,35
5	5.911,40	6.250,00	−338,60
Total	29.375,00	27.500,00	1.875,00

© Ediciones Pirámide

b) *Distribución de costes de financiación*

El prestatario soporta unos costes financieros integrados por las cuotas de interés de la operación pura, la comisión de apertura y los gastos a favor de terceros. La distribución en el tiempo de dichos costes se realiza de acuerdo con el tipo efectivo pasivo de la operación:

$$125.000 - 1.875 - 4.300 = 118.825 = 5.000 \times a_{\overline{3}|i_p} + 6.250 \times a_{\overline{2}|i_p}(1 + i_p)^{-3} + \\ + 125.000(1 + i_p)^{-5}$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el prestatario la operación supone obtener un préstamo neto de 118.825 € al 5,52571197% anual, amortizándose el mismo en 5 años con términos anuales, satisfaciendo un precio financiero o costes financieros totales de 33.675 €, suma de las cuotas de interés de la operación pura con la comisión de apertura y con los gastos a favor de terceros. Para imputar a cada período la parte que le corresponde de tales costes financieros, se utiliza el tipo efectivo pasivo de la operación, realizándose el siguiente cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	118.825,00
1	5,52571197	5.000,00	6.565,93	−1.565,93	120.390,93
2	5,52571197	5.000,00	6.652,46	−1.652,46	122.043,39
3	5,52571197	5.000,00	6.743,77	−1.743,77	123.787,16
4	5,52571197	6.250,00	6.840,12	−590,12	124.377,28
5	5,52571197	131.250,00	6.872,72	124.377,28	0,00

En el cuadro anterior podemos observar que, durante los cuatro primeros años, los costes de financiación superan a los correspondientes capitales pagados, por lo que la amortización es negativa, aumentando el capital pendiente neto.

La separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	6.565,93	5.000,00	1.565,93
2	6.652,46	5.000,00	1.652,46
3	6.743,77	5.000,00	1.743,77
4	6.840,12	6.250,00	590,12
5	6.872,72	6.250,00	622,72
Total	33.675,00	27.500,00	6.175,00

© Ediciones Pirámide

Observamos en el cuadro anterior que los costes de financiación, 33.675 €, se distribuyen en 5 años, correspondiendo 27.500 a intereses y 6.175 a la suma de la comisión inicial (1.875) y los gastos a favor de terceros (4.300).

15.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea una operación de préstamo de 50.000 € a amortizar en 15 años con términos amortizativos anuales constantes. Los tipos de interés son: 8% anual para los cinco primeros períodos, 5% anual para los cinco siguientes y 10% anual para los últimos. Calcular el tipo de interés medio de la citada operación.

2. Un de préstamo de 90.000 € se va a amortizar anualmente por el método francés en 12 años y tipo de interés del 8% anual. Calcular el tipo efectivo pasivo, tipo efectivo activo y TAE, sabiendo que el prestamista ha de pagar unos gastos a favor de terceros del 1% sobre la cuantía de cada término amortizativo y que el prestatario soporta los siguientes gastos: comisión de apertura del 2% de la cuantía del préstamo, gastos de estudio de 50 €, gastos notariales iniciales por importe de 600 € y gastos finales de gestión de 200 €.

3. Hace 8 años fue concedido un préstamo por importe de 125.000 euros a amortizar en 20 años con términos anuales constantes y tipo de interés del 8% anual. Los gastos iniciales fueron del 0,5% en concepto de comisión de apertura y de 900 euros en concepto de gastos de notaría y gestoría. Además, existen unos gastos finales a cargo del prestatario de 350 euros. En estos momentos, tras haber abonado el correspondiente término amortizativo, el prestatario se replantea la operación al ofrecerle otra entidad financiera por el tiempo restante un tipo de interés del 6%, con una comisión de apertura del 1% de la cuantía a conceder en préstamo y unos gastos finales de 300 euros. Sabiendo que en caso de acceder a la operación el prestatario tendría que abonar una comisión de cancelación del 1% del saldo vivo y unos gastos de gestoría y notaría de 100 euros, cantidades que el prestatario incluiría en la cuantía del nuevo préstamo, determinar si le interesa la subrogación, en función del tipo efectivo pasivo global.

4. Sea un préstamo de 250.000 € a amortizar en 15 años con términos amortizativos mensuales, los cuales se calculan al principio de cada año según el método francés generalizado. El tipo de interés para el primer año es del 4,5% nominal anual. Las revisiones se efectuarán cada año, siendo el tipo de interés el resultante de aplicarle al Euribor un margen del 0,50%. Calcular el TAE para el citado préstamo, sabiendo que la comisión de apertura es del 0,80% de la cuantía del préstamo, los gastos de estudio son de 300 €, los gastos notariales ascienden a 600 € y que el Euribor en la fecha de contratación del préstamo tenía un valor del 3,10%.

© Ediciones Pirámide

5. Un préstamo de 160.000 € se amortiza en 20 años mediante términos amortizativos anuales constantes, con un tipo de interés anticipado del 6% anual. Del citado préstamo se sabe que existe una comisión de apertura del 0,75% del principal del préstamo y unos gastos a favor de terceros de 6.400 €. Determinar los tipos efectivos activo, pasivo y TAE de la operación.

6. Sea un préstamo de 25.000 euros para ser amortizado con términos mensuales constantes en dos años al 6% nominal anual. En dicha operación el prestatario ha de abonar en concepto de comisión de apertura un 1% de la cuantía del préstamo y 500 euros de honorarios de notario. Determinar los costes de financiación del cuarto mes, a través del cuadro de distribución de costes.

© Ediciones Pirámide

PARTE QUINTA
Operaciones bancarias a corto plazo

16 Operaciones bancarias a corto plazo (I)

OBJETIVOS

- Definir una cuenta corriente y explicar su funcionamiento.
- Calcular el saldo de una cuenta corriente a través de diferentes métodos.
- Liquidar cuentas corrientes bancarias y cuentas de crédito a través del método hamburgués.
- Determinar el tipo efectivo activo y el TAE de una cuenta corriente.
- Determinar el TAE que ha de figurar en el contrato de las cuentas de crédito, así como el resultante de una liquidación.

SUMARIO

16.1. Introducción.
16.2. Cuentas corrientes.
16.3. Cuentas corrientes bancarias.
16.4. Cuentas de crédito.
16.5. Cálculo de los tantos efectivos.
16.6. Ejercicios y problemas resueltos.
16.7. Ejercicios y problemas propuestos.

16.1. INTRODUCCIÓN

En las lecciones precedentes hemos analizado diversas modalidades de operaciones financieras, las cuales suelen pactarse a largo plazo, siendo generalmente uno de los sujetos intervinientes una entidad de depósito, por lo que constituyen operaciones bancarias. No obstante, dichas entidades también realizan operaciones financieras a corto plazo, siendo preciso, por tanto, analizar la problemática derivada de las mismas.

Del conjunto de operaciones bancarias a corto plazo analizaremos las cuentas corrientes, las cuentas de crédito, las imposiciones a plazo y el descuento bancario.

Debido a que las operaciones son a corto plazo y su duración puede estar expresada en días, en las mismas se suele plantear la problemática derivada de convertir los días correspondientes en fracciones de año. Para ello se suelen seguir los criterios Real/360, Real/365 y Real/Real, cuyo significado es el siguiente:

- **Real/360 o año comercial:** los días se dividen entre 360.
- **Real/365:** los días se dividen entre 365, independientemente de que el año sea bisiesto.
- **Real/Real:** los días se dividen entre 365, o entre 366 si el año es bisiesto.

En cualquier caso, la expresión **Real** indica que los días a computar son los que realmente existan en la operación.

© Ediciones Pirámide

16.2. CUENTAS CORRIENTES

16.2.1. Concepto y características

Las cuentas corrientes surgen para agilizar las relaciones comerciales entre dos sujetos económicos con relaciones financieras entre sí, puesto que en vez de ir liquidando cada transacción en el momento de su realización, la misma se efectúa para el conjunto de las operaciones realizadas a lo largo de un cierto período de tiempo.

Por ejemplo, los sujetos económicos A y B tienen relaciones comerciales entre sí, por las cuales se compran y venden productos físicos, que dan lugar a los siguientes capitales financieros:

A entrega: {(10.000, 30/3) y (15.000, 15/4)}

B entrega: {(12.000, 5/4) y (8.000, 5/5)}

Ambos sujetos pueden liquidar cada operación por separado en una determinada fecha, o bien ir anotándose en cuenta todas las operaciones y liquidarlas conjuntamente en la fecha pactada. Tenemos así una operación de cuenta corriente.

Por tanto, podemos definir una **cuenta corriente** como una operación financiera compuesta, concertada entre dos sujetos, que consiste en un intercambio de capitales financieros con vencimientos distintos para saldar las diferencias financieras en un determinado momento, denominado fecha de cierre, y de acuerdo con una ley financiera previamente establecida.

De la citada definición podemos extraer las siguientes **características:**

- Son operaciones doblemente compuestas, por lo que la prestación y contraprestación son múltiples.
- Son operaciones posdeterminadas, ya que no es posible definir a priori los compromisos de las partes.
- Son operaciones de crédito recíproco, ya que el saldo resultante en la fecha de cierre puede ser a favor de cualquiera de las partes.
- Son a corto plazo, y habitualmente se pacta la ley de capitalización simple para su valoración.

La **mecánica operativa** derivada de la utilización de la cuenta corriente es la siguiente. Cada sujeto, a partir de una cierta fecha, denominada fecha de **apertura de la cuenta,** procede a realizar las anotaciones contables derivadas de las operaciones con el otro sujeto, al que le abre en su contabilidad una cuenta. El sujeto que lleva la contabilidad se denomina propietario de la misma o **tenedor,** siendo el otro sujeto el **titular** de la cuenta. Así, si realizamos un ingreso en nuestra cuen-

© Ediciones Pirámide

ta en un determinado banco, el mismo, en su contabilidad, nos tendrá abierta una cuenta, de la que somos titular, y anotará en la misma el correspondiente registro contable. Es decir, el banco nos abonará en cuenta tal ingreso, mientras que en nuestra contabilidad efectuaremos un cargo.

En general, el tenedor de la cuenta anota en el Haber de la misma las cuantías a favor de su titular, y anota en el Debe las cuantías a su cargo. Los capitales acreedores corresponden, pues, a los ingresos o abonos en cuenta, y los capitales deudores corresponden a las disposiciones o cargos en la misma.

Cada una de las transacciones realizadas tiene una **fecha operación,** que es aquella en la cual se realiza la misma, y una **fecha valor,** que es aquella a partir de la cual se devengan intereses. En las fechas establecidas al efecto, denominadas **fechas de liquidación de intereses,** se plantea la equivalencia financiera entre los capitales intercambiados por las partes y se procede a calcular intereses y saldos finales.

Atendiendo a diversos criterios, se pueden realizar distintas clasificaciones de las cuentas corrientes.

Si atendemos al **devengo de intereses,** se tienen las **cuentas corrientes simples o sin intereses,** es decir, cuando los capitales no devengan intereses y el saldo se obtiene por la simple diferencia entre las cuantías del Haber y del Debe de la cuenta[1]; y las **cuentas corrientes con interés,** en las que los capitales devengan intereses de acuerdo con la ley financiera aceptada por ambas partes. Estas cuentas pueden ser pactadas a **interés recíproco,** es decir, cuando el tipo de interés es el mismo para ambas partes, o bien a **interés no recíproco,** en las cuales el tipo de interés de los saldos deudores es distinto al de los saldos acreedores. Además, las cuentas corrientes con interés pueden ser **a interés fijo,** en las cuales el tipo de interés no varía, o **a interés variable.**

Si hacemos referencia a las partes intervinientes nos encontramos con **cuentas corrientes comerciales,** las cuales se establecen entre empresas o empresarios en general, concediéndose crédito recíprocamente; y **cuentas corrientes bancarias,** donde una de las partes es una entidad de depósito. De acuerdo con la Circular 8/1990 del Banco de España, las cuentas corrientes bancarias pueden ser **de depósito a la vista,** donde el titular concierta un depósito de fondos en una entidad bancaria, pudiendo incrementar, disminuir o retirar totalmente el saldo disponible sin previo aviso; o **de crédito,** en las cuales el banco concede al cliente la posibilidad de disponer de financiación hasta un límite previamente convenido.

16.2.2. Métodos de liquidación

La liquidación de una cuenta corriente supone el cálculo de los intereses correspondientes y del saldo de la misma en una determinada fecha. Existen tres métodos de liquidación: directo, indirecto y escalar o hamburgués, siendo este

[1] Éste es el saldo contable, pues se obtiene por la diferencia entre la suma aritmética de los capitales acreedores y la de los capitales deudores.

© Ediciones Pirámide

último el de mayor utilización práctica. Únicamente vamos a analizar el método directo y el hamburgués.

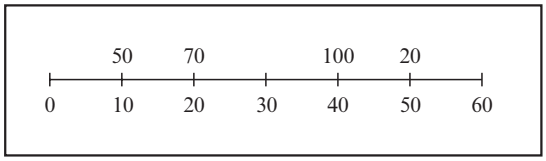
Para calcular el saldo de una cuenta corriente utilizamos como ley financiera de valoración la capitalización simple. Por tanto, si la duración está en días y el tipo de interés es anual, el cálculo de los intereses, según el criterio Real/360, se hace de la siguiente forma[2]:

$$I = \frac{C_0 \times n \times i}{360} = \frac{C_0 \times n}{\frac{360}{i}} = \frac{N}{D}$$

En la práctica, al numerador N se le denomina **número comercial,** y al denominador D **divisor fijo.** Así, el número comercial es el producto del capital por los días, y el divisor fijo el cociente entre 360 y el tipo de interés unitario[3].

EJERCICIO 16.1

Calcular los intereses de los siguientes capitales al final del día 60, siendo el tipo de interés el 5% anual.



Resolución

Para calcular los intereses totales, determinamos los que corresponden a cada capital. Para ello, el divisor fijo a utilizar es el resultado de dividir 360 entre el tipo de interés unitario, es decir:

$$D = \frac{360}{0{,}05} = 7.200$$

---

[2] Para la elaboración del presente capítulo utilizamos el criterio señalado, según el cual los días se computan por los reales que existen entre dos fechas valor, convirtiéndolos en fracciones de año al dividir entre 360. No obstante, existen entidades que aplican otros criterios, tales como el Real/Real o el Real/365.

[3] A veces se utilizan los números y el divisor fijo truncados, es decir, simplificados o divididos entre 100, siendo el resultado idéntico al anteriormente explicado.

© Ediciones Pirámide

Así, si calculamos el interés del capital (100, 40) en el punto 60, se obtiene:

$$I = \frac{100(60 - 40)}{7.200} = 0{,}28$$

De la misma manera calculamos los intereses de todos los capitales de la cuenta corriente, obteniéndose la totalidad de los mismos:

$$I_T = \frac{50(60 - 10)}{7.200} + \frac{70(60 - 20)}{7.200} + \frac{100(60 - 40)}{7.200} + \frac{20(60 - 50)}{7.200} = 1{,}04$$

***a*) Método directo**

Vamos ahora a determinar de forma general el saldo a través del método directo, el cual sólo es aplicable en el supuesto de interés recíproco. En este sentido, supongamos que los movimientos de capitales de una cuenta corriente son los siguientes:

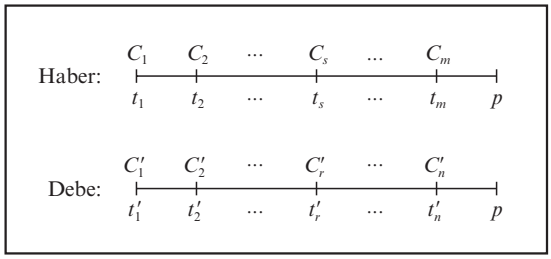


Figura 16.1.

En el Haber de la cuenta se observan m capitales, mientras que en el Debe hay n capitales. El punto p señala la fecha de liquidación o cierre de la cuenta corriente. El objetivo es determinar el montante en el punto p, tanto para los capitales acreedores como para los capitales deudores. Para ello hay que calcular el interés que produce cada capital entre el vencimiento correspondiente y la fecha de cierre. El tiempo es $(p - t_s)$ para los capitales del Haber y $(p - t'_r)$ para los del Debe. Por tanto, los montantes son:

$$M_a = \sum_{s=1}^{m} C_s[1 + (p - t_s) \times i] = \sum_{s=1}^{m} C_s + \sum_{s=1}^{m} C_s(p - t_s) \times i = C_a + I_a$$

$$M_d = \sum_{r=1}^{n} C_r[1 + (p - t'_r) \times i] = \sum_{r=1}^{n} C_r + \sum_{r=1}^{n} C_r(p - t'_r) \times i = C_d + I_d$$

© Ediciones Pirámide

siendo:

M_a: Valor final o montante de los capitales acreedores o del Haber.
M_d: Valor final o montante de los capitales deudores o del Debe.
C_a: Suma aritmética de los capitales acreedores o del Haber.
C_d: Suma aritmética de los capitales deudores o del Debe.
I_a: Intereses acreedores.
I_d: Intereses deudores.

El saldo de la cuenta a través del método directo se obtiene como diferencia entre el montante constituido por los capitales acreedores y el montante de los capitales deudores:

$$S = M_a - M_d = (C_a + I_a) - (C_d + I_d) = (C_a - C_d) + (I_a - I_d)$$

Por tanto, el saldo a través de este método se puede hallar como la suma del saldo de capitales y el saldo de intereses.

Tal y como hemos determinado el saldo, si es positivo, es acreedor o a favor del titular de la cuenta. En cambio, si es negativo, es deudor o a favor del tenedor.

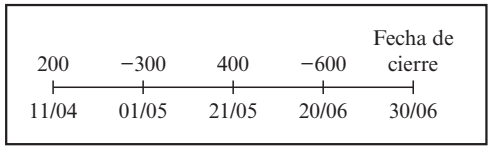
EJERCICIO 16.2

Calcular los intereses deudores y acreedores de los capitales de la siguiente cuenta corriente, tomando como fecha de cierre el 30/06. El tipo de interés recíproco a aplicar es el 2,5% anual.

Fecha valor	Debe	Haber
11/04	—	200
01/05	300	—
21/05	—	400
20/06	600	—

Resolución

Vamos a considerar con el signo positivo a los capitales acreedores o del Haber, y con el signo negativo a los deudores o del Debe. Gráficamente, tenemos:



© Ediciones Pirámide

Para determinar los intereses, los días correspondientes se calculan desde la fecha valor de cada capital hasta la fecha de cierre.

El divisor fijo es:

$$D = \frac{360}{0{,}025} = 14.400$$

Los intereses deudores son:

$$I_d = \frac{360 \times 60}{14.400} + \frac{600 \times 10}{14.400} = 1{,}67$$

Los intereses acreedores son:

$$I_a = \frac{200 \times 80}{14.400} + \frac{400 \times 40}{14.400} = 2{,}22$$

Por tanto, el correspondiente saldo de la cuenta corriente en la fecha de cierre es la diferencia entre la suma de capitales acreedores y la suma de capitales deudores, incluyendo los correspondientes intereses:

$$S = (200 + 400 + 2{,}22) - (300 + 600 + 1{,}67) = -299{,}45\ €$$

Al ser el saldo negativo, es un saldo deudor o a favor del tenedor de la cuenta.

EJERCICIO 16.3

Determinar a través del método directo el saldo con un tipo de interés recíproco del 8% anual, sabiendo que los capitales de una cuenta corriente y los días hasta la fecha de cierre son los siguientes:

Debe	Haber	Días
—	150	70
—	200	50
280	—	40

Resolución

Este ejercicio lo haremos utilizando los números truncados. Éstos se obtienen dividiendo tanto el divisor fijo como los números comerciales entre 100. En este sentido, el divisor fijo es el siguiente:

$$\frac{360}{0{,}08 \times 100} = 45$$

© Ediciones Pirámide

El resultado final no va a variar, ya que los números comerciales también están divididos entre 100. Así, el primer número comercial es:

$$\frac{150 \times 70}{100} = 105$$

El resto de números comerciales deudores, N_d, y acreedores, N_a, se desprenden de la siguiente tabla:

Debe	Haber	Días	N_d	N_a
—	150	70	—	105
—	200	50	—	100
280	—	40	112	—
280	350	—	112	205

En consecuencia, los intereses son:

$$I_d = \frac{112}{45} = 2{,}49 \quad ; \quad I_a = \frac{205}{45} = 4{,}56$$

Por consiguiente, el saldo de la cuenta es: $S = (350 - 280) + (4{,}56 - 2{,}49) =$ $= 72{,}07$ €. Se trata de un saldo acreedor o a favor del titular de la cuenta.

---

b) Método hamburgués

El otro método de liquidación de las cuentas corrientes que vamos a analizar es el método escalar, de saldos o hamburgués, aplicable tanto a cuentas con interés recíproco como a cuentas con interés no recíproco. Para ello, supongamos una operación financiera compuesta únicamente por dos capitales, (C_1, t_1) acreedor y (C_2, t_2) deudor:

Figura 16.2.

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el saldo a través del método directo es:

$$S = C_1 - C_2 + C_1(p - t_1) \times i - C_2(p - t_2) \times i$$

$$I = C_1(p - t_1) \times i - C_2(p - t_2) \times i \quad \Rightarrow \quad S = C_1 - C_2 + I$$

Si en la expresión del interés total descomponemos $(p - t_1)$ en $(p - t_2) + (t_2 - t_1)$ y sustituimos, queda:

$$I = C_1[(p - t_2) + (t_2 - t_1)] \times i - C_2(p - t_2) \times i$$

$$I = C_1(t_2 - t_1) \times i + C_1(p - t_2) \times i - C_2(p - t_2) \times i$$

$$I = C_1(t_2 - t_1) \times i + (C_1 - C_2)(p - t_2) \times i$$

De acuerdo con la expresión anterior, los intereses se descomponen en dos sumandos: el primero representativo de los intereses de C_1 durante el tiempo transcurrido hasta el siguiente vencimiento, y el segundo de los intereses del nuevo saldo de capitales $(C_1 - C_2)$ hasta p.

Esquemáticamente, tenemos:

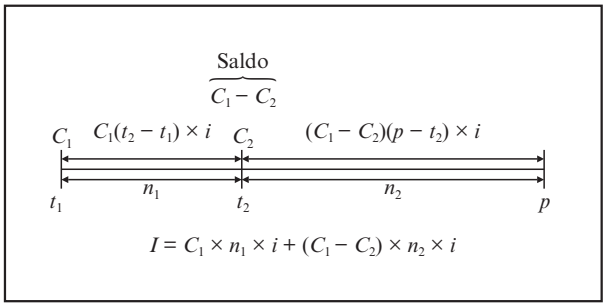


Figura 16.3.

Por tanto, el saldo final es $S = C_1 - C_2 + I$.

En general, cuando existan más de dos capitales, los intereses se van calculando sobre los saldos correspondientes y el tiempo hasta la siguiente modificación del saldo.

Ejercicio 16.4

Liquidar al 30/09 por el método hamburgués con tipo de interés recíproco del 9% anual la cuenta corriente cuyos movimientos son los siguientes:

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber
30/06	—	400
10/07	600	—
15/08	—	250
28/08	720	—
24/09	—	380

Resolución

En este método, hemos de ordenar en primer lugar los capitales por fecha valor. A continuación, cada vez que exista un movimiento se calcula el saldo de capitales. Dicho saldo genera intereses por los días que haya entre su vencimiento y la siguiente fecha valor en que se modificará tal saldo. A continuación se van calculando los números comerciales según los días correspondientes. Todo ello se muestra en el siguiente cuadro:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a
30/06	—	400	400	10	—	4.000
10/07	600	—	−200	36	7.200	—
15/08	—	250	50	13	—	650
28/08	720	—	−670	27	18.090	—
24/09	—	380	−290	6	1.740	—
Total	1.320	1.030	—	—	27.030	4.650

Para el cálculo de los intereses, en primer lugar se obtiene el divisor fijo:

$$D = \frac{360}{0{,}09} = 4.000$$

En segundo lugar se calculan los números comerciales de cada uno de los saldos. Así, del 30/06 al 10/07 van 10 días, en los cuales genera intereses el primer saldo acreedor de 400, siendo su número comercial de 400 × 10 = 4.000. El 10/07 hay un cargo, siendo el saldo resultante de −200 (deudor). Este saldo devenga intereses por los días hasta la siguiente modificación del mismo, generando un número comercial deudor de 200 × 36 = 7.200, y así sucesivamente. Finalmente, calculamos los intereses totales en función de la suma de números comerciales acreedores y deudores:

$$I_a = \frac{N_a}{D} = \frac{4.650}{4.000} = 1{,}16$$

© Ediciones Pirámide

$$I_d = \frac{N_d}{D} = \frac{27.030}{4.000} = 6{,}76$$

$$I_T = I_a - I_d = 1{,}16 - 6{,}76 = -5{,}60$$

Por tanto, el saldo resultante de la liquidación de la cuenta corriente a 30/09 es: $S = -290 - 5{,}60 = -295{,}60$ € (saldo deudor).

16.3. CUENTAS CORRIENTES BANCARIAS

Tal y como hemos señalado, las cuentas corrientes bancarias se caracterizan porque una de las partes intervinientes es una entidad de depósito. Dicha entidad abre una cuenta al cliente, el cual realiza un primer ingreso, y posteriormente se van produciendo distintas operaciones. En este sentido hemos de recordar que las entregas o cantidades a favor del cliente o titular de la cuenta se anotan en el Haber (abonos en cuenta), y que las cuantías a su cargo o disposiciones se anotan en el Debe (cargos en cuenta). Por tanto, el sentido general del saldo es acreedor o a favor del cliente. No obstante, ambas partes pueden pactar determinados saldos deudores o descubiertos en cuenta (saldo a favor de la entidad de depósito).

En estas cuentas el interés es **no recíproco,** pactándose un tipo para los saldos a favor del cliente y otro para los descubiertos en cuenta. De acuerdo con la Circular 8/1990 del Banco de España, se utilizan los siguientes criterios de valoración a efectos del devengo de intereses:

a) Para los cargos en cuenta, en general, la fecha valor es la del mismo día de su pago.

b) Para los abonos en cuenta hemos de distinguir:

b.1) Entregas en efectivo realizadas antes de las 11 de la mañana, el día de su entrega. Las restantes, el día siguiente hábil.

b.2) Entregas mediante cheques a cargo de la propia entidad y transferencias bancarias procedentes de la misma entidad, el día de su entrega. Las restantes, el segundo día hábil.

EJERCICIO 16.5

Liquidar la siguiente cuenta corriente al 31/12, sabiendo que el tipo de interés acreedor es el 1% anual y el tipo de interés deudor es el 12% anual.

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber
05/10	—	800
15/10	—	300
20/10	1.200	—
28/10	—	1.500
15/11	400	—
30/11	—	250
20/12	60	—
24/12	300	—

Resolución

Para cada uno de los saldos que se vayan generando se han de calcular los números comerciales correspondientes, los cuales se recogen en la siguiente tabla:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a
05/10	—	800	800	10	—	8.000
15/10	—	300	1.100	5	—	5.500
20/10	1.200	—	−100	8	800	—
28/10	—	1.500	1.400	18	—	25.200
15/11	400	—	1.000	15	—	15.000
30/11	—	250	1.250	20	—	25.000
20/12	60	—	1.190	4	—	4.760
24/12	300	—	890	7	—	6.230
Total	1.960	2.850	—	—	800	89.690

Al existir dos tipos de interés, existirán dos divisores fijos, uno para los saldos acreedores D_a y otro para los saldos deudores D_d:

$$D_a = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}12} = 3.000$$

Por tanto, los intereses se calculan como la suma de números comerciales correspondientes, dividida entre el divisor fijo respectivo:

$$I_a = \frac{N_a}{D_a} = \frac{89.690}{36.000} = 2{,}49 \quad ; \quad I_d = \frac{N_d}{D_d} = \frac{800}{3.000} = 0{,}27$$

Finalmente, el saldo es:

$$S = (C_a - C_d) + (I_a - I_d) = 890 + 2{,}49 - 0{,}27 = 892{,}22\ €$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 16.6

Liquidar la siguiente cuenta corriente al 31/12 utilizando números comerciales truncados, sabiendo que el tipo de interés a aplicar es del 1,2% anual para los saldos acreedores y del 18% anual para los saldos deudores.

Fecha valor	Debe	Haber
01/10	—	4.000
16/10	—	2.000
31/10	5.000	—
10/11	3.000	—
25/11	—	600
15/12	—	3.000
20/12	1.000	—
24/12	—	400

Resolución

Inicialmente, hemos de calcular las sumas de números comerciales deudores y acreedores, así como el saldo de capitales. Como vamos a utilizar números comerciales truncados, la multiplicación del número de días por el saldo se ha de dividir por 100. Todo ello se muestra en el siguiente cuadro:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a
01/10	—	4.000	4.000	15	—	600
16/10	—	2.000	6.000	15	—	900
31/10	5.000	—	1.000	10	—	100
10/11	3.000	—	−2.000	15	300	—
25/11	—	600	−1.400	20	280	—
15/12	—	3.000	1.600	5	—	80
20/12	1.000	—	600	4	—	24
24/12	—	400	1.000	7	—	70
Total	9.000	10.000	—	—	580	1.774

Al ser los números comerciales truncados, los divisores fijos se calculan de la siguiente forma:

$$D_a = \frac{360}{0{,}012 \times 100} = 300 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}18 \times 100} = 20$$

© Ediciones Pirámide

Las cuantías de intereses son:

$$I_a = \frac{N_a}{D_a} = \frac{1.774}{300} = 5{,}91 \quad ; \quad I_d = \frac{N_d}{D_d} = \frac{580}{20} = 29$$

Por tanto, el saldo resultante de la liquidación es el siguiente:

$$S = (C_a - C_d) + (I_a - I_d) = 1.000 + 5{,}91 - 29 = 976{,}91 \text{ €}$$

16.4. CUENTAS DE CRÉDITO

Las cuentas corrientes de crédito son operaciones activas realizadas por las entidades de depósito por las que se ponen capitales a disposición del cliente hasta un límite máximo fijado en el contrato. Su principal diferencia respecto al préstamo consiste en que los intereses se pagan por el capital dispuesto y no por el capital concedido.

Estas operaciones se formalizan mediante un contrato en el que quedan expresadas todas las condiciones de las mismas: importe máximo, plazo, intereses, etc., y suelen ser intervenidas por Notario. Para su instrumentalización práctica, la entidad abre una cuenta corriente de crédito al cliente donde se cargan o abonan las transacciones que se van efectuando, así como los intereses y comisiones establecidas, pudiendo ser cancelada en la fecha fijada en el contrato o bien renovada en las condiciones que estipulen las partes.

En estas cuentas, en el Debe se anotan las cuantías dispuestas por el cliente, así como aquellas cobradas por la entidad (comisiones, etc.), mientras que en el Haber se anotan las entregas efectuadas y los capitales a favor del titular.

De forma análoga a las cuentas corrientes de depósito, normalmente se consideran las cuantías del Debe con signo negativo, y las del Haber con signo positivo, por lo que el sentido normal del saldo (cuantías del Haber menos cuantías del Debe) es negativo o deudor.

Para el cálculo de la liquidación de intereses tenemos que distinguir entre los tres posibles tipos de saldo, ya que a cada uno de éstos se le aplica un tipo de interés distinto:

— **Saldo deudor:** es el sentido normal del saldo de capitales, comprendido, en valor absoluto, entre cero y el límite máximo de crédito permitido al cliente.

— **Saldo excedido sobre el límite:** saldo deudor de capitales que supera, en valor absoluto, el límite máximo de la cuenta. Es decir, es la parte que su-

© Ediciones Pirámide

pera al tope pactado[4]. Lógicamente, el tipo de interés que se aplica a los saldos excedidos del límite es superior al aplicado a los saldos deudores.

— **Saldo acreedor:** saldo a favor del cliente por ingresos realizados en la cuenta de crédito. El tipo de interés suele coincidir con el pactado en las cuentas corrientes bancarias.

Las principales comisiones a cargo del titular son: comisión de apertura y estudio, la cual se devenga en el momento de la formalización, cargándose automáticamente en la cuenta; comisión de disponibilidad, que se calcula en función del saldo puesto a disposición del cliente y no utilizado (saldo medio no dispuesto); comisión por reclamación de excedido o rebasamiento**,** que se calcula sobre el saldo excedido; comisión por cancelación anticipada; gastos por la intervención de Notario e Impuesto sobre actos jurídicos documentados. Tanto la comisión de disponibilidad como la de reclamación de excedido tienen como fecha valor la de liquidación de la cuenta.

En cuanto a la liquidación de las cuentas de crédito, generalmente se utiliza el método hamburgués, siendo la operativa idéntica a la estudiada en las cuentas corrientes a intereses no recíprocos, con la diferencia de utilizar tres tipos de interés en lugar de dos.

El saldo medio no dispuesto se determina por diferencia entre el límite de la cuenta y el saldo medio dispuesto. Para calcular éste se pueden considerar todas las cuantías dispuestas, incluso las que superen el límite del crédito, o bien sólo las que no lo superen. En cualquier caso, en el contrato correspondiente a la cuenta de crédito debe quedar estipulado el criterio a seguir. En los ejercicios siguientes hemos optado por el primer criterio expuesto.

EJERCICIO 16.7

Calcular el saldo resultante de la liquidación de la siguiente cuenta de crédito a 31 de diciembre. Dicha cuenta presenta un límite de 6.000 euros, y la duración es de un año y medio con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 30 de septiembre y los tipos de interés anuales son los siguientes: 1% para los saldos acreedores, 12% para los saldos deudores y 24% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 10% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 1% del límite por la apertura de la cuenta y del 4% por disponibilidad. Además, si se producen rebasamientos del límite de la cuenta, se devengará una comisión del 2%. Los honorarios del Notario ascienden al 0,25% del límite de la cuenta. Los movimientos por parte del cliente durante el trimestre fueron los siguientes:

[4] Aunque las entidades han fijado previamente un límite a la cuenta de crédito, es habitual que permitan a los clientes sobrepasar dicho límite en un determinado porcentaje.

© Ediciones Pirámide

Fecha Valor	Debe	Haber
05/10	3.500	—
15/10	—	4.000
30/10	5.000	—
15/11	1.800	—
30/11	—	800
20/12	—	700

Resolución

En primer lugar hemos de calcular las cuantías correspondientes a la comisión de apertura y gastos de Notario, las cuales son de 60 € y 15 €, respectivamente. Dichas cantidades figuran como cargos con fecha valor la correspondiente a la contratación de la cuenta de crédito.

Con respecto a la liquidación, el procedimiento es similar al de las cuentas corrientes, con la excepción de que en las cuentas de crédito, además de existir un divisor fijo para los saldos acreedores D_a, y otro para los saldos deudores D_d, existe otro divisor fijo para los saldos excedidos sobre el límite D_e. Los valores son:

$$D_a = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}12} = 3.000 \quad ; \quad D_e = \frac{360}{0{,}24} = 1.500$$

La liquidación de la cuenta de crédito se refleja a continuación:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a	N_e
30/09	60	—	−60	0	0	—	—
30/09	15	—	−75	5	375	—	—
05/10	3.500	—	−3.575	10	35.750	—	—
15/10	—	4.000	425	15	—	6.375	—
30/10	5.000	—	−4.575	16	73.200	—	—
15/11	1.800	—	−6.375	15	90.000	—	5.625
30/11	—	800	−5.575	20	111.500	—	—
20/12	—	700	−4.875	11	53.625	—	—
Total	10.375	5.500	—	92	364.450	6.375	5.625

Es de destacar en esta liquidación que, tras cargar en la cuenta el 15/11 un importe de 1.800 €, el saldo deudor de capitales se situó en 6.375 €. Como el límite de la misma es 6.000 €, se producen números comerciales deudores hasta el límite de la cuenta (6.000 × 15) y números de excedido, N_e, por la diferencia entre el saldo de la cuenta en ese momento y el límite de la misma [(6.375 − 6.000) × 15].

© Ediciones Pirámide

Además, el hecho de sobrepasar el límite de la cuenta hace que en la fecha de cierre se devengue la comisión de rebasamiento, la cual es del 2% de la cuantía excedida:

$$C_r = 0{,}02 \times 375 = 7{,}50$$

En cuanto a la comisión de disponibilidad, hemos de calcular el saldo medio no dispuesto S_{nd}, el cual es igual al límite de la cuenta menos el saldo medio dispuesto S_d. Este último se puede calcular utilizando los números comerciales correspondientes a la liquidación de la cuenta. En este sentido, al ser el saldo medio dispuesto una media aritmética ponderada por el tiempo de los diferentes saldos deudores de la cuenta, incluso los que superen el límite de la misma[5], se puede calcular como el cociente entre la suma de números comerciales deudores y excedidos, y el número n de días correspondientes al período de liquidación:

$$S_d = \frac{N_d + N_e}{n} = \frac{364.450 + 5.625}{92} = 4.022{,}55$$

Por tanto, el saldo medio no dispuesto es el límite de la cuenta L menos el saldo medio dispuesto:

$$S_{nd} = L - S_d = 6.000 - 4.022{,}55 = 1.977{,}45$$

siendo la comisión de disponibilidad el 4% de dicha cuantía:

$$C_{disp} = 0{,}04 \times 1.977{,}45 = 79{,}10$$

Seguidamente, calculamos los intereses de la cuenta, utilizando para ello los tres tipos de divisores fijos:

$$I_a = \frac{6.375}{36.000} = 0{,}18 \quad ; \quad I_d = \frac{364.450}{3.000} = 121{,}48 \quad ; \quad I_e = \frac{5.625}{1.500} = 3{,}75$$

Finalmente, el saldo resultante de la liquidación es:

$$S = -4.875 + 0{,}18 - 121{,}48 - 3{,}75 - 7{,}5 - 79{,}10 = -5.086{,}65\ €$$

La cuantía anterior es el saldo deudor con fecha valor 31/12 y constituye el saldo inicial para el siguiente período de liquidación.

[5] No obstante, tal y como hemos señalado, algunas entidades no consideran los números excedidos para el cálculo del saldo medio dispuesto, utilizando únicamente los números deudores.

© Ediciones Pirámide

Observación

Si no consideramos como disposiciones las cuantías excedidas sobre el límite de la cuenta, tenemos:

$$S_d = \frac{N_d}{n} = \frac{364.450}{92} = 3.961,41$$

$$S_{nd} = 6.000 - 3.961,41 = 2.038,59$$

La comisión de disponibilidad es:

$$C_{disp} = 0,04 \times 2.038,59 = 81,54$$

Los intereses no se alteran y el saldo final es:

$$S = -4.875 + 0,18 - 121,48 - 3,75 - 7,5 - 81,54 = -5.089,09 \text{ €}$$

EJERCICIO 16.8

Determinar el saldo resultante de la liquidación de la siguiente cuenta de crédito a 30 de junio. El límite de la misma es 9.000 euros, y la duración es de un año con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 31 de marzo y los tipos de interés anuales son los siguientes: 1% para los saldos acreedores, 8% para los saldos deudores y 12% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 10% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son: el 2% del límite por la apertura de la cuenta, el 3% por disponibilidad y el 5% por rebasamiento. Los honorarios del Notario ascienden al 3% del límite de la cuenta. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

Fecha valor	Debe	Haber
20/04	—	1.250
02/05	5.500	—
07/05	3.250	—
21/05	1.500	—
20/06	—	2.250
23/06	—	3.100

Resolución

En primer lugar hemos de calcular las cuantías de cargo iniciales, las cuales corresponden a la comisión de apertura (180 €) y gastos de Notario (270 €).

© Ediciones Pirámide

Los valores de los tres divisores fijos son:

$$D_a = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}08} = 4.500 \quad ; \quad D_e = \frac{360}{0{,}12} = 3.000$$

La liquidación de la cuenta de crédito se refleja a continuación:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a	N_e
31/03	180	—	−180	0	—	—	—
31/03	270	—	−450	20	9.000	—	—
20/04	—	1.250	800	12	—	9.600	—
02/05	5.500	—	−4.700	5	23.500	—	—
07/05	3.250	—	−7.950	14	111.300	—	—
21/05	1.500	—	−9.450	30	270.000	—	13.500
20/06	—	2.250	−7.200	3	21.600	—	—
23/06	—	3.100	−4.100	7	28.700	—	—
Total	10.700	6.600	—	91	464.100	9.600	13.500

El 21/05 el saldo de capitales fue de −9.450 €, generándose por tanto números comerciales deudores (9.000 × 30 = 270.000) y números de excedido (450 × 30 = = 13.500). Además, este hecho hace que se devengue la comisión de rebasamiento, la cual es del 5% de la cuantía excedida:

$$C_r = 0{,}05 \times 450 = 22{,}50$$

El saldo medio dispuesto es:

$$S_d = \frac{N_d + N_e}{n} = \frac{464.100 + 13.500}{91} = 5.248{,}35$$

Por tanto, el saldo medio no dispuesto es el límite de la cuenta L menos el saldo medio dispuesto:

$$S_{nd} = L - S_d = 9.000 - 5.248{,}35 = 3.751{,}65$$

siendo la comisión de disponibilidad el 3% de dicha cuantía:

$$C_{disp} = 0{,}03 \times 3.751{,}65 = 112{,}55$$

© Ediciones Pirámide

Seguidamente calculamos los intereses de la cuenta, utilizando para ello los tres tipos de divisores fijos:

$$I_a = \frac{9.600}{36.000} = 0{,}27 \quad ; \quad I_d = \frac{464.100}{4.500} = 103{,}13 \quad ; \quad I_e = \frac{13.500}{3.000} = 4{,}50$$

Finalmente, el saldo resultante de la liquidación es deudor:

$$S = -4.100 + 0{,}27 - 103{,}13 - 4{,}50 - 112{,}55 - 22{,}5 = -4.342{,}41 \text{ €}$$

16.5. CÁLCULO DE LOS TANTOS EFECTIVOS

16.5.1. Cálculo de los tantos efectivos activo y pasivo

Sabemos que algunos datos importantes a conocer en cualquier operación financiera son el tipo de coste y el de rendimiento que genere la misma. Para ello, cada sujeto de la operación ha de plantear la ecuación de equivalencia financiera entre los capitales realmente recibidos y los realmente entregados, de la cual se deduce el correspondiente tipo de interés efectivo.

No obstante, no hemos de olvidarnos que, para realizar el cálculo del tanto efectivo, es necesario que la operación financiera haya llegado a su final, por lo que hemos de tener en cuenta también el saldo resultante en el final de la misma. En este sentido, si dicho saldo es a favor del cliente, lo cual es lo normal en las cuentas corrientes bancarias, constituye un capital que pertenece a la contraprestación real recibida por éste. En cambio, si el saldo es deudor o a favor de la entidad, éste constituye un capital de la prestación real entregada por el cliente. Lo anterior es así, pues si el saldo es acreedor, para cancelar la cuenta el cliente dispone de dicho saldo mediante su cargo en cuenta. En cambio, si fuese deudor, el cliente deberá entregarlo, abonándolo en cuenta[6]. Igualmente, en las cuentas corrientes de crédito, el saldo resultante de cualquier liquidación suele ser a favor de la entidad o saldo deudor, integrándose, a efectos del cálculo del tanto efectivo, en la contraprestación real entregada por el cliente.

EJERCICIO 16.9

Calcular el tipo efectivo anual de rentabilidad para el cliente de la siguiente cuenta corriente al 31/12, sabiendo que el tipo de interés acreedor es el 1% anual y el tipo de interés deudor es el 9% anual.

[6] Idénticas operaciones se han de realizar si se desea calcular el tanto efectivo en una fecha anterior a la de cancelación de la cuenta, considerando en tal caso el saldo financiero correspondiente en dicha fecha.

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber
11/10	—	1.200
20/10	—	1.500
26/10	3.000	—
05/11	—	1.250
20/11	800	—
30/11	—	300
15/12	150	—
24/12	—	100

Resolución

Inicialmente hemos de calcular el saldo resultante de la liquidación de la cuenta, recogiéndose en la siguiente tabla los números comerciales correspondientes:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a
11/10	—	1.200	1.200	9	—	10.800
20/10	—	1.500	2.700	6	—	16.200
26/10	3.000	—	−300	10	3.000	—
05/11	—	1.250	950	15	—	14.250
20/11	800	—	150	10	—	1.500
30/11	—	300	450	15	—	6.750
15/12	150	—	300	9	—	2.700
24/12	—	100	400	7	—	2.800
Total	3.950	4.350	—	81	3.000	55.000

Al tener dos tipos de interés, existen dos divisores fijos, uno para los saldos acreedores D_a y otro para los saldos deudores D_d:

$$D_a = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}09} = 4.000$$

Por tanto, los intereses son:

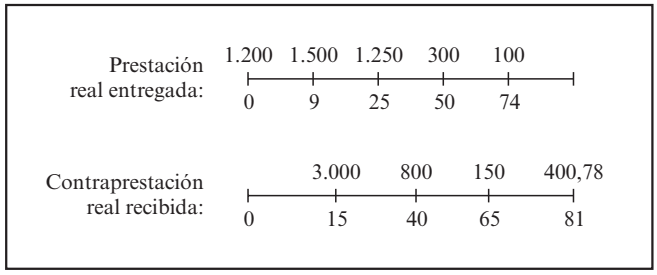
$$I_a = \frac{N_a}{D_a} = \frac{55.000}{36.000} = 1{,}53 \quad ; \quad I_d = \frac{N_d}{D_d} = \frac{3.000}{4.000} = 0{,}75$$

Finalmente, el saldo es:

$$S = (C_a - C_d) + (I_a - I_d) = 4.350 - 3.950 + 1{,}53 - 0{,}75 = 400{,}78$$

© Ediciones Pirámide

Al ser un saldo acreedor, para determinar el tanto efectivo activo, forma parte de la contraprestación real recibida. El siguiente gráfico muestra toda la operación:



Por tanto, el tipo efectivo de rendimiento es del 0,5486% anual[7], el cual se calcula mediante la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$1.200 + 1.500(1 + i_a)^{-\frac{9}{365}} + 1.250(1 + i_a)^{-\frac{25}{365}} + 300(1 + i_a)^{-\frac{50}{365}} + 100(1 + i_a)^{-\frac{74}{365}} =$$
$$= 3.000(1 + i_a)^{-\frac{15}{365}} + 800(1 + i_a)^{-\frac{40}{365}} + 150(1 + i_a)^{-\frac{65}{365}} + 400{,}78(1 + i_a)^{-\frac{81}{365}}$$

EJERCICIO 16.10

Determinar el tipo efectivo pasivo anual resultante de la liquidación trimestral de la siguiente cuenta de crédito a 30 de septiembre. Dicha cuenta presenta un límite de 10.000 euros y la duración es de un año. La cuenta se abre el 30 de junio y los tipos de interés anuales son los siguientes: 2% para los saldos acreedores, 9% para los saldos deudores y 24% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 5% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 1,5% a la apertura de la cuenta, siendo los gastos de notaría de 210 euros. Además, se sabe que las comisiones de disponibilidad y de rebasamiento fueron del 2% y del 5% respectivamente. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

Fecha valor	Debe	Haber
02/07	4.000	—
20/07	—	7.500
10/08	2.750	—
18/08	8.000	—
04/09	2.500	—
15/09	—	4.500

[7] Hemos utilizado el criterio Real/365, que es el implementado en la hoja de cálculo Excel.

© Ediciones Pirámide

Resolución

En primer lugar hemos de liquidar la cuenta corriente de crédito, la cual se refleja a continuación:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a	N_e
30/06	150	—	−150	0	—	—	—
30/06	210	—	−360	2	720	—	—
02/07	4.000	—	−4.360	18	78.480	—	—
20/07	—	7.500	3.140	21	—	65.940	—
10/08	2.750	—	390	8	—	3.120	—
18/08	8.000	—	−7.610	17	129.370	—	—
04/09	2.500	—	−10.110	11	110.000	—	1.210
15/09	—	4.500	−5.610	15	84.150	—	—
Total	17.610	12.000	—	92	402.720	69.060	1.210

En cuanto a los divisores fijos, éstos son los siguientes:

$$D_a = \frac{360}{0{,}02} = 18.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}09} = 4.000 \quad ; \quad D_e = \frac{360}{0{,}24} = 1.500$$

Por lo que los intereses de la cuenta son:

$$I_a = \frac{69.060}{18.000} = 3{,}84 \quad ; \quad I_d = \frac{402.720}{4.000} = 100{,}68 \quad ; \quad I_e = \frac{1.210}{1.500} = 0{,}81$$

Por otra parte, el hecho de sobrepasarse el límite de la cuenta hace que en la fecha de cierre se devengue la comisión de rebasamiento, la cual será del 5% de la cuantía excedida:

$$C_r = 0{,}05 \times 110 = 5{,}50$$

En cuanto a la comisión de disponibilidad, hemos de calcular el saldo medio no dispuesto S_{nd}. En este sentido, el saldo medio dispuesto S_d es:

$$S_d = \frac{N_d + N_e}{n} = \frac{402.720 + 1.210}{92} = 4.390{,}54$$

Por tanto, el saldo medio no dispuesto es:

$$S_{nd} = L - S_d = 10.000 - 4.390{,}54 = 5.609{,}46$$

© Ediciones Pirámide

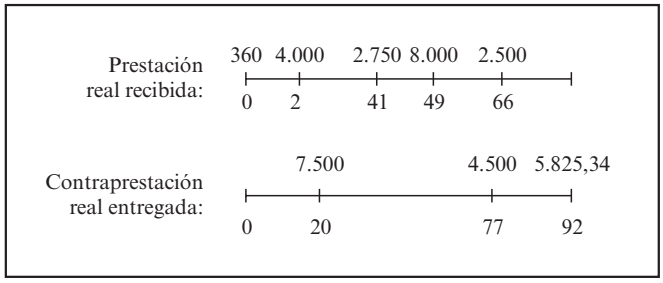
siendo la comisión de disponibilidad el 2% de dicha cuantía:

$$C_{disp} = 0{,}02 \times 5.609{,}46 = 112{,}19$$

Finalmente, el saldo resultante de la liquidación es:

$$S = -5.610 + 3{,}84 - 100{,}68 - 0{,}81 - 5{,}50 - 112{,}19 = -5.825{,}34$$

Para determinar el tipo efectivo pasivo anual del titular de la cuenta de crédito planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen, incluyendo todos los cargos y abonos del trimestre y el saldo deudor resultante de la liquidación, el cual forma parte de la contraprestación real entregada. El siguiente gráfico muestra toda la operación:



Por tanto, el tipo efectivo pasivo es el 25,9203% anual[8], el cual se calcula mediante la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$360 + 4.000(1 + i_p)^{-\frac{2}{365}} + 2.750(1 + i_p)^{-\frac{41}{365}} + 8.000(1 + i_p)^{-\frac{49}{365}} + 2.500(1 + i_p)^{-\frac{66}{365}} =$$
$$= 7.500(1 + i_p)^{-\frac{20}{365}} + 4.500(1 + i_p)^{-\frac{77}{365}} + 5.825{,}34(1 + i_p)^{-\frac{92}{365}}$$

16.5.2. Cálculo del TAE

Para las **cuentas corrientes bancarias de depósito,** la Circular 8/1990 del Banco de España dicta también instrucciones en cuanto al cálculo del tipo anual equivalente (TAE). Así, en la norma octava punto 5 se establecen las siguientes consideraciones:

[8] Al tratarse de un tipo efectivo, hemos utilizado el criterio Real/365, implementado en la hoja de cálculo Excel.

© Ediciones Pirámide

Los cálculos se realizarán con los importes brutos liquidados al cliente, sin tener en cuenta las retenciones por impuestos ni las ventajas fiscales que pudieran beneficiarle. No se incluirán los eventuales cargos por comisiones y gastos que puedan derivarse del servicio de caja. Además, cuando el tipo de interés acreedor sea igual o inferior al 2,50% nominal anual, se podrá tomar como TAE el propio nominal. Por ejemplo, en una cuenta corriente en la que el tipo de interés para los saldos acreedores es el 1% anual, el TAE será también el 1%. En cambio, si el tipo de interés nominal es superior al 2,50%, el TAE inicial será el tipo de interés efectivo correspondiente al tipo nominal de la cuenta. Por ejemplo, si el tipo de interés es el 3,60% anual con abono mensual de intereses, el TAE es del 3,66%. No obstante, algunas entidades financieras suelen tomar como TAE inicial el tipo efectivo anual correspondiente.

Por otra parte, el **cálculo del TAE en las cuentas de crédito** difiere sustancialmente del efectuado para las cuentas corrientes. En las cuentas de crédito es preciso determinar el TAE contractual y el correspondiente a cada liquidación. Así, de acuerdo con la Circular 8/1990 del Banco de España, en su norma octava punto 4.*c*, tenemos:

— Las comisiones de apertura y otros gastos iniciales se considerarán distribuidos a lo largo de la duración del contrato y aplicados sobre el límite del crédito, como si todo él hubiera sido dispuesto.
— No se tendrá en cuenta la comisión de disponibilidad a la hora de calcular el TAE.
— En la documentación contractual de estas operaciones, el coste efectivo a reflejar a efectos informativos se calculará bajo el supuesto de la disposición total del crédito.
— En la liquidación, los cálculos se efectuarán sobre saldos medios dispuestos, sin tener en consideración los cargos iniciales por comisiones y gastos.

EJERCICIO 16.11

Una cuenta de crédito se liquida el 30 de junio con un límite de 6.000 euros y una duración de un año y medio, con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 31 de marzo y los tipos de interés anuales son los siguientes: 0,5% para los saldos acreedores, 6% para los saldos deudores y 24% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 10% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 3% a la apertura de la cuenta, siendo los gastos de notaría de 65 euros. Además, se sabe que las comisiones de disponibilidad y de rebasamiento fueron del 5% y del 10%, respectivamente. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber
05/04	2.600	—
10/04	—	1.400
30/04	—	2.500
15/05	4.000	—
31/05	3.500	—
10/06	—	1.600

Efectuar la liquidación de la cuenta de crédito y determinar el TAE que ha de aparecer en el contrato, así como el resultante de la primera liquidación efectuada.

Resolución

En primer lugar hemos de liquidar la cuenta corriente de crédito, sabiendo que en dicha liquidación hemos de incluir los importes correspondientes a la comisión de apertura (180 €) y a los gastos de Notario. La liquidación de la cuenta de crédito se refleja a continuación:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a	N_e
31/03	180	—	−180	0	—	—	—
31/03	65	—	−245	5	1.225	—	—
05/04	2.600	—	−2.845	5	14.225	—	—
10/04	—	1.400	−1.445	20	28.900	—	—
30/04	—	2.500	1.055	15	—	15.825	—
15/05	4.000	—	−2.945	16	47.120	—	—
31/05	3.500	—	−6.445	10	60.000	—	4.450
10/06	—	1.600	−4.845	20	96.900	—	—
Total	10.345	5.500	—	91	248.370	15.825	4.450

En cuanto a los divisores fijos, éstos son los siguientes:

$$D_a = \frac{360}{0{,}005} = 72.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}06} = 6.000 \quad ; \quad D_e = \frac{360}{0{,}24} = 1.500$$

Por lo que los intereses de la cuenta serán:

$$I_a = \frac{15.825}{72.000} = 0{,}22 \quad ; \quad I_d = \frac{248.370}{6.000} = 41{,}40 \quad ; \quad I_e = \frac{4.450}{1.500} = 2{,}97$$

© Ediciones Pirámide

Por otra parte, al sobrepasarse el límite de la cuenta, hace que en la fecha de cierre se devengue la comisión de rebasamiento, la cual será del 10% de la cuantía excedida:

$$C_r = 0{,}10 \times 445 = 44{,}50$$

En cuanto a la comisión de disponibilidad, hemos de calcular el saldo medio no dispuesto S_{nd}. En este sentido, el saldo medio dispuesto S_d es:

$$S_d = \frac{N_d + N_e}{n} = \frac{248.370 + 4.450}{91} = 2.778{,}24$$

Por tanto, para el saldo medio no dispuesto se tiene:

$$S_{nd} = L - S_d = 6.000 - 2.778{,}24 = 3.221{,}76$$

siendo la comisión de disponibilidad el 5% de dicha cuantía:

$$C_{disp} = 0{,}05 \times 3.221{,}76 = 161{,}09$$

Finalmente, el saldo resultante de la liquidación es:

$$S = -4.845 + 0{,}22 - 41{,}40 - 2{,}97 - 44{,}50 - 161{,}09 = -5.094{,}74$$

Para determinar el TAE que ha de aparecer en el contrato de la cuenta de crédito, hemos de seguir la Norma 8.ª de la Circular 8/1990 del Banco de España. En concreto, dicha norma nos dice que las comisiones de apertura y otros gastos iniciales se considerarán distribuidos a lo largo de la duración del contrato y aplicados sobre el límite del crédito como si todo él hubiera sido dispuesto. Los gastos de notaría no se incluyen a efectos del cálculo del TAE, ya que se abonan a terceros, por lo que la única comisión que hemos de distribuir en este ejercicio es la de apertura. Además, es de destacar que la citada norma no señala manera alguna de realizar dicha distribución, por lo que hemos optado por distribuirla de forma financiera[9], utilizando para ello el tipo de interés deudor de la cuenta, el cual es del 1,5% trimestral.

$$180 = C \times a_{\overline{6}|1{,}5\%} \quad \Rightarrow \quad C = 31{,}59$$

[9] Al no especificar la Norma cómo se ha de realizar el reparto, también se puede utilizar el criterio lineal, dividiendo la cuantía correspondiente entre el número de liquidaciones durante la vida del contrato. Así, tendríamos una cuantía trimestral de 180/6 = 30.

© Ediciones Pirámide

Dado que la citada Norma también indica que en la documentación contractual de estas operaciones el coste efectivo a reflejar a efectos informativos se calculará bajo el supuesto de la disposición total del crédito, el cálculo de dicho tipo de interés se realizará suponiendo que el cliente dispone de los 6.000 euros desde el momento inicial de la operación. Por tanto, los intereses deudores que tendría que abonar durante cada trimestre al 6% anual son los siguientes:

$$I = 6.000 \times 0{,}06\frac{1}{4} = 90$$

En consecuencia, para el cálculo del TAE inicial la operación supone para el cliente percibir al inicio de la misma una cuantía de 6.000 €, debiendo abonar al final de cada trimestre una cuantía constante, suma de los intereses (90 €) y la parte correspondiente de la comisión de apertura (31,59 €), así como un pago al final del año y medio de cuantía 6.000 €. El tipo de interés trimestral que verifica la ecuación de equivalencia financiera es el 2,0265%, deducido de:

$$6.000 = (90 + 31{,}59) \times a_{\overline{6}|i_{TAE}^{(m)}} + 6.000(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-6}$$

Dado que el valor del TAE ha de estar expresado con periodicidad anual, dicho valor es el siguiente:

$$i_{TAE} = (1 + 0{,}020265)^4 - 1 = 8{,}36\%$$

Una forma más sencilla de llegar a idénticos resultados es considerar que la operación se cancela en un trimestre, por lo que tenemos:

$$6.000(1 + i_{TAE}^{(m)}) = 6.000 + 90 + 31{,}59 \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 2{,}0265\%$$

$$i_{TAE} = (1 + i_{TAE}^{(m)})^4 - 1 = 8{,}36\%$$

Finalmente, para determinar el TAE resultante de la primera liquidación efectuada, tal y como se recoge en la Norma 8.ª, no se tienen en cuenta los cargos iniciales por comisiones y gastos. Un método sencillo de cálculo para la determinación del saldo medio dispuesto del TAE es considerar el saldo medio dispuesto calculado anteriormente, menos los 245 euros correspondientes a comisiones iniciales:

$$S_{d(T)} = 2.778{,}24 - 245 = 2.533{,}24$$

Por otra parte, los intereses totales que se han pagado son:

$$I = 41{,}40 + 2{,}97 = 44{,}37$$

© Ediciones Pirámide

con lo que el tipo de interés trimestral de la primera liquidación es:

$$i_{TAE}^{(m)} = \frac{44{,}37}{2.533{,}24} = 1{,}7515\%$$

Por tanto, el TAE resultante de esta liquidación es el tipo de interés equivalente al tipo trimestral calculado anteriormente:

$$i_{TAE} = (1 + 0{,}017515)^4 - 1 = 7{,}19\%$$

16.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el saldo por el método directo, con un tipo de interés recíproco del 4% anual, sabiendo que los capitales de una cuenta corriente son los siguientes:

Debe	Haber	Días
—	300	60
—	400	30
650	—	10

Resolución

En primer lugar calculamos el divisor fijo:

$$D = \frac{360}{0{,}04} = 9.000$$

Posteriormente calculamos los números comerciales acreedores y deudores:

Debe	Haber	Días	N_d	N_a
—	300	60	—	18.000
—	400	30	—	12.000
650	—	10	6.500	—
650	700	—	6.500	30.000

El saldo de números es 30.000 − 6.500 = 23.500 (acreedor). Por tanto, los intereses netos son acreedores y ascienden a:

$$I = I_a - I_d = \frac{23.500}{9.000} = 2{,}61$$

© Ediciones Pirámide

El saldo de capitales es 700 − 650 = 50 (acreedor). Por consiguiente, el saldo de la cuenta es 50 + 2,61 = 52,61 € (acreedor).

2. Liquidar la siguiente cuenta corriente al 31/12, sabiendo que el tipo de interés acreedor es el 2% anual y el tipo de interés deudor es el 15% anual.

Fecha valor	Debe	Haber
06/10	—	1.200
21/10	850	—
05/11	750	—
20/11	—	100
24/11	—	475
10/12	—	1.000
14/12	350	—
28/12	—	200

Resolución

Al tener dos tipos de interés, existen dos divisores fijos, uno para los saldos acreedores D_a y otro para los saldos deudores D_d:

$$D_a = \frac{360}{0{,}02} = 18.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}15} = 2.400$$

Seguidamente, calculamos los números comerciales:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a
06/10	—	1.200	1.200	15	0	18.000
21/10	850	—	350	15	0	5.250
05/11	750	—	−400	15	6.000	0
20/11	—	100	−300	4	1.200	0
24/11	—	475	175	16	0	2.800
10/12	—	1.000	1.175	4	0	4.700
14/12	350	—	825	14	0	11.550
28/12	—	200	1.025	3	0	3.075
Total	1.950	2.975	—	—	7.200	45.375

Por tanto, los intereses son:

$$I_a = \frac{N_a}{D_a} = \frac{45.375}{18.000} = 2{,}52 \quad ; \quad I_d = \frac{N_d}{D_d} = \frac{7.200}{2.400} = 3{,}00$$

© Ediciones Pirámide

Finalmente, el saldo acreedor es:

$$S = (C_a - C_d) + (I_a - I_d) = 2.975 - 1.950 + 2{,}52 - 3{,}00 = 1.024{,}52 \text{ €}$$

3. Calcular el tipo efectivo activo de la siguiente cuenta corriente bancaria con fecha de liquidación el 31/12, sabiendo que el tipo de interés acreedor es el 3% anual y el tipo de interés deudor es el 9% anual.

Fecha valor	Debe	Haber
01/10	—	600
17/10	—	200
21/10	350	—
05/11	—	150
10/11	500	—
15/12	275	—
23/12	—	600
28/12	—	520

Resolución

Al tratarse de una cuenta con interés no recíproco, utilizamos el método hamburgués. Los divisores fijos son:

$$D_a = \frac{360}{0{,}03} = 12.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}09} = 4.000$$

En cuanto a los números comerciales, sus valores se desprenden de la siguiente tabla:

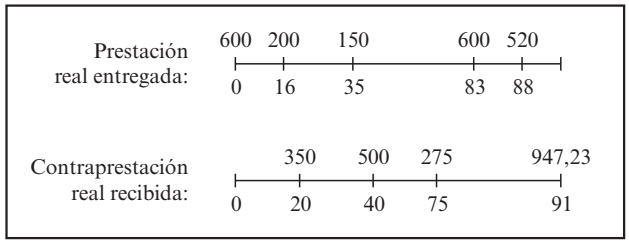
Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a
01/10	—	600	600	16	—	9.600
17/10	—	200	800	4	—	3.200
21/10	350	—	450	15	—	6.750
05/11	—	150	600	5	—	3.000
10/11	500	—	100	35	—	3.500
15/12	275	—	−175	8	1.400	—
23/12	—	600	425	5	—	2.125
28/12	—	520	945	3	—	2.835
Total	1.125	2.070	—	91	1.400	31.010

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el saldo es:

$$S = (C_a - C_d) + (I_a - I_d) = 2.070 - 1.125 + \frac{31.010}{12.000} - \frac{1.400}{4.000} = 947{,}23$$

Se trata de un saldo acreedor que, para determinar el tanto efectivo activo, forma parte de la contraprestación real recibida. El siguiente gráfico muestra toda la operación:



Por tanto, el tipo efectivo de rendimiento es del 2,775% anual, el cual se deduce de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$600 + 200(1 + i_a)^{-\frac{16}{365}} + 150(1 + i_a)^{-\frac{35}{365}} + 600(1 + i_a)^{-\frac{83}{365}} + 520(1 + i_a)^{-\frac{88}{365}} =$$
$$= 350(1 + i_a)^{-\frac{20}{365}} + 500(1 + i_a)^{-\frac{40}{365}} + 275(1 + i_a)^{-\frac{75}{365}} + 947{,}23(1 + i_a)^{-\frac{91}{365}}$$

4. Calcular el tanto efectivo pasivo anual resultante de la liquidación de la liquidación de la siguiente cuenta de crédito. Dicha cuenta presenta un límite de 5.000 euros, y la duración es de un año y medio con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 31 de marzo y los tipos de interés anuales son los siguientes: 1% para los saldos acreedores, 9% para los saldos deudores y 24% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 10% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 1,5% a la apertura de la cuenta y también del 2% de disponibilidad. Además, si se producen rebasamientos del límite de la cuenta, se abonará una comisión del 4%. Los gastos de Notario son del 0,5% del límite de la cuenta. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

Fecha valor	Debe	Haber
15/04	1.200	—
22/04	—	550
28/04	—	1.000
20/05	3.200	—
31/05	2.400	—
19/06	—	800

© Ediciones Pirámide

Resolución

Las cantidades correspondientes a la comisión de apertura y gastos de Notario figurarán como cargos el 31 de marzo, ascendiendo a 75 € y 25 €, respectivamente. Con respecto a la liquidación de la cuenta, los divisores fijos son los siguientes:

$$D_a = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}09} = 4.000 \quad ; \quad D_e = \frac{360}{0{,}24} = 1.500$$

La liquidación de la cuenta de crédito se refleja a continuación:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a	N_e
31/03	75	—	−75	0	—	—	—
31/03	25	—	−100	15	1.500	—	—
15/04	1.200	—	−1.300	7	9.100	—	—
22/04	—	550	−750	6	4.500	—	—
28/04	—	1.000	250	22		5.500	—
20/05	3.200	—	−2.950	11	32.450	—	—
31/05	2.400	—	−5.350	19	95.000	—	6.650
19/06	—	800	—4.550	11	50.050	—	—
Total	6.900	2.350	—	91	192.600	5.500	6.650

Al sobrepasarse el límite de la cuenta, en la fecha de cierre se devenga la comisión de rebasamiento:

$$C_r = 0{,}04 \times 350 = 14{,}00$$

En cuanto a la comisión de disponibilidad, hemos de calcular previamente el saldo medio dispuesto:

$$S_d = \frac{192.600 + 6.650}{91} = 2.189{,}56$$

Por tanto, el saldo medio no dispuesto es:

$$S_{nd} = L - S_d = 5.000 - 2.189{,}56 = 2.810{,}44$$

siendo la comisión de disponibilidad el 2% de dicha cuantía:

$$C_{disp} = 0{,}02 \times 2.810{,}44 = 56{,}21$$

© Ediciones Pirámide

Por otra parte, los intereses de la cuenta son:

$$I_a = \frac{5.500}{36.000} = 0{,}15 \quad ; \quad I_d = \frac{192.600}{4.000} = 48{,}15 \quad ; \quad I_e = \frac{6.650}{1.500} = 4{,}43$$

Finalmente, el saldo resultante de la liquidación es:

$$S = -4.550 + 0{,}15 - 48{,}15 - 4{,}43 - 14 - 56{,}21 = -4.672{,}64 \text{ €}$$

Para determinar el tipo efectivo pasivo del titular de la cuenta de crédito, hemos planteado la ecuación de equivalencia financiera en el origen, incluyendo todos los cargos y abonos del trimestre y el saldo deudor resultante de la liquidación, el cual forma parte de la contraprestación real entregada, siendo dicho tipo efectivo del 25,5886% anual:

$$100 + 1.200(1 + i_p)^{-\frac{15}{365}} + 3.200(1 + i_p)^{-\frac{50}{365}} + 2.400(1 + i_p)^{-\frac{61}{365}} =$$
$$= 550(1 + i_p)^{-\frac{22}{365}} + 1.000(1 + i_p)^{-\frac{28}{365}} + 800(1 + i_p)^{-\frac{80}{365}} + 4.672{,}64(1 + i_p)^{-\frac{91}{365}}$$

5. Efectuar la liquidación de la cuenta de crédito a 30 de septiembre y determinar el TAE que ha de aparecer en el contrato, así como el resultante de la primera liquidación efectuada. Dicha cuenta presenta un límite de 10.000 euros, y la duración es de un año y medio, con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 30 de junio y los tipos de interés anuales son los siguientes: 1% para los saldos acreedores, 5% para los saldos deudores y 20% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 10% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 1,5% a la apertura de la cuenta, siendo los gastos de Notario de 50 euros. Además, se sabe que las comisiones de disponibilidad y de rebasamiento fueron del 5% y del 6%, respectivamente. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

Fecha valor	Debe	Haber
02/07	—	350
16/07	—	200
10/08	4.500	—
25/08	3.000	—
01/09	3.750	—
20/09	—	6.000

Resolución

El cálculo de los números comerciales se recoge en la siguiente tabla:

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_a	N_e
30/06	150	—	−150	0	—	—	—
30/06	50	—	−200	2	400	—	—
02/07	—	350	150	14	—	2.100	—
16/07	—	200	350	25	—	8.750	—
10/08	4.500	—	−4.150	15	62.250	—	—
25/08	3.000	—	−7.150	7	50.050	—	—
01/09	3.750	—	−10.900	19	190.000	—	17.100
20/09	—	6.000	−4.900	10	49.000	—	—
Total	11.450	6.550	—	92	351.700	10.850	17.100

Los divisores fijos son los siguientes:

$$D_a = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \quad ; \quad D_d = \frac{360}{0{,}05} = 7.200 \quad ; \quad D_e = \frac{360}{0{,}20} = 1.800$$

Por lo que los intereses de la cuenta son:

$$I_a = \frac{10.850}{36.000} = 0{,}30 \quad ; \quad I_d = \frac{351.700}{7.200} = 48{,}85 \quad ; \quad I_e = \frac{17.100}{1.800} = 9{,}50$$

Por otra parte, la comisión de rebasamiento es:

$$C_r = 0{,}06 \times 900 = 54{,}00$$

En cuanto a la comisión de disponibilidad, previamente hemos de calcular el saldo medio dispuesto:

$$S_d = \frac{351.700 + 17.100}{92} = 4.008{,}70$$

Por tanto, el saldo medio no dispuesto es:

$$S_{nd} = L - S_d = 10.000 - 4.008{,}70 = 5.991{,}30$$

siendo la comisión de disponibilidad:

$$C_{disp} = 0{,}05 \times 5.991{,}30 = 299{,}57$$

Finalmente, el saldo resultante de la liquidación es:

$$S = -4.900 + 0{,}30 - 48{,}85 - 9{,}50 - 54 - 299{,}57 = -5.311{,}62 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

Para calcular el TAE que ha de aparecer en el contrato, primeramente hemos de distribuir la comisión de apertura utilizando el tipo de interés deudor del 1,25% trimestral, el cual es equivalente al 5% anual:

$$150 = C \times a_{\overline{6}|1,25\%} \quad \Rightarrow \quad C = 26,11$$

En cuanto a los intereses deudores que se tendrían que abonar:

$$I = 10.000 \times 0,05\frac{1}{4} = 125$$

por lo que el tipo de interés trimestral $i_{TAE}^{(m)}$ y su equivalente anual se obtiene a partir de la ecuación de equivalencia financiera:

$$10.000(1 + i_{TAE}^{(m)}) = 10.000 + 26,11 + 125 \quad \Rightarrow \quad i_{TAE}^{(m)} = 1,5111\%$$

$$i_{TAE} = (1 + i_{TAE}^{(m)})^4 - 1 = 6,18\%$$

Para determinar el TAE resultante de la primera liquidación, el saldo medio dispuesto a utilizar es:

$$S_{d(T)} = 4.008,70 - 150 - 50 = 3.808,70$$

Por otra parte, los intereses totales que se han pagado son:

$$I = 48,85 + 9,50 = 58,35$$

con lo que el tipo de interés trimestral es

$$i_{TAE}^{(m)} = \frac{58,35}{3.808,70} = 1,5320188\%$$

Por tanto, el TAE resultante de esta liquidación será el tipo de interés equivalente al tipo trimestral calculado anteriormente:

$$i_{TAE} = (1 + 0,015320188)^4 - 1 = 6,27\%$$

6. Liquidar la siguiente cuenta corriente al 31/12, sabiendo que existe un saldo inicial acreedor de 450 euros el 30/09. El tipo de interés para los saldos deudores es del 24% anual y los tipos de interés para las cuantías totales de los saldos acreedores son los siguientes: 1% anual si el saldo está comprendido entre 0 y 500 €; 4% si dicho saldo se encuentra entre 500,01 y 2.000 €; y 8% para saldos superiores a 2.000 €. Los movimientos de la cuenta son:

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber
08/10	—	100
11/10	800	—
25/10	—	600
30/10	—	275
20/11	—	400
25/11	—	1.000
03/12	—	300
20/12	600	—
25/12	200	
28/12	—	1.500

Resolución

Esta cuenta tiene un divisor fijo para los saldos deudores y tres divisores fijos para los saldos acreedores, en función del saldo de capitales que tenga la cuenta: el primero (D_{a1}) para saldos comprendidos entre 0 y 500 €, el segundo (D_{a2}) para saldos entre 500,01 y 2.000 €, y el tercero (D_{a3}) para saldos superiores a 2.000 €. Tales divisores son:

$$D_d = \frac{360}{0{,}24} = 1.500 \; ; \; D_{a1} = \frac{360}{0{,}01} = 36.000 \; ; \; D_{a2} = \frac{360}{0{,}04} = 9.000 \; ; \; D_{a3} = \frac{360}{0{,}08} = 4.500$$

Lógicamente, los números comerciales acreedores han de ser de 3 tipos, en función del valor del saldo. La siguiente tabla muestra los diferentes números comerciales:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_{a1}	N_{a2}	N_{a3}
30/09	—	450	450	8	—	3.600	—	—
08/10	—	100	550	3	—	—	1.650	—
11/10	800	—	−250	14	3.500	—	—	—
25/10	—	600	350	5	—	1.750	—	—
30/10	—	275	625	21	—	—	13.125	—
20/11	—	400	1.025	5	—	—	5.125	—
25/11	—	1.000	2.025	8	—	—	—	16.200
03/12	—	300	2.325	17	—	—	—	39.525
20/12	600	—	1.725	5	—	—	8.625	—
25/12	200	—	1.525	3	—	—	4.575	—
28/12	—	1.500	3.025	3	—	—	—	9.075
Total	1.600	4.625	—	92	3.500	5.350	33.100	64.800

© Ediciones Pirámide

Finalmente, el saldo es:

$$S = (C_a - C_d) + \left(\sum_{i=1}^{3} I_{ai} - I_d\right) = 4.625 - 1.600 + \frac{5.250}{36.000} + \frac{33.100}{9.000} + \\ + \frac{64.800}{4.500} - \frac{3.500}{1.500} = 3.040{,}89\ €$$

7.- Liquidar la siguiente cuenta corriente al 30/09, sabiendo que existe un saldo inicial acreedor de 900 euros el 30/06. El tipo de interés para los saldos deudores es del 15% anual, y los tipos de interés para los saldos acreedores son los siguientes: 2% anual si el saldo está comprendido entre 0 y 3.000 €, y 8% anual para la parte de saldo que exceda de 3.000 €. Los movimientos de la cuenta son:

Fecha valor	Debe	Haber
04/07	1.300	—
10/07	—	200
22/07	—	1.500
30/07	—	2.350
09/08	1.300	—
21/08	—	1.500
26/08	—	200
12/09	850	—
16/09	400	—
19/09	—	150

Resolución

Esta cuenta tiene un divisor fijo para los saldos deudores y dos divisores fijos para los saldos acreedores, en función del saldo de capitales que tenga la cuenta: el primero (D_{a1}) para saldos comprendidos entre 0 y 3.000 €, y el segundo (D_{a2}) para los saldos excedidos de 3.000 €. Tales divisores son:

$$D_d = \frac{360}{0{,}15} = 2.400\ ;\ D_{a1} = \frac{360}{0{,}02} = 18.000\ ;\ D_{a2} = \frac{360}{0{,}08} = 4.500$$

En este ejercicio, cuando la cuantía del saldo sea superior a 3.000 euros, los números comerciales que se generen serán de dos tipos. En primer lugar los que correspondan hasta la cuantía de 3.000 €, remunerándose al 2% anual, y en segundo lugar los que correspondan a la cuantía que exceda de 3.000, los cuales se remuneran al 8% anual.

© Ediciones Pirámide

La siguiente tabla muestra los diferentes números comerciales:

Fecha valor	Debe	Haber	Saldo	Días	N_d	N_{a1}	N_{a2}
30/06	—	900	900	4	—	3.600	—
04/07	1.300	—	−400	6	2.400	—	—
10/07	—	200	−200	12	2.400	—	—
22/07	—	1.500	1.300	8	—	10.400	—
30/07	—	2.350	3.650	10	—	30.000	6.500
09/08	1.300	—	2.350	12	—	28.200	—
21/08	—	1.500	3.850	5	—	15.000	4.250
26/08	—	200	4.050	17	—	51.000	17.850
12/09	850	—	3.200	4	—	12.000	800
16/09	400	—	2.800	3	—	8.400	—
19/09	—	150	2.950	11	—	32.450	—
Total	3.850	6.800	—	92	4.800	191.050	29.400

Finalmente, el saldo es:

$$S = (C_a - C_d) + \left(\sum_{i=1}^{2} I_{ai} - I_d\right) = 6.800 - 3.850 + \frac{191.050}{18.000} + \frac{29.400}{4.500} - \frac{4.800}{2.400} = 2.965{,}14\ €$$

16.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar el saldo con un tipo de interés recíproco del 6% anual, sabiendo que los capitales de una cuenta corriente comercial son los siguientes:

Debe	Haber	Días
—	250	40
1.200	—	20
—	400	15

2. Liquidar la siguiente cuenta corriente bancaria al 31/03, sabiendo que el tipo de interés acreedor es el 1,8% anual y el tipo de interés deudor es el 9% anual.

© Ediciones Pirámide

Fecha valor	Debe	Haber
10/01	—	700
31/01	—	250
14/02	1.000	—
21/02	350	—
28/02	—	225
05/03	—	300
20/03	—	125
26/03	150	—

3. Liquidar la siguiente cuenta corriente al 30/06, sabiendo que el tipo de interés acreedor es el 3% anual y el tipo de interés deudor es el 12% anual.

Fecha valor	Debe	Haber
01/04	—	100
09/04	340	—
24/04	200	—
03/05	—	1.500
25/05	—	230
14/06	—	440
19/06	1.500	—
29/06	—	120

4. Calcular el saldo y el tipo efectivo pasivo anual resultante de la liquidación de la siguiente cuenta de crédito a 31 de diciembre. Dicha cuenta presenta un límite de 10.000 euros y la duración es de un año y medio, con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 30 de septiembre y los tipos de interés anuales son los siguientes: 2% para los saldos acreedores, 6% para los saldos deudores y 25% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 15% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 2% a la apertura de la cuenta y también del 3% de disponibilidad sobre el saldo medio no dispuesto. Además, si se producen rebasamientos del límite de la cuenta, se percibirá una comisión del 5%. Los gastos de Notario son del 0,75% del límite de la cuenta. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

Fecha valor	Debe	Haber
10/10	—	800
21/10	1.500	—
12/11	4.200	—
20/11	2.950	—
12/12	3.000	—
22/12	—	2.250

© Ediciones Pirámide

5. Liquidar la cuenta de crédito a 30 de septiembre y calcular el TAE que ha de aparecer en el contrato y el resultante de la primera liquidación efectuada. Dicha cuenta presenta un límite de 12.000 euros, y la duración es de un año y medio, con liquidación trimestral de intereses. La cuenta se abre el 30 de junio y los tipos de interés anuales son los siguientes: 1% para los saldos acreedores, 8% para los saldos deudores y 20% para los saldos excedidos sobre el límite, ya que se permite un rebasamiento de hasta un 10% del límite establecido. Las comisiones que se establecen son del 1% a la apertura de la cuenta, siendo los gastos de Notario de 50 euros. Además, se sabe que las comisiones de disponibilidad y de rebasamiento fueron del 4% y del 5% respectivamente. Los movimientos durante el trimestre fueron los siguientes:

Fecha valor	Debe	Haber
05/07	550	—
20/07	—	1.000
04/08	6.250	—
15/08	3.500	—
10/09	2.650	—
19/09	—	4.000

6. Liquidar la siguiente cuenta corriente al 30/06, sabiendo que existe un saldo inicial acreedor de 300 euros el 31/03. El tipo de interés para los saldos deudores es del 25% anual y los tipos de interés para las cuantías totales de los saldos acreedores son los siguientes: 1,5% anual si el saldo está comprendido entre 0 y 1.000 €, 6% si dicho saldo se encuentra entre 1.000,01 y 3.000 €; y 12% para saldos superiores a 3.000 €.

Fecha valor	Debe	Haber
31/03	—	300
15/04	—	250
24/04	—	1.000
02/05	2.500	—
13/05	—	400
30/05	—	3.000
12/06	—	2.500
15/06	—	300
19/06	—	1.000
24/06	2.000	—

7. Liquidar la siguiente cuenta corriente al 31/12, sabiendo que existe un saldo inicial acreedor de 500 euros el 30/09. El tipo de interés para los saldos deudo-

© Ediciones Pirámide

res es del 12% anual y los tipos de interés para los saldos acreedores son los siguientes: 1% anual si el saldo está comprendido entre 0 y 2.000 € y 6% anual para la parte de saldo que exceda de 2.000 €. Los movimientos de la cuenta son:

Fecha valor	Debe	Haber
03/10	—	350
18/10	1.500	—
30/10	—	300
07/11	—	1.250
09/11	—	1.000
21/11	250	—
30/11	—	750
17/12	—	200
21/12	100	—
24/12	900	—

© Ediciones Pirámide

17 Operaciones bancarias a corto plazo (II)

OBJETIVOS

- Definir las operaciones a plazo fijo y su problemática financiera.
- Establecer el concepto de operación de descuento, distinguiendo entre operaciones de descuento comercial y operaciones de descuento financiero.
- Determinar las cuantías a percibir por el cliente y a desembolsar por la entidad, tanto en operaciones de descuento comercial como en operaciones de descuento financiero.
- Calcular los tipos efectivos de coste, rendimiento y TAE de las operaciones citadas.

SUMARIO

17.1. Imposiciones a plazo fijo.
17.2. Descuento comercial.
17.3. Descuento financiero.
17.4. Cálculo de los tantos efectivos en las operaciones de descuento.
17.5. Ejercicios y problemas resueltos.
17.6. Ejercicios y problemas propuestos.

17.1. IMPOSICIONES A PLAZO FIJO

En la lección anterior hemos analizado las cuentas corrientes, las cuales constituyen uno de los principales productos bancarios de pasivo a corto plazo. No obstante, un inconveniente que suelen tener las citadas cuentas es la baja rentabilidad que ofrecen, no siendo, en líneas generales, el producto más adecuado para que el cliente pueda ahorrar a corto plazo. Es por ello que la mayoría de clientes bancarios que persigan una rentabilidad en el corto plazo más elevada que la ofrecida por las cuentas corrientes y que no quieran asumir riesgos derivados de la inversión, se inclinen por invertir sus recursos en imposiciones a plazo fijo. En este sentido, podemos definir una **imposición a plazo fijo** como un depósito de fondos que no es exigible durante un determinado período de tiempo.

Las **principales características** de las imposiciones a plazo son las siguientes:

— En general, el depositante se obliga a no retirar el dinero hasta que se cumpla el plazo de vencimiento.
— La remuneración ofrecida suele superar a la de las cuentas corrientes debido a la imposibilidad, salvo penalización, de retirar el capital impuesto durante el plazo acordado[1].
— La liquidación de intereses suele ser periódica (mensual, trimestral, etc.) o al vencimiento del plazo, según se especifique en el contrato[2]. En general,

[1] Algunas entidades conceden, en lugar de la remuneración mediante intereses, una remuneración en especie.

[2] Cuando el tiempo para el cálculo de intereses se expresa en días, las entidades utilizan tanto el criterio Real/Real como el Real/365.

© Ediciones Pirámide

el cobro de intereses se realiza en una cuenta asociada al depósito[3]. Por ejemplo, si cierta persona invierte 10.000 € en una imposición a plazo fijo con vencimiento dentro de un año al 8% anual con abono de intereses semestrales, los intereses generados al finalizar el primer semestre son 400 € ($10.000 \times 0{,}08\frac{1}{2}$), los cuales no se acumulan en la imposición a plazo fijo para volver a producir intereses, por lo que los intereses del segundo semestre también serán de 400 €. No obstante, aunque no es lo habitual, también se permite la reinversión en el propio depósito de los intereses obtenidos[4].

— El tipo de interés a aplicar suele ser fijo y conocido en el momento de formalización del contrato. No obstante, dicho tipo de interés puede ser variable en función del acuerdo alcanzado entre las partes; indexado o referenciado a un determinado índice (Ibex-35, Euribor, etc.); o bien mixto, formado por la suma de un tipo fijo para cierto porcentaje del capital de la imposición y un tipo referenciado para la cuantía restante.

— En caso de que el cliente exija la cancelación del depósito antes de la fecha del vencimiento del contrato, la misma sólo será posible cuando se haya expresado así en el mismo. No obstante, es habitual que la entidad financiera aplique alguna penalización sobre los intereses generados hasta ese momento.

EJERCICIO 17.1

Cierta persona impone a plazo fijo un capital de 25.000 euros al 12% anual durante 18 meses. Sabiendo que los intereses producidos se abonan en una cuenta corriente de la que esta persona es titular, determinar el importe de los mismos en el caso de que la liquidación de intereses se realice de forma mensual, trimestral o al vencimiento.

Resolución

Dado que los intereses que se van generando no se acumulan al capital inicial para volver a producir nuevos intereses, el sistema de capitalización a utilizar es el de capitalización simple. De esta forma, si los intereses retirados son mensuales, el importe de cada uno de ellos es:

$$I = 25.000 \times 0{,}12\frac{1}{12} = 250\ €$$

[3] Las cuantías de los intereses están sometidas a un tipo de retención a cuenta de impuestos, por lo que el importe neto que la entidad abona es el que se obtiene una vez practicada la citada retención.

[4] En general, los intereses que la entidad abona, bien en otra cuenta o para reinvertir en la misma, son los intereses netos después de practicar la retención fiscal que proceda.

© Ediciones Pirámide

Por otra parte, si dichos intereses son de frecuencia trimestral, el importe de los mismos es:

$$I = 25.000 \times 0{,}12\frac{3}{12} = 750\ €$$

Finalmente, si los intereses se abonan al vencimiento de la operación, el importe de los mismos es:

$$I = 25.000 \times 0{,}12\frac{18}{12} = 4.500\ €$$

EJERCICIO 17.2

Determinar el montante generado en una imposición a plazo fijo durante 18 meses de un capital de 30.000 €, con liquidación trimestral de intereses, siendo el tipo de interés el 9% anual capitalizable por trimestres. Además, se sabe que los intereses que se van devengando se abonan en la misma cuenta de la imposición, para así poder generar nuevos intereses. La entidad retiene al impositor, por motivos fiscales, un 18% sobre las cuantías de los intereses.

Resolución

En este caso, los intereses trimestrales netos que se van produciendo se acumulan para producir nuevos intereses, por lo que hemos de utilizar el sistema de capitalización compuesta. Dado que de los intereses producidos en cada período se retiene el 18% de su cuantía, los que se acumulan son el 82% restante, por lo que el tipo de interés al que se produce la acumulación citada equivale al 82% del tipo inicial. Así, sabiendo que el tipo de interés trimestral equivalente al 9% anual capitalizable por trimestres es el 2,25%, los intereses netos que se acumulan son al siguiente tipo de interés trimestral: $i'^{(m)} = 2{,}25\% \times 0{,}82 = 1{,}845\%$. En consecuencia, el montante obtenido transcurridos 18 meses es:

$$C_{18} = 30.000(1 + 0{,}01845)^{\frac{18}{3}} = 33.478{,}00\ €$$

EJERCICIO 17.3

El 12 de septiembre de un cierto año bisiesto, una persona deposita en una cuenta bancaria 30.000 €. Las condiciones de la cuenta son: tipo de interés nominal del 4% anual, abono al final de cada mes de los intereses netos en la misma cuenta y retención fiscal del 18%. Determinar los intereses netos del mes de septiembre y del mes de octubre.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Los intereses íntegros o brutos correspondientes a los 18 días de septiembre son[5]:

$$I_1 = 30.000\frac{18}{366} \times 0{,}04 = 59{,}02$$

Los intereses netos, teniendo en cuenta la retención del 18%, ascienden a 48,40 €. Dicha cuantía acumulada al capital inicial produce intereses en el mes de octubre. Así, los intereses brutos de dicho mes son:

$$I_2 = (30.000 + 48{,}40)\frac{31}{366} \times 0{,}04 = 101{,}80$$

Los intereses netos son 83,48 €, por lo que el saldo de la cuenta al finalizar el mes de octubre es 30.131,88 €.

EJERCICIO 17.4

Una persona deposita 100.000 € en una entidad que le abona intereses mensuales acumulables en dicha cuenta a razón del 6% nominal anual. Sabiendo que le retiene por motivos fiscales el 18% de los intereses producidos cada mes, determinar: *a*) capital que tendrá una vez hayan transcurrido 12 meses; *b*) intereses netos obtenidos; *c*) intereses íntegros devengados, y *d*) cuantía total retenida.

Resolución

El tipo de interés mensual de la imposición es el 0,5%. Al retenerle el 18%, el tipo neto mensual de acumulación es el $i'^{(m)} = 0{,}5\% \times 0{,}82 = 0{,}41\%$, por lo que la cuantía neta disponible transcurridos 12 meses asciende a:

$$C_{12} = 100.000(1 + 0{,}0041)^{12} = 105.032{,}48 \text{ €}$$

Los intereses netos obtenidos son: $I' = 105.032{,}48 - 100.000 = 5.032{,}48$ €. Como se le retiene el 18% de los intereses íntegros, los netos suponen el 82% de éstos, por lo que los intereses brutos devengados ascienden a 6.137,17 €:

$$I' = 5.032{,}48 = 0{,}82 \times I \quad \Rightarrow \quad I = 6.137{,}17$$

[5] Utilizamos el criterio Real/Real.

© Ediciones Pirámide

En consecuencia, la cuantía total retenida es: $R = I - I' = 6.137{,}17 - 5.032{,}48 =$ $= 1.104{,}69$ €. Se puede comprobar que, efectivamente, la cuantía total retenida es el 18% de los intereses íntegros totales: $R = 0{,}18 \times I = 0{,}18 \times 6.137{,}17 = 1.104{,}69$.

En la siguiente tabla se muestra mes a mes la dinámica de la operación:

Mes	Intereses íntegros	Retención	Intereses netos	Capital acumulado neto
0	—	—	—	100.000,00
1	500,00	90,00	410,00	100.410,00
2	502,05	90,37	411,68	100.821,68
3	504,11	90,74	413,37	101.235,05
4	506,18	91,11	415,07	101.650,12
5	508,25	91,49	416,76	102.066,88
6	510,33	91,86	418,47	102.485,35
7	512,43	92,24	420,19	102.905,54
8	514,53	92,62	421,91	103.327,45
9	516,64	93,00	423,64	103.751,09
10	518,76	93,38	425,38	104.176,47
11	520,88	93,76	427,12	104.603,59
12	523,02	94,14	428,88	105.032,47
Total	6.137,18	1.104,71	5.032,47	—

Es preciso señalar que, debido al redondeo de las cuantías mensuales, los valores que figuran en la tabla anterior difieren ligeramente de los obtenidos en la resolución.

EJERCICIO 17.5

Cierta persona impone a plazo fijo un capital de 50.000 euros durante 36 meses. Sabiendo que los intereses producidos se abonan en una cuenta corriente de la que esta persona es titular, determinar el TAE de la imposición, sabiendo que la liquidación de intereses se realiza de forma semestral, que los tipos de interés anuales son el 4% para el primer año, el 5% para el segundo y el 8% para el tercero, y que la retención a cuenta de intereses es el 18%.

Resolución

Hemos de utilizar el sistema financiero de capitalización simple, ya que los intereses generados se abonan en otra cuenta. De esta forma, al ser la liquidación semestral, los intereses semestrales correspondientes al primer año son:

$$I_{\frac{1}{2}} = I_1 = 50.000 \times 0{,}04\frac{1}{2} = 1.000$$

© Ediciones Pirámide

Por otra parte, los intereses semestrales correspondientes al segundo año se calculan utilizando el mismo capital inicial y con el tipo de interés del 5% anual:

$$I_{1+\frac{1}{2}} = I_2 = 50.000 \times 0{,}05\frac{1}{2} = 1.250$$

En cuanto a los intereses semestrales del tercer año, éstos se calculan al 8% anual:

$$I_{2+\frac{1}{2}} = I_3 = 50.000 \times 0{,}08\frac{1}{2} = 2.000$$

Las cuantías anteriores son los intereses íntegros, brutos o antes de retención por motivos fiscales.

Finalmente, para determinar el TAE de la operación, para el cual no se consideran las cuantías retenidas por impuestos, previamente hemos de calcular el tipo correspondiente semestral, el cual se obtiene al plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$50.000 = 1.000 \times a_{\overline{2}|i_{TAE}^{(m)}} + 1.250 \times a_{\overline{2}|i_{TAE}^{(m)}}(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-2} + 2.000 \times a_{\overline{2}|i_{TAE}^{(m)}}(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-4} + \\ + 50.000(1 + i_{TAE}^{(m)})^{-6}$$

De la misma se obtiene un tipo semestral del 2,79674295%, siendo, por tanto, el TAE su equivalente anual:

$$i_{TAE} = (1 + 0{,}0279674295)^2 - 1 = 5{,}6717\%$$

EJERCICIO 17.6

Se impone a plazo fijo un capital de 100.000 euros durante 24 meses, abonándose en una cuenta corriente los rendimientos que se generen. El tipo de interés es el 8% anual durante el primer semestre para la mitad del capital impuesto. Una vez transcurrido el primer semestre, se devolverá dicha mitad de capital. El tipo de interés semestral a aplicar a la otra mitad de la imposición se obtiene del 60% de la revalorización positiva que presente el índice Ibex-35 en el período contratado, siendo la liquidación de intereses semestral. Determinar el tipo efectivo de la citada imposición a plazo fijo, sabiendo que el valor del Ibex-35 al comienzo de la operación fue de 15.400 puntos, y que el valor presentado al final de cada uno de los 4 semestres de duración de la imposición fue de 16.170, 16.490, 18.150 y 18.900, respectivamente.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Hemos de utilizar el sistema financiero de capitalización simple, ya que los intereses generados se abonan en otra cuenta. De esta forma, los intereses que genera la parte impuesta al 8% anual son los siguientes:

$$I_1 = \frac{100.000}{2} \times 0{,}08\frac{1}{2} = 2.000$$

Para la otra mitad de la imposición hemos de calcular el tipo de interés que generará los intereses correspondientes, el cual será el 60% de la revalorización que presente el Ibex-35 en el plazo de la imposición. Tanto para la revalorización como para el tipo de interés semestral, expresados en forma porcentual, tomamos cuatro decimales. Los intereses semestrales se muestran en la siguiente tabla:

Semestre	Valor Ibex-35	Revalorización (%)	Tipo de interés semestral (%)	Interés semestral
0	15.400	—	—	—
1	16.170	5,0000	3,0000	1.500,00
2	16.490	1,9790	1,1874	593,70
3	18.150	10,0667	6,0400	3.020,00
4	18.900	4,1322	2,4793	1.239,65

Los intereses semestrales anteriores se han obtenido de la forma que se indica a continuación:

$$I'_1 = 50.000 \times 0{,}03 = 1.500$$

$$I'_2 = 50.000 \times 0{,}011874 = 593{,}70$$

$$I'_3 = 50.000 \times 0{,}0604 = 3.020{,}00$$

$$I'_4 = 50.000 \times 0{,}024793 = 1.239{,}65$$

Finalmente, el tipo efectivo activo semestral es el 3,33695826%, que se obtiene al plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera[6]:

$$100.000 = \left(2.000 + \frac{100.000}{2} + 1.500\right)(1 + i_a^{(m)})^{-1} + 593{,}70(1 + i_a^{(m)})^{-2} +$$
$$+ 3.020(1 + i_a^{(m)})^{-3} + \left(1.239{,}65 + \frac{100.000}{2}\right)(1 + i_a^{(m)})^{-4}$$

[6] Lógicamente estamos suponiendo que la cuenta corriente en la que se abonan los intereses carece de retribución.

© Ediciones Pirámide

Siendo su equivalente anual:

$$i_a = (1 + 0{,}0333695826)^2 - 1 = 6{,}7853\%$$

17.2. DESCUENTO COMERCIAL

Una de las operaciones financieras que se suele emplear frecuentemente en la práctica bancaria es la operación de descuento. Podemos definir el **descuento bancario** como aquella operación financiera en la cual una determinada entidad financiera abona a su cliente el valor actualizado de un capital financiero futuro, el cual está representado por un título de crédito. Este tipo de operaciones se pactan siguiendo como criterio financiero para la valoración de capitales la ley financiera de descuento simple comercial.

El título de crédito que representa el compromiso de pago por parte del cliente de la entidad financiera puede ser una letra de cambio, un pagaré, una certificación de obra, etc. En cualquier caso, se trata de un título jurídico que permite a dicha entidad el cobro del capital correspondiente en el momento de su vencimiento.

Se trata, por tanto, de una operación financiera simple[7], en la cual el capital descontado que percibe el cliente en el momento inicial recibe el nombre de **efectivo,** siendo el **nominal** la cuantía que figura en el título de crédito y, por tanto, el capital que percibirá la entidad financiera en el momento del vencimiento del título de crédito.

En las operaciones de descuento bancario se puede distinguir entre operaciones de **descuento comercial** y operaciones de **descuento financiero.**

Podemos definir una operación de **descuento comercial** como aquella en la cual el cliente de una entidad financiera[8] obtiene liquidez al transformar en efectivo el crédito que éste ha concedido a sus clientes y ha instrumentalizado en un título de crédito (letra de cambio, pagaré, etc.). Para ello, el cliente cede a la entidad financiera el citado título de crédito, percibiendo en ese momento el efectivo de la operación. Posteriormente, cuando dicho título llegue a su vencimiento, la entidad financiera percibirá el importe nominal del mismo.

Por ejemplo, supongamos que una empresa tiene en su poder una letra de cambio de valor nominal 1.500 euros con vencimiento dentro de 90 días. La citada empresa puede esperar que transcurran esos 90 días para proceder al cobro de los 1.500 euros o, por el contrario, acudir a una entidad financiera que le descuen-

[7] Recordemos que una operación simple es aquella en la cual los conjuntos prestación y contraprestación están formados por un solo capital.

[8] Estos clientes suelen ser empresas o bien personas físicas que realicen actividades económicas o profesionales.

© Ediciones Pirámide

te el importe nominal del citado título de crédito, percibiendo como efectivo, por ejemplo, 1.350 euros inmediatamente. Trascurridos los 90 días, la entidad de crédito percibirá los 1.500 euros que figuran en el nominal de la letra.

En estas operaciones de descuento comercial, el efectivo que percibe el cliente se obtiene al detraer del nominal de la letra la cuantía del descuento simple comercial, la comisión por negociación y otros posibles gastos. Analíticamente:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G'$$

siendo:

E_c : efectivo a percibir por el cliente.
C : nominal de la letra de cambio.
D_{sc} : cuantía del descuento simple comercial.
G : comisión por negociación, la cual suele ser un porcentaje del nominal de la letra.
G' : otros posibles gastos.

Al tratarse de operaciones que se pactan bajo el sistema de descuento simple comercial, dicho precio financiero se obtiene como el producto del nominal de la letra por el tipo de descuento y por el tiempo hasta el vencimiento de la misma[9]. Analíticamente:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360}$$

siendo:

n : número de días desde la fecha valor de negociación de la letra hasta su vencimiento.
d : tipo de descuento anual, expresado en tanto unitario.

Ejercicio 17.7

El 12 de abril se descuenta una letra de 2.500 euros de valor nominal, la cual tiene como fecha de vencimiento el 11 de julio del mismo año. La entidad financiera aplica a sus operaciones de descuento un tipo del 5% anual, además de una comisión del 0,5% del nominal negociado. Determinar el efectivo a percibir por el cliente.

[9] Cuando el tiempo viene expresado en días, empleamos el criterio Real/360.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Dado que el efectivo del cliente se obtiene como resultado de restarle al nominal de la letra el descuento simple comercial y la comisión bancaria, vamos a calcular previamente dichos importes.

En cuanto al descuento simple comercial, el número de días que existen entre el 12 de abril y el 11 de julio es 90, por lo que al ser el tipo de descuento el 5% anual, el descuento simple comercial se calcula de la siguiente forma:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{2.500 \times 90 \times 0{,}05}{360} = 31{,}25$$

La comisión que cobra la entidad financiera es:

$$G = 0{,}005 \times 2.500 = 12{,}50$$

Por tanto, al no existir más gastos, el efectivo a percibir por el cliente asciende a:

$$E_c = C - D_{sc} - G = 2.500 - 31{,}25 - 12{,}50 = 2.456{,}25\ €$$

EJERCICIO 17.8

Una entidad financiera ha descontado una letra a un cliente, percibiendo éste 4.880 euros. La citada letra tiene por nominal 5.000 euros y el tiempo que resta hasta su vencimiento es de 120 días. Sabiendo que la entidad financiera ha cobrado una comisión del 0,4% del nominal de la letra, calcular el tipo de descuento anual que dicha entidad aplicó en la operación.

Resolución

En este ejercicio conocemos tanto el nominal de la letra como el efectivo que ha percibido el cliente. Asimismo, dado que el valor de la comisión bancaria es de 20 euros (0,4% de 5.000), el importe del descuento simple comercial se deduce de la siguiente ecuación:

$$4.880 = 5.000 - D_{sc} - 20 \quad \Rightarrow \quad D_{sc} = 100$$

Por tanto, el tipo de descuento anual que aplicó la entidad financiera es el 6% anual, el cual se obtiene de la siguiente ecuación:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} \quad \Rightarrow \quad 100 = \frac{5.000 \times 120 \times d}{360} \quad \Rightarrow \quad d = 0{,}06$$

© Ediciones Pirámide

17.3. DESCUENTO FINANCIERO

La operación de descuento financiero es una operación por la que una entidad financiera concede un préstamo y lo instrumentaliza a través del descuento de una letra de cambio o de un pagaré. Por tanto, el cliente percibe un capital al inicio de la operación, que es el efectivo del descuento, comprometiéndose a devolver el nominal del título en el momento del vencimiento.

Las letras en las cuales se instrumentalizan estas operaciones se suelen denominar **letras financieras,** y en su formalización suele exigirse algún aval y ser intervenidas por Notario.

Para calcular el efectivo que percibe el cliente de la entidad financiera es necesario detraer del nominal de la letra todos los gastos que tenga que soportar dicho cliente. Es decir, la cuantía a percibir por parte del cliente (E_c) será el importe del nominal de la letra (C) menos el descuento comercial (D_{sc}), la comisión bancaria (G), los honorarios del Notario (G') y los impuestos que graven la operación[10] (I):

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I$$

Por otra parte, la entidad financiera abonará en el momento inicial la cuantía E_B, obtenida como la diferencia entre el nominal, el descuento comercial y la comisión a su favor:

$$E_B = C - D_{sc} - G$$

O, lo que es equivalente, el efectivo desembolsado por la entidad es la suma del efectivo recibido por el cliente con los impuestos y los honorarios del Notario:

$$E_B = E_c + I + G'$$

EJERCICIO 17.9

Cierta entidad financiera concierta con un cliente una operación de descuento financiero a través de la cual dicho cliente acepta una letra de nominal 5.000 euros, con vencimiento dentro de 120 días. La entidad financiera aplica un tipo de descuento del 9% anual, siendo la comisión pactada el 0,5% del nominal de la letra y los honorarios del Notario el 0,1% de dicho nominal. Sabiendo que la cuantía del timbre asciende a 20 euros, determinar el importe que percibe el cliente.

---

[10] Estas operaciones están exentas de tributación en el Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA). No obstante, sí tributan por el Impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados, el cual se hace efectivo en la puesta en circulación de la letra a través del timbre.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Dado que el efectivo del cliente se obtiene como resultado de restarle a la cuantía del nominal de la letra el descuento simple comercial, la comisión bancaria, los honorarios del Notario y el timbre, calculamos previamente dichos importes.

El descuento simple comercial es:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{5.000 \times 120 \times 0{,}09}{360} = 150$$

La comisión que cobra la entidad financiera y los honorarios del Notario son:

$$G = 0{,}005 \times 5.000 = 25$$

$$G' = 0{,}001 \times 5.000 = 5$$

Por tanto, sabiendo que el importe del timbre es de 20 €, el efectivo a percibir por el cliente es:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I$$

$$E_c = 5.000 - 150 - 25 - 5 - 20 = 4.800 \text{ €}$$

EJERCICIO 17.10

El director financiero de cierta empresa acude a la sucursal de un banco con el propósito de obtener financiación por un importe neto de 25.000 euros a través de una operación de descuento financiero. Para ello, la entidad financiera oferta un tipo de descuento del 5% anual, siendo el plazo de 180 días. Sabiendo que la comisión bancaria es del 0,2% del nominal de la letra y que el timbre asciende a 22 euros, determinar el valor nominal de la letra de cambio.

Resolución

En este ejercicio se conoce cuál es la cuantía neta a percibir por el cliente, teniéndose que determinar, por tanto, el nominal de la letra.

El descuento simple comercial se obtiene de la siguiente expresión:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{C \times 180 \times 0{,}05}{360} = 0{,}025C$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, podremos obtener el valor nominal de la letra utilizando la expresión del efectivo del cliente:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I$$

$$25.000 = C - 0{,}025C - 0{,}002C - 22$$

de donde se obtiene que el valor nominal de la letra es de 25.716,34 €.

EJERCICIO 17.11

Cierta empresa percibe 8.271,25 € como resultado del descuento de una letra financiera de 8.500 € de nominal. De la citada operación se sabe que el plazo es de 90 días, pactándose una comisión del 0,75% del nominal de la letra. Determinar el tipo de descuento que se aplica a la citada operación, así como el efectivo que desembolsa la entidad, sabiendo que en la misma interviene un Notario, cuyos honorarios ascienden al 0,3% del nominal de la letra y que el timbre que abona la empresa es de 12 €.

Resolución

Primeramente hemos de determinar los diferentes gastos en los que incurre la empresa, es decir, la comisión que cobra la entidad financiera y los honorarios del Notario:

$$G = 0{,}0075 \times 8.500 = 63{,}75$$

$$G' = 0{,}003 \times 8.500 = 25{,}50$$

Por tanto, la cuantía del descuento simple comercial se deduce de la siguiente ecuación:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I$$

$$8.271{,}25 = 8.500 - D_{sc} - 63{,}75 - 25{,}50 - 12 \quad \Rightarrow \quad D_{sc} = 127{,}50$$

El tipo de descuento anual se obtiene de la siguiente ecuación:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} \quad \Rightarrow \quad 127{,}50 = \frac{8.500 \times 90 \times d}{360} \quad \Rightarrow \quad d = 6\%$$

© Ediciones Pirámide

La cuantía total que desembolsa la entidad es el nominal menos el descuento comercial y la comisión a su favor:

$$E_B = C - D_{sc} - G = 8.500 - 127{,}50 - 63{,}75 = 8.308{,}75 \text{ €}$$

O, lo que es equivalente, el efectivo que desembolsa la entidad es la suma de lo que percibe el cliente con los impuestos y los honorarios del notario:

$$E_B = E_c + I + G' = 8.271{,}25 + 12 + 25{,}50 = 8.308{,}75 \text{ €}$$

17.4. CÁLCULO DE LOS TANTOS EFECTIVOS EN LAS OPERACIONES DE DESCUENTO

17.4.1. Cálculo de los tipos efectivos para el cliente y para la entidad financiera

En las operaciones de descuento bancario, cuando el cliente abona gastos por conceptos diferentes al descuento simple comercial, los conjuntos prestación y contraprestación iniciales se ven modificados, obteniéndose, por tanto, los conjuntos prestación y contraprestación reales, tanto para la entidad financiera como para el cliente de la misma.

Por tanto, el tipo de descuento pactado entre ambos sujetos no refleja fielmente cuál ha sido el coste soportado por el cliente o, desde el otro punto de vista, cuál ha sido el rendimiento obtenido por la entidad financiera. Es por ello que tanto el prestamista de la operación como el prestatario estén interesados en conocer el coste o rendimiento que realmente les supone la operación de descuento.

Así, el cliente de la entidad financiera obtiene en el momento inicial el capital descontado E_c, abonando el valor nominal de la letra en el momento de su vencimiento. Por tanto, el tipo de descuento que verifica la equivalencia entre ambos capitales se denomina **tipo efectivo de descuento para el cliente,** d_c. Este tipo de descuento indica el coste que el cliente soporta al anticipar el nominal de la letra.

Por otra parte, la entidad financiera abonará en el momento inicial el efectivo E_B, percibiendo en el momento del vencimiento de la letra el nominal de la misma.

Por tanto, el tipo de descuento que verifica la equivalencia entre ambos capitales se denomina **tipo efectivo de descuento para la entidad,** d_B. Este tipo de descuento indica el rendimiento que la entidad financiera obtiene al anticipar el nominal de la letra.

© Ediciones Pirámide

En general, los tipos efectivos de descuento citados se deducen de la correspondiente ecuación de equivalencia financiera, en descuento simple comercial[11], entre las cuantías reales entregadas y recibidas por los sujetos de la operación. Además, también se pueden determinar los tipos efectivos de interés de coste, i_p, y de rendimiento, i_a, utilizando la capitalización compuesta[12].

EJERCICIO 17.12

El 25 de marzo cierta entidad financiera concierta con su cliente una operación de descuento financiero, a través de la cual dicho cliente se compromete a devolver un capital de 6.000 euros con vencimiento el 23 de junio del mismo año. La entidad financiera aplica un tipo de descuento del 6% anual y una comisión del 0,5% del nominal de la letra. Los honorarios del Notario son del 0,1% de dicho nominal. Sabiendo que la cuantía del timbre asciende a 15,50 euros, determinar los tantos efectivos de descuento para el cliente y para la entidad financiera, así como los tantos efectivos de interés activo y pasivo.

Resolución

Lo primero que hemos de calcular son los distintos gastos que ha de pagar el cliente en el momento inicial. Así, el descuento simple comercial es:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{6.000 \times 90 \times 0{,}06}{360} = 90$$

y la comisión de la entidad financiera y los honorarios del Notario:

$$G = 0{,}005 \times 6.000 = 30$$

$$G' = 0{,}001 \times 6.000 = 6$$

Por tanto, el efectivo del cliente será la diferencia entre el nominal y todos los gastos a pagar:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I$$

$$E_c = 6.000 - 90 - 30 - 6 - 15{,}50 = 5.858{,}50$$

Una vez conocida la cuantía a percibir por el cliente, el tipo efectivo de descuento es el que verifica la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía

[11] Utilizando el criterio Real/360.
[12] El criterio utilizado es el Real/Real.

© Ediciones Pirámide

percibida por el cliente, siendo éste del 9,43% anual. La expresión que permite su cálculo es la siguiente:

$$E_c = C(1 - n \times d_c) \quad \Rightarrow \quad 5.858{,}50 = 6.000\left(1 - \frac{90}{360} \times d_c\right)$$

En cuanto al cálculo del tipo de rentabilidad que obtiene la entidad financiera, previamente se ha de determinar el efectivo que desembolsa la misma:

$$E_B = C - D_{sc} - G$$

$$E_B = 6.000 - 90 - 30 = 5.880$$

Por tanto, el tipo efectivo de descuento para la entidad financiera es el que verifique la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía abonada por ésta, siendo del 8% anual. La expresión que permite su cálculo es la siguiente:

$$E_B = C(1 - n \times d_B) \quad \Rightarrow \quad 5.880 = 6.000\left(1 - \frac{90}{360} \times d_B\right)$$

El tipo anual efectivo en capitalización compuesta para el cliente o tipo efectivo de coste se deduce de la siguiente ecuación entre las cuantías realmente recibidas y entregadas:

$$E_c(1 + i_p)^{\frac{n}{365}} = C \quad \Rightarrow \quad 5.858{,}50(1 + i_p)^{\frac{90}{365}} = 6.000 \quad \Rightarrow \quad i_p = 10{,}16\%$$

Y para la entidad, el tipo anual efectivo activo o de rendimiento se deduce de la ecuación siguiente:

$$E_B(1 + i_a)^{\frac{n}{365}} = C \quad \Rightarrow \quad 5.880(1 + i_a)^{\frac{90}{365}} = 6.000 \quad \Rightarrow \quad i_a = 8{,}54\%$$

EJERCICIO 17.13

El 14 de septiembre de cierto año, tras descontar una letra financiera en una entidad de crédito, cierto cliente recibe 9.740 euros como efectivo de la operación. El tipo de descuento aplicado a la operación fue del 9% anual; la comisión bancaria ascendió al 0,8% del nominal de la letra; el Notario recibió el 0,1% de dicho nominal y el timbre de la letra fue de 20 €. Sabiendo que el tipo efectivo de descuento del cliente fue del 15,60% anual, determinar el nominal de la letra, la fecha de vencimiento y el tipo efectivo de interés de la entidad.

© Ediciones Pirámide

Resolución

De la citada letra, necesitamos obtener el nominal de la letra y su duración. Dado que el efectivo del cliente es conocido, si planteamos la ecuación del cálculo de dicho efectivo tendríamos como resultado una ecuación con dos incógnitas: el nominal de la letra y su duración:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I \quad \Rightarrow \quad 9.740 = C - C\frac{n}{360} \times 0{,}09 - 0{,}008 \times$$

$$\times C - 0{,}001 \times C - 20 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{9.760}{1 - \dfrac{0{,}09 \times n}{360} - 0{,}008 - 0{,}001}$$

Además, como el tipo efectivo de descuento del cliente es del 15,60% anual, se plantea la siguiente ecuación, donde tampoco es conocido el nominal ni la duración de la letra:

$$E_c = C(1 - n \times d_c) \quad \Rightarrow \quad 9.740 = C\left(1 - \frac{n}{360} \times 0{,}1560\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{9.740}{1 - \dfrac{n}{360} \times 0{,}1560}$$

Por tanto, tenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, de cuya resolución se deduce que el nominal de la letra es 10.000 euros y la duración 60 días:

$$\left.\begin{array}{l} C = \dfrac{9.760}{1 - \dfrac{0{,}09 \times n}{360} - 0{,}008 - 0{,}001} \\ \\ C = \dfrac{9.740}{1 - \dfrac{n}{360} \times 0{,}1560} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = 10.000 \\ n = 60 \end{array}$$

En consecuencia, la letra vence el 13 de noviembre del año en el que se ha descontado.

La cuantía abonada por la entidad es:

$$E_B = E_c + G' + I = 9.740 + 10 + 20 = 9.770$$

En consecuencia, el tipo anual efectivo activo de interés o de rendimiento para la entidad se deduce de la ecuación siguiente:

$$E_B(1 + i_a)^{\frac{n}{365}} = C \quad \Rightarrow \quad 9.770(1 + i_a)^{\frac{60}{365}} = 10.000 \quad \Rightarrow \quad i_a = 15{,}21\%$$

© Ediciones Pirámide

17.4.2. Cálculo del TAE

En las operaciones de descuento comercial, aunque las mismas se pactan bajo el sistema de descuento simple comercial, son de obligado cumplimiento las normas recogidas en la Circular 8/1990 del Banco de España, según las cuales se ha de publicar el TAE de estas operaciones, el cual se calcula bajo el sistema de capitalización compuesta.

En este sentido, en la norma octava punto 4*d* de dicha Circular se señala que en el descuento de papel comercial, el coste efectivo se complementará por cada factura de descuento, integrando en el coste el importe de las comisiones que, por cada efecto, exceda de los mínimos tarifados por cada entidad. Además, los efectos a menos de 15 días no se entenderán descontados a estos fines, considerándose todos sus costes como inherentes al servicio de cobranza.

EJERCICIO 17.14

Se descuenta una letra de 15.000 euros con vencimiento dentro de 120 días al 10% anual en una entidad financiera. Sabiendo que el mínimo a cobrar por comisión bancaria es de 100 euros, determinar el tipo efectivo de descuento para el cliente y el TAE resultante de la liquidación en los supuestos: *a*) la comisión bancaria es del 1% del nominal de la letra, y *b*) la comisión bancaria es del 0,5% de dicho nominal.

Resolución

a) El descuento simple comercial es:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{15.000 \times 120 \times 0{,}10}{360} = 500$$

En cuanto a la comisión bancaria, su importe es el 1% del nominal de la letra, es decir, $G = 0{,}01 \times 15.000 = 150$ €.

Por tanto, el efectivo a percibir por el cliente es la diferencia entre el nominal y todos los gastos a pagar:

$$E_c = 15.000 - 500 - 150 = 14.350$$

El tipo efectivo anual de descuento será aquel que verifique la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía percibida por el cliente:

$$E_c = 14.350 = 15.000\left(1 - \frac{120}{360} \times d_c\right) \quad \Rightarrow \quad d_c = 13\%$$

© Ediciones Pirámide

Finalmente, el TAE de la operación se obtiene al plantear bajo el sistema de capitalización compuesta la siguiente ecuación de equivalencia financiera, sabiendo que se incluye de comisión sólo 50 €, que es la cuantía que supera al mínimo establecido por la entidad:

$$15.000 = (15.000 - 500 - 50)(1 + i_{TAE})^{\frac{120}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE} = 12{,}03\%$$

b) El descuento simple comercial coincide con el del apartado *a*), pero la comisión bancaria, al no superar el mínimo a cobrar por la entidad, $0{,}005 \times 15.000 = 75 < 100$, es igual a dicho mínimo, $G' = 100$. Por tanto, el efectivo del cliente será la diferencia entre el nominal y todos los gastos a pagar por el mismo:

$$E'_c = 15.000 - 500 - 100 = 14.400$$

El tipo efectivo anual de descuento es aquel que verifica la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía percibida por el cliente:

$$14.400 = 15.000\left(1 - \frac{120}{360} \times d'_c\right) \quad \Rightarrow \quad d'_c = 12\%$$

Finalmente, el TAE de la operación se obtiene al plantear bajo el sistema de capitalización compuesta la siguiente ecuación de equivalencia financiera, sabiendo que no se incluye la comisión de negociación bancaria, al no superar el mínimo establecido:

$$15.000 = (15.000 - 500)(1 + i_{TAE})^{\frac{120}{365}} \quad \Rightarrow \quad i_{TAE} = 10{,}86\%$$

EJERCICIO 17.15

Con fecha valor 18 de marzo de cierto año se descuentan en determinada entidad financiera las siguientes letras:

Letra	Vencimiento	Nominal
1	31 de marzo	2.000
2	2 de mayo	3.200
3	16 de junio	1.200
4	16 de julio	2.500

La entidad aplica a estas operaciones un tipo de descuento del 10% anual, así como una comisión del 2% del nominal de cada letra, con un mínimo de 30 €. Determinar los tantos efectivos de descuento y de interés para el cliente, así como el TAE de la operación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Las cuantías a abonar por el cliente en concepto de descuento simple comercial se calculan en base al nominal de cada letra por el tipo de descuento anual y por la duración, expresada en años, de cada una de ellas. La siguiente tabla recoge los diferentes valores abonados como descuento simple comercial:

Letra	Nominal	Días hasta vencimiento	Descuento
1	2.000	13	7,22
2	3.200	45	40,00
3	1.200	90	30,00
4	2.500	120	83,33
Total	8.900	—	160,55

En cuanto a la comisión bancaria, su importe es del 2% del nominal de cada letra, siempre que sea superior al mínimo a cobrar por la entidad (30 €). La siguiente tabla recoge los diferentes valores abonados como comisión bancaria:

Letra	Comisión	Mínimo	Comisión a pagar
1	40	30	40
2	64	30	64
3	24	30	30
4	50	30	50
Total	—	—	184

Por tanto, el efectivo a percibir por el cliente es la diferencia entre el nominal del conjunto de letras y todos los gastos a pagar:

$$E_c = \sum_{r=1}^{4} C_r - \sum_{r=1}^{4} D_{sc_r} - \sum_{r=1}^{4} G_r = 8.900 - 160{,}55 - 184 = 8.555{,}45$$

El tipo efectivo anual de descuento es del 21,46% anual, que es el que verifica la equivalencia financiera entre los diferentes nominales de cada letra y la cuantía percibida por el cliente:

$$8.555{,}45 = 2.000\left(1 - \frac{13}{360} \times d_c\right) + 3.200\left(1 - \frac{45}{360} \times d_c\right) + 1.200\left(1 - \frac{90}{360} \times d_c\right) +$$
$$+ 2.500\left(1 - \frac{120}{360} \times d_c\right)$$

© Ediciones Pirámide

El tipo de interés anual efectivo en capitalización compuesta para el cliente, o tipo efectivo de coste, es del 25,07% anual, el cual se deduce de la siguiente ecuación entre la cuantía recibida y las entregadas:

$$8.555{,}45 = 2.000(1 + i_p)^{\frac{-13}{365}} + 3.200(1 + i_p)^{\frac{-45}{365}} + 1.200(1 + i_p)^{\frac{-90}{365}} + 2.500(1 + i_p)^{\frac{-120}{365}}$$

El TAE de la operación se obtiene al plantear bajo el sistema de capitalización compuesta la siguiente ecuación de equivalencia financiera, sabiendo que se incluye como comisión sólo las cuantías que superen al mínimo establecido por la entidad (30 €). Además, la letra con vencimiento inferior a 15 días no se incluye en el cálculo del TAE. Por tanto, las cuantías que se consideran son:

Letra	Nominal	Descuento	Exceso de comisión (G^*)
2	3.200	40,00	34
3	1.200	30,00	0
4	2.500	83,33	20
Total	6.900	153,33	54

Se tiene, pues:

$$E'_c = \sum_{r=2}^{4} C_r - \sum_{r=2}^{4} D_{sc_r} - \sum_{r=2}^{4} G_r^* = 6.900 - 153{,}33 - 54 = 6.692{,}67$$

Por tanto, el TAE de la operación de descuento es el 14,98% anual, deducido de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$6.692{,}67 = 3.200(1 + i_{TAE})^{\frac{-45}{365}} + 1.200(1 + i_{TAE})^{\frac{-90}{365}} + 2.500(1 + i_{TAE})^{\frac{-120}{365}}$$

17.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Cierta persona impone a plazo fijo un capital de 125.000 euros durante 12 meses, abonándose los intereses producidos en una cuenta corriente de la que esta persona es titular. Determinar el TAE de la imposición, sabiendo que la liquidación de intereses se realiza de forma trimestral y que los tipos de interés nominales anuales son el 10% para el primer semestre y el 8% para el segundo.

Resolución

Hemos de utilizar el sistema financiero de capitalización simple, ya que los intereses generados se abonan en otra cuenta. De esta forma, al ser la liquida-

© Ediciones Pirámide

ción trimestral, los intereses de cada trimestre correspondientes al primer semestre son:

$$I_{\frac{1}{4}} = I_{\frac{2}{4}} = 125.000 \times 0{,}10\frac{1}{4} = 3.125$$

Por otra parte, los intereses de cada trimestre del segundo semestre se calculan utilizando el mismo capital inicial y con el tipo de interés del 8% anual:

$$I_{\frac{3}{4}} = I_{\frac{4}{4}} = 125.000 \times 0{,}08\frac{1}{4} = 2.500$$

Finalmente, para determinar el TAE de la operación, previamente hemos de calcular el tipo efectivo trimestral, el cual se obtiene al plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$125.000 = 3.125 \times a_{\overline{2}|i^{(m)}_{TAE}} + 2.500 \times a_{\overline{2}|i^{(m)}_{TAE}}(1 + i^{(m)}_{TAE})^{-2} + 125.000(1 + i^{(m)}_{TAE})^{-4}$$

De la misma se obtiene un tipo efectivo trimestral del 2,2556%, siendo, por tanto, el TAE su equivalente anual:

$$i_{TAE} = (1 + 0{,}022556)^4 - 1 = 9{,}3322\%$$

2. Se impone a plazo fijo un capital de 250.000 euros durante 18 meses, abonándose en una cuenta corriente los rendimientos que se generen. El tipo de interés es el 12% nominal anual durante el primer semestre para el 25% del capital impuesto. Una vez transcurridos los seis primeros meses, se retira dicho 25%. El tipo de interés semestral a aplicar al 75% restante se obtiene del 80% de la revalorización positiva que presente el índice Ibex-35 en el período contratado, siendo la liquidación de intereses semestral. Determinar el tipo efectivo de la citada imposición a plazo fijo, sabiendo que el valor del Ibex-35 al comienzo de la operación fue de 16.500 puntos, y que el valor presentado al final de cada uno de los 3 semestres de duración de la imposición fue de 17.100, 17.750 y 18.500, respectivamente.

Resolución

Los intereses que genera la parte impuesta al 12% anual son los siguientes:

$$I_1 = 250.000 \times 0{,}25 \times 0{,}12\frac{1}{2} = 3.750$$

Para el 75% restante de la imposición, hemos de calcular el tipo de interés correspondiente, el cual será el 80% de la revalorización que presente el Ibex-35

© Ediciones Pirámide

en el plazo de la imposición. Tanto para la revalorización como para el tipo de interés semestral, expresados en forma porcentual, tomamos cuatro decimales. Los intereses semestrales se muestran en la siguiente tabla:

Semestre	Valor Ibex-35	Revalorización (%)	Tipo de interés (%)	Interés semestral
0	16.500	—	—	—
1	17.100	3,6364	2,9091	5.454,56
2	17.750	3,8012	3,0410	5.701,88
3	18.500	4,2254	3,3803	6.338,06

Los intereses semestrales anteriores se han obtenido de la forma que se indica a continuación:

$$I_1' = 250.000 \times 0{,}75 \times 0{,}029091 = 5.454{,}56$$

$$I_2' = 250.000 \times 0{,}75 \times 0{,}030410 = 5.701{,}88$$

$$I_3' = 250.000 \times 0{,}75 \times 0{,}033803 = 6.338{,}06$$

Finalmente, el tipo efectivo activo semestral es del 3,4031 %, el cual se obtiene al plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$250.000 = (3.750 + 250.000 \times 0{,}25 + 5.454{,}56)(1 + i_a^{(m)})^{-1} + 5.701{,}88(1 + i_a^{(m)})^{-2} + \\ + (6.338{,}06 + 250.000 \times 0{,}75)(1 + i_a^{(m)})^{-3}$$

Siendo su equivalente anual $i_a = (1 + 0{,}034031)^2 - 1 = 6{,}9221\,\%$.

3. Cierta empresa ha de abonar a un proveedor dentro de X días un capital de 6.000 euros. Dicho proveedor permite que se cambie el citado pago por uno de 4.500 euros 20 días antes y los 1.500 euros restantes dentro de $2X$ días. Sabiendo que se ha pactado una ley financiera de descuento simple comercial, calcular el vencimiento de cada capital.

Resolución

Dado que al proveedor le es indiferente la recepción de un solo capital dentro de X días o bien de dos capitales financieros con los vencimientos mencionados anteriormente, el capital de 6.000 euros ha de ser equivalente a la suma financiera

© Ediciones Pirámide

de los capitales que el proveedor permite como alternativa en base a una ley financiera de descuento, estando referido el tipo de descuento a días:

$$6.000(1 - Xd) = 4.500[1 - (X - 20)d] + 1.500(1 - 2Xd) \quad \Rightarrow \quad X = 60$$

Por tanto, el pago de 6.000 euros se realizaría dentro de 60 días, o bien la empresa pagará 4.500 euros dentro de 40 días y 1.500 euros dentro de 120 días.

4. El 20 de julio se pacta una operación de descuento financiero mediante una letra de 5.000 euros de valor nominal, la cual tiene como fecha de vencimiento el 3 de septiembre del mismo año. La entidad financiera aplica a sus operaciones de descuento un tipo del 7% anual y una comisión del 1% del nominal negociado. Además, el notario recibe el 0,5% del nominal de la letra y los impuestos ascienden a 12 €. Determinar los tantos efectivos de descuento del cliente y de la entidad, y los tantos efectivos de interés activo y pasivo.

Resolución

Dado que el efectivo del cliente se obtiene como resultado de restarle a la cuantía del nominal de la letra el descuento simple comercial, la comisión bancaria, los honorarios del notario y los impuestos, vamos a calcular previamente dichos importes.

En cuanto al descuento simple comercial, el número de días que existen entre el 20 de julio y el 3 de septiembre es de 45, por lo que el descuento simple comercial asciende a:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{5.000 \times 45 \times 0,07}{360} = 43,75$$

La comisión que cobra la entidad financiera y los honorarios del notario son, respectivamente:

$$G = 0,01 \times 5.000 = 50$$

$$G' = 0,005 \times 5.000 = 25$$

Por tanto, el efectivo a percibir por el cliente es:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I = 5.000 - 43,75 - 50 - 25 - 12 = 4.869,25$$

Una vez conocida la cuantía a percibir por el cliente, el tipo efectivo de descuento es el que verifica la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía

© Ediciones Pirámide

percibida por el cliente, siendo éste del 20,92% anual. La expresión que permite su cálculo es la siguiente:

$$E_c = C(1 - n \times d_c) \quad \Rightarrow \quad 4.869{,}25 = 5.000\left(1 - \frac{45}{360} \times d_c\right)$$

En cuanto al cálculo del tipo de rentabilidad que obtiene la entidad financiera, previamente se ha de determinar el efectivo que desembolsa la misma:

$$E_B = C - D_{sc} - G = 5.000 - 43{,}75 - 50 = 4.906{,}25$$

Por tanto, el tipo efectivo de descuento para la entidad financiera es el que verifica la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía abonada por ésta, siendo del 15% anual. La expresión que permite su cálculo es la siguiente:

$$E_B = C(1 - n \times d_B) \quad \Rightarrow \quad 4.906{,}25 = 5.000\left(1 - \frac{45}{360} \times d_B\right)$$

El tipo anual efectivo en capitalización compuesta para el cliente o tipo efectivo de coste se deduce de la siguiente ecuación entre las cuantías que recibe y entrega:

$$E_c(1 + i_p)^{\frac{n}{365}} = C \quad \Rightarrow \quad 4.869{,}25(1 + i_p)^{\frac{45}{365}} = 5.000 \quad \Rightarrow \quad i_p = 23{,}9773\%$$

Y para la entidad, el tipo anual efectivo activo o de rendimiento se deduce de la ecuación siguiente:

$$E_B(1 + i_a)^{\frac{n}{365}} = C \quad \Rightarrow \quad 4.906{,}25(1 + i_a)^{\frac{45}{365}} = 5.000 \quad \Rightarrow \quad i_a = 16{,}5939\%$$

5. Cierta empresa necesita 60.000 euros para poder comprar un vehículo industrial, por lo que acude a la sucursal de un banco con el propósito de obtener dicha financiación. La entidad le oferta la financiación requerida a través del descuento de una letra financiera con un tipo del 6% anual, siendo el plazo de 240 días. Sabiendo que la comisión bancaria es del 0,5% del nominal de la letra y que el timbre asciende a 30 euros, determinar el valor nominal de la letra de cambio.

Resolución

El descuento simple comercial verifica:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{C \times 240 \times 0{,}06}{360} = 0{,}04C$$

© Ediciones Pirámide

El valor nominal de la letra lo obtenemos utilizando la expresión relativa el efectivo del cliente:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I$$

$$60.000 = C - 0{,}04C - 0{,}005C - 30$$

de donde se obtiene que el valor nominal de la letra es 62.858,64 euros.

6. Debido a la necesidad de obtener liquidez para hacer frente a unos desajustes de tesorería, el director financiero de una empresa solicita a cierta entidad la financiación adecuada, instrumentalizándola a través de una operación de descuento financiero de dos letras con distinto vencimiento. La citada entidad accede a la operación, realizando el descuento con fecha valor el 10 de marzo de cierto año, pactando el primer vencimiento el 24 de abril para la letra de nominal 3.000 €, y el segundo vencimiento el 8 de junio para la letra de nominal 4.000 €. El tipo de descuento que aplica es el 6% anual y la comisión bancaria es el 2% del nominal de cada letra. Sabiendo que la cuantía total pagada por el timbre es de 50 euros, determinar el tipo efectivo de descuento del cliente y el de la entidad financiera.

Resolución

Lo primero que hemos de calcular es la cuantía total del descuento simple comercial que ha de abonar la empresa. Con respecto a la primera letra, cuyo vencimiento es dentro de 45 días, dicho descuento es:

$$D_{sc1} = 3.000\frac{45}{360} \times 0{,}06 = 22{,}50$$

Con respecto a la segunda letra, de vencimiento dentro de 90 días, el descuento simple comercial es:

$$D_{sc2} = 4.000\frac{90}{360} \times 0{,}06 = 60$$

Por tanto, el descuento simple comercial abonado por las dos letras es 82,50€.
En cuanto a la comisión bancaria, tenemos:

$$G_T = G_1 + G_2 = 0{,}02 \times 3.000 + 0{,}02 \times 4.000 = 60 + 80 = 140$$

Por tanto, el efectivo del cliente será el nominal de las dos letras menos todos los gastos en los que incurre la empresa:

$$E_c = C_1 + C_2 - D_{scT} - G_T - T = 3.000 + 4.000 - 82{,}50 - 140 - 50 = 6.727{,}50$$

© Ediciones Pirámide

El tipo efectivo de descuento del cliente es del 19,8182% anual, el cual se obtiene de la ecuación de equivalencia financiera entre el capital recibido por el cliente y el nominal de las dos letras, de vencimiento dentro de 45 y 90 días, respectivamente:

$$E_c = C_1(1 - n_1 \times d_c) + C_2(1 - n_2 \times d_c)$$

$$6.727{,}50 = 3.000\left(1 - \frac{45}{360} \times d_c\right) + 4.000\left(1 - \frac{90}{360} \times d_c\right)$$

En cuanto al efectivo desembolsado por la entidad, se calcula restando al nominal de las dos letras el importe del descuento simple comercial y el de la comisión:

$$E_B = C_1 + C_2 - D_{scT} - G_T = 3.000 + 4.000 - 82{,}50 - 140 = 6.777{,}50$$

Por tanto, el tipo efectivo de descuento de la entidad, el cual asciende al 16,1818% anual, se obtiene de la equivalencia financiera entre el efectivo del banco y los nominales de las letras negociadas:

$$E_B = C_1(1 - n_1 \times d_B) + C_2(1 - n_2 \times d_B)$$

$$6.777{,}50 = 3.000\left(1 - \frac{45}{360} \times d_B\right) + 4.000\left(1 - \frac{90}{360} \times d_B\right)$$

7. La falta de liquidez de cierta empresa ha derivado en la solicitud por parte de ésta de un préstamo que se formaliza a través del descuento de una letra financiera con vencimiento dentro de 105 días. La entidad financiera aplica un tipo de descuento del 8% y cobra una comisión del 0,5% del nominal de la letra. Además, el Notario de la operación cobra el 0,1% del nominal de la citada letra y la cuantía del timbre asciende a 12 euros. Sabiendo que el tipo efectivo de descuento del cliente es el 10,40% anual, determinar el valor nominal de la letra.

Resolución

Dado que no es conocido el nominal de la letra financiera, no es posible, a priori, obtener la cuantía del descuento simple comercial ni la de las comisiones a abonar por el cliente, las cuales quedarán en función de dicho valor nominal:

$$D_{sc} = C\frac{105}{360} \times 0{,}08 = 0{,}02\hat{3}C$$

$$G = 0{,}005C \quad ; \quad G' = 0{,}001C$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el efectivo del cliente quedará en función del nominal de la letra:

$$E_c = C - D_{sc} - G - G' - I = C - 0{,}02\hat{3}C - 0{,}005C - 0{,}001C - 12 = 0{,}970\hat{6}C - 12$$

Finalmente, al ser conocido el tipo efectivo de descuento del cliente, se plantea la equivalencia financiera entre el valor nominal de la letra y el efectivo percibido por el cliente, obteniéndose el valor nominal:

$$E_c = C(1 - n \times d_c) \quad \Rightarrow \quad 0{,}970\hat{6}C - 12 = C\left(1 - \frac{105}{360} \times 0{,}104\right) \quad \Rightarrow \quad C = 12.000\,€$$

8. En determinada entidad se realiza una operación de descuento financiero de una letra de 6.500 euros con vencimiento dentro de 75 días al 14% anual. Sabiendo que el cliente ha de satisfacer 20 euros en concepto de impuestos y que la comisión bancaria es del 2,5% del nominal de la letra, determinar el tipo efectivo para el cliente resultante de la liquidación en los siguientes casos: *a*) el mínimo a cobrar por comisión bancaria es 150 euros, y *b*) la comisión bancaria mínima es 200 euros.

Resolución

a) El descuento simple comercial es:

$$D_{sc} = \frac{C \times n \times d}{360} = \frac{6.500 \times 75 \times 0{,}14}{360} = 189{,}58$$

En cuanto a la comisión bancaria, su importe es el 2,5% del nominal de la letra, es decir, $G = 0{,}025 \times 6.500 = 162{,}50$, cantidad que supera el mínimo a cobrar por la entidad.

Por tanto, el efectivo del cliente será la diferencia entre el nominal y todos los gastos a pagar por el cliente:

$$E_c = 6.500 - 189{,}58 - 162{,}50 - 20 = 6.127{,}92$$

El tipo efectivo de descuento es aquel que verifica la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía percibida por el cliente:

$$6.127{,}92 = 6.500\left(1 - \frac{75}{360} \times d_c\right) \quad \Rightarrow \quad d_c = 27{,}4767\%$$

b) El descuento simple comercial coincide con el del apartado *a*), pero como la comisión bancaria no supera el mínimo a cobrar por la entidad, 162,50 < 200,

© Ediciones Pirámide

dicho mínimo es la cuantía a considerar. Por tanto, el efectivo del cliente es la diferencia entre el nominal y todos los gastos a pagar por el mismo:

$$E'_c = 6.500 - 189{,}58 - 200 - 20 = 6.090{,}42$$

El tipo efectivo de descuento anual es aquel que verifica la equivalencia financiera entre el nominal y la cuantía percibida por el cliente:

$$6.090{,}42 = 6.500\left(1 - \frac{75}{360} \times d'_c\right) \quad \Rightarrow \quad d'_c = 30{,}2459\%$$

9. Hace 18 meses un ahorrador contrató en una entidad financiera una cuenta a plazo fijo de 2 años. El tipo de interés pactado es el 4,5% nominal anual con abono mensual de intereses. Al final de cada mes, la entidad le abona en la cuenta los intereses correspondientes después de practicar una retención sobre los mismos del 18% a cuenta de impuestos. En estos momentos (final del mes 18), la retención practicada sobre los intereses de dicho mes asciende a 35,56 €. Determinar: *a*) capital inicial impuesto; *b*) cuantía disponible al finalizar la operación; *c*) intereses netos obtenidos y retención practicada en los 12 primeros meses, y *d*) intereses íntegros devengados en los 2 años y retención efectuada.

Resolución

a) El tipo de interés mensual de la imposición es el $i^{(m)} = 4{,}5\%/12 = 0{,}375\%$. Al retenerle el 18%, el tipo neto mensual de acumulación es el $i'^{(m)} = 0{,}375\% \times \times 0{,}82 = 0{,}3075\%$.

Dado que la retención practicada al final del mes 18 es de 35,56 €, los intereses brutos de dicho mes se deducen de la ecuación: $35{,}56 = I_{18} \times 0{,}18 \quad \Rightarrow \quad I_{18} = = 197{,}56$, por lo que los intereses netos son: $I'_{18} = 197{,}56 \times 0{,}82 = 162{,}00$.

Por consiguiente, el capital acumulado hasta el mes 17 se deduce de la siguiente ecuación:

$$162 = C_{17} \times 0{,}3075\% \quad \Rightarrow \quad C_{17} = 52.682{,}93$$

Por tanto, el capital impuesto inicialmente asciende a:

$$52.682{,}93 = C_0(1 + 0{,}003075)^{17} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 50.003{,}68 \text{ €}$$

b) Al finalizar la operación, el capital del que dispondrá el cliente es:

$$C_{24} = 50.003{,}68(1 + 0{,}003075)^{24} = 53.827{,}44 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

c) Para determinar la cuantía de los intereses netos obtenidos en los 12 primeros meses, previamente hemos de calcular el capital acumulado en dicho momento:

$$C_{12} = 50.003{,}68(1 + 0{,}003075)^{12} = 51.880{,}34$$

Por lo que los intereses netos obtenidos en el primer año son: $I' = 51.880{,}34 - 50.003{,}68 = 1.876{,}66$. Como se le retiene el 18% de los intereses íntegros, los netos suponen el 82% de éstos:

$$I' = 1.876{,}66 = 0{,}82 \times I \quad \Rightarrow \quad I = 2.288{,}61 \text{ €}$$

En consecuencia, la cuantía total retenida en 12 meses es:

$$R = I - I' = 2.288{,}61 - 1.876{,}66 = 411{,}95 \text{ €}.$$

d) Los intereses netos obtenidos en 2 años son:

$$I'_T = C_{24} - C_0 = 3.823{,}76$$

Los intereses brutos o íntegros se deducen de: $I'_T = 3.823{,}76 = 0{,}82 \times I_T$. En consecuencia, los intereses brutos ascienden a 4.663,12 €, verificando la cuantía total retenida:

$$R_T = 4.663{,}12 \times 0{,}18 = 839{,}36 \text{ €}$$

10. Un ahorrador abre una cuenta en cierta entidad financiera con las siguientes condiciones: acumulación mensual de intereses en la misma a razón del 3,96% nominal anual; plazo de 6 meses, al final de los cuales retirará los intereses netos acumulados y el capital inicial; el tipo de retención sobre los intereses de cada mes es el 18%. Sabiendo que la cuantía total retenida en los 6 meses asciende a 143,52 €, determinar: *a*) intereses íntegros producidos; *b*) intereses netos obtenidos, y *c*) montante disponible al finalizar la operación.

Resolución

a) El tipo de interés mensual de la imposición es el $i^{(m)} = 0{,}0396/12 = 0{,}33\%$. Al retenerle el 18%, el tipo neto mensual de acumulación es el $i'^{(m)} = 0{,}33\% \times 0{,}82 = 0{,}2706\%$.

Dado que la cuantía total retenida en los 6 meses asciende a 143,52 €, los intereses íntegros son:

$$143{,}52 = I \times 0{,}18 \quad \Rightarrow \quad I = 797{,}33 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

b) Por tanto, los intereses netos son el 82% de la cuantía anterior:

$$I' = 797{,}33 \times 0{,}82 = 653{,}81 \text{ €}$$

c) Con la citada cantidad podemos obtener la cuantía impuesta inicialmente:

$$653{,}81 = C_0[(1 + 0{,}002706)^6 - 1] \quad \Rightarrow \quad C_0 = 39.997{,}59$$

Finalmente, transcurridos los 6 meses de duración de la operación, el montante disponible es:

$$C_6 = 39.997{,}59(1 + 0{,}002706)^6 = 40.651{,}40 \text{ €}$$

11. Con fecha valor 19 de junio de cierto año se descuentan en cierta entidad financiera las siguientes letras:

Letra	Vencimiento	Nominal
1	29/06	4.500
2	19/07	6.000
3	17/09	2.700

La entidad aplica a estas operaciones el 8% anual, así como una comisión del 1% del nominal de cada letra, con un mínimo de 30 €. Determinar los tantos efectivos de descuento y de interés para el cliente, así como el TAE de la operación.

Resolución

Las cuantías a abonar por el cliente en concepto de descuento simple comercial se calculan en base al nominal de cada letra al tipo de descuento anual y a la duración, expresada en años, de cada una de ellas. La siguiente tabla recoge los diferentes valores abonados como descuento simple comercial:

Letra	Nominal	Días hasta vencimiento	Descuento
1	4.500	10	10
2	6.000	30	40
3	2.700	90	54
Total	13.200	—	104

© Ediciones Pirámide

En cuanto a la comisión bancaria, su importe es del 1% del nominal de cada letra, siempre que sea superior al mínimo a cobrar por la entidad (30 €). La siguiente tabla recoge los diferentes valores abonados como comisión bancaria:

Letra	Comisión	Mínimo	Comisión a pagar
1	45	30	45
2	60	30	60
3	27	30	30
Total	—	—	135

Por tanto, el efectivo a percibir por el cliente es la diferencia entre el nominal del conjunto de letras y todos los gastos a pagar:

$$E_c = \sum_{r=1}^{3} C_r - \sum_{r=1}^{3} D_{sc_r} - \sum_{r=1}^{3} G_r = 13.200 - 104 - 135 = 12.961$$

El tipo efectivo anual de descuento es el 18,3846%, que es el que verifica la equivalencia financiera entre el nominal de cada letra y la cuantía percibida por el cliente:

$$12.961 = 4.500\left(1 - \frac{10}{360} \times d_c\right) + 6.000\left(1 - \frac{30}{360} \times d_c\right) + 2.700\left(1 - \frac{90}{360} \times d_c\right)$$

El tipo de interés anual efectivo en capitalización compuesta para el cliente o tipo efectivo de coste es del 20,8365%, el cual se deduce de la siguiente ecuación entre la cuantía recibida y las entregadas:

$$12.961 = 4.500(1 + i_p)^{\frac{-10}{365}} + 6.000(1 + i_p)^{\frac{-30}{365}} + 2.700(1 + i_p)^{\frac{-90}{365}}$$

Finalmente, para calcular el TAE de la operación incluimos como comisión sólo las cuantías que superan al mínimo establecido por la entidad (30 €). Además, la letra con vencimiento inferior a 15 días no se incluye en el cálculo del TAE. En este sentido, el efectivo del cliente, a efectos del TAE, es:

$$E_c' = \sum_{r=1}^{2} C_r - \sum_{r=1}^{2} D_{sc_r} - \sum_{r=1}^{2} G_r^* = 8.700 - 94 - 30 = 8.576$$

Por tanto, el TAE de la operación de descuento es el 11,4070% anual, deducido de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$8.576 = 6.000(1 + i_{TAE})^{\frac{-30}{365}} + 2.700(1 + i_{TAE})^{\frac{-90}{365}}$$

© Ediciones Pirámide

17.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Cierta persona impone a plazo fijo un capital de 50.000 euros durante 36 meses. Sabiendo que los intereses que se producen se abonan en una cuenta corriente de la que esta persona es titular, determinar el TAE de la imposición, sabiendo que la liquidación de intereses se realiza de forma cuatrimestral y que los tipos de interés nominales anuales son del 15% para el primer año, 8% para el segundo y 6% para el tercero.

2. Se impone a plazo fijo un capital de 30.000 euros durante 36 meses, abonándose en una cuenta corriente los rendimientos semestrales que se generen. El tipo de interés es el 18% anual durante el primer semestre para el 40% del capital impuesto. Una vez transcurrido dicho primer semestre, se devolverá el citado 40% del capital. El tipo de interés semestral a aplicar al 60% restante se obtiene del 75% de la revalorización positiva que presente el índice Ibex-35 en el período contratado, siendo la liquidación de intereses por semestres. Determinar el tipo efectivo anual de la citada imposición a plazo fijo, sabiendo que el valor del Ibex-35 al comienzo de la operación fue de 20.500 puntos, y que el valor presentado al final de cada uno de los 6 semestres de duración de la imposición fue de 22.000, 23.500, 24.000, 24.250, 25.250 y 27.000, respectivamente.

3. Sabiendo que un capital de 10.000 euros con vencimiento dentro de X días se puede desdoblar de forma equivalente, en base a una ley financiera de descuento simple comercial, por dos capitales de 5.000 euros con vencimientos, respectivamente, 30 días antes que el vencimiento del primer capital y a los $2X$ días, calcular el vencimiento del primer capital.

4. Con fecha valor 14 de agosto de cierto año, una entidad financiera ha descontado una letra a un cliente, percibiendo éste 3.955 euros. La citada letra tiene por nominal 4.000 euros y el vencimiento es el 28 de octubre. Sabiendo que la entidad financiera ha cobrado una comisión del 0,5% del nominal de la letra, calcular el tipo de descuento que dicha entidad aplicó en la operación.

5. Con el propósito de obtener en efectivo 9.000 euros, un empresario acude a su entidad financiera habitual para formalizar una operación de descuento financiero mediante una letra a 150 días. Sabiendo que la entidad financiera acordó con el citado empresario un tipo de descuento del 7% anual y una comisión del 1% del nominal y que el timbre fue de 15 euros, calcular el importe nominal de la letra.

6. El 2 de noviembre se pacta una operación de préstamo mediante el descuento financiero de una letra de 7.500 euros de valor nominal, la cual tiene como fecha de vencimiento el 31 de enero del año siguiente. La entidad finan-

© Ediciones Pirámide

ciera aplica a sus operaciones de descuento un tipo del 6% anual y una comisión del 1,5% del nominal negociado. Además, el notario recibe el 0,5% del nominal de la letra y los impuestos ascienden a 15 €. Determinar los tantos efectivos de descuento del cliente y de la entidad, y los tantos efectivos de interés activo y pasivo.

7. La falta de liquidez necesaria para afrontar una inversión ha provocado que cierta empresa acuda a su banco habitual para solicitar un préstamo que se formaliza mediante la negociación de dos letras financieras. La primera de ellas tiene un nominal de 10.000 euros con vencimiento dentro de 30 días. En cuanto a la segunda letra, el nominal es de 12.000 euros, siendo su vencimiento dentro de 120 días. El tipo de descuento acordado es del 3,6% anual y la comisión asciende al 0,8% del nominal. Sabiendo que el timbre total fue de 60 euros, determinar el tipo efectivo de descuento del cliente y de la entidad financiera derivados de la operación de descuento de ambas letras.

8. Cierta entidad de crédito aplica en sus operaciones de descuento financiero un tipo del 5% anual, siendo la comisión del 1% del valor nominal de los efectos descontados. Además, el comercial de la entidad cobra al cliente como comisión por sus servicios el 0,15% del nominal que se negocie. Sabiendo que en una operación con vencimiento dentro de 90 días el tipo efectivo de descuento del cliente es del 10,10% anual y el timbre asciende a 20 euros, calcular el nominal de la letra negociada.

9. Un determinado préstamo se formaliza con cierta entidad mediante una operación de descuento financiero de una letra de 10.000 euros con vencimiento dentro de 150 días al 8% anual. Sabiendo que el cliente tuvo que satisfacer 75 euros en concepto de impuestos y que la comisión bancaria es del 2% del nominal de la letra, determinar el tipo efectivo de descuento para el cliente en los siguientes casos: *a*) el mínimo a cobrar por comisión bancaria es 150 euros; y *b*) la comisión bancaria mínima es 250 euros.

10. Un ahorrador abre una cuenta en cierta entidad financiera con las siguientes condiciones: intereses a razón del 4,2% nominal anual; abono mensual de los intereses netos en la citada cuenta; el tipo de retención fiscal sobre los intereses producidos cada mes es el 18%; plazo de 12 meses, al final de los cuales retirará los intereses netos acumulados en la cuenta y el capital inicial. Sabiendo que al finalizar el plazo señalado anteriormente retira un montante de 10.349,89 €, hallar la cuantía total retenida en los 9 primeros meses.

11. Con fecha valor 15 de abril de cierto año se descuentan en cierta entidad financiera las siguientes letras:

© Ediciones Pirámide

Letra	Vencimiento	Nominal
1	23 de abril	10.000
2	30 de mayo	8.000
3	13 de agosto	5.000

La entidad aplica a estas operaciones el 6% anual, así como una comisión del 1,5% del nominal de cada letra, con un mínimo de 100 €. Determinar los tantos efectivos de descuento y de interés para el cliente, así como el TAE de la operación.

© Ediciones Pirámide

PARTE SEXTA
Empréstitos

18 Estudio general de los empréstitos

OBJETIVOS

- Identificar y diferenciar cada una de las modalidades de empréstitos.
- Realizar el análisis financiero de cada obligación y del empréstito en su conjunto.
- Plantear la estructura de los términos amortizativos según el tipo de empréstito.
- Determinar los componentes del cuadro de amortización en las diversas modalidades estudiadas.

SUMARIO

18.1. Concepto.
18.2. Modalidades.
18.3. Empréstitos normales sin cancelación escalonada.
18.4. Empréstitos normales amortizables por sorteo y pago periódico de intereses pospagables.
18.5. Empréstitos normales amortizables por sorteo y pago de intereses acumulados.
18.6. Ejercicios y problemas resueltos.
18.7. Ejercicios y problemas propuestos.

18.1. CONCEPTO

Las grandes empresas, el Estado y las Administraciones Públicas pueden necesitar, en un momento determinado, cuantías monetarias elevadas para llevar a cabo sus proyectos de inversión. Una forma de obtener la financiación deseada es a través de la financiación externa. Ahora bien, dada la dificultad que supone encontrar un prestamista dispuesto a vincular elevados recursos a una sola operación, asumiendo el riesgo que ello conlleva, se suele optar por dividir la financiación solicitada en múltiples préstamos, lo que permite acceder a la operación a un conjunto de pequeños inversores que se convierten así en prestamistas de dicha operación. El conjunto de estos préstamos constituye un empréstito.

Se puede definir un empréstito como[1] **una agregación de préstamos de igual cuantía, amortizables con la misma ley financiera e idéntica contraprestación.**

Cada uno de estos préstamos se corresponde con un título llamado genéricamente **obligación,** aunque también puede recibir el nombre de bono, cédula, etc. Por tanto, cada título representa una parte alícuota de la suma prestada a la entidad que los emitió. La fracción de capital que representa un título constituye su **nominal**, por lo que la prestación de cada uno de los préstamos que integran el empréstito es el nominal de cada título.

Los sujetos que adquieren estas obligaciones se denominan obligacionistas y son los prestamistas de la operación. El sujeto que emite las obligaciones es el emisor del empréstito y es el prestatario de dicha operación.

El precio al que se oferta el título se llama **valor de emisión,** y puede coincidir o no con el valor nominal.

---

[1] Sobre un concepto amplio de empréstitos puede verse Gil Peláez (1987: 557-563).

© Ediciones Pirámide

Cada préstamo puede ser americano, simple o elemental, o de cualquier otra modalidad, si bien en un empréstito concreto todos los títulos han de ser amortizados por el mismo método.

Por consiguiente, todas las obligaciones de un empréstito tienen el mismo nominal, igual precio de emisión, igual duración cierta o aleatoria equiprobable, y comportan los mismos derechos, los cuales son los siguientes:

— Si los títulos representan préstamos americanos, el obligacionista percibe periódicamente los intereses, denominados cupones, calculados sobre el nominal del título, y en el momento de la amortización la cantidad que cancele la deuda, denominada valor de reembolso.
— Si los títulos representan préstamos simples, el poseedor de los mismos tendrá derecho al valor de reembolso en el que estarán incluidos los intereses acumulados hasta el momento de la amortización.
— Si los títulos representan cualquier otra modalidad de préstamo, el obligacionista percibirá los capitales derivados de la amortización según las características propias de tal modalidad.

Al ser un empréstito una operación de amortización, los planteamientos a realizar coinciden con los estudiados en los préstamos, con la particularidad de que en este caso la operación está formada por múltiples préstamos de idénticas características.

Con el objetivo de clarificar la nomenclatura a utilizar en los empréstitos, recogemos en la siguiente tabla la correspondencia entre la de los empréstitos normales amortizables por sorteo y pago periódico de cupones[2] y la ya estudiada en los préstamos:

Concepto	Empréstitos	Préstamos
Número de obligaciones emitidas.	N_1	—
Valor nominal de una obligación.	C	—
Valor nominal del empréstito/Cuantía del préstamo.	N_1C	C_0
Número de períodos de duración de la operación.	n	N
Número de títulos amortizados en el período s.	M_s	—
Capital amortizado en el período s.	M_sC	A_s
Número de títulos amortizados en los s primeros períodos.	M_s^e	—
Capital total amortizado en los s primeros períodos.	M_s^eC	M_s^e
Números de títulos vivos al principio del período $s + 1$.	N_{s+1}	—
Saldo de la operación al principio del período $s + 1$.	$N_{s+1}C$	C_s
Término amortizativo del período s.	a_s	a_s

[2] En el siguiente epígrafe se definen estos conceptos.

© Ediciones Pirámide

18.2. MODALIDADES

De acuerdo con lo expuesto, podemos clasificar los empréstitos atendiendo a diferentes criterios, de los cuales vamos a estudiar los siguientes:

a) **Por la duración de los títulos.** Distinguimos entre empréstitos cuyos títulos tienen la misma duración, y empréstitos con títulos de distinta duración.

a.1) Empréstitos con títulos de igual duración: todos los títulos se cancelan en la misma fecha, tratándose de **empréstitos sin cancelación escalonada** en el tiempo.

a.2) Empréstitos con títulos de distinta duración: los títulos se amortizan de forma escalonada en el tiempo, por lo que al final de cada período se cancela un determinado número de ellos. En este caso, cada obligación tendrá un período de vida diferente. La elección de las obligaciones amortizadas en cada período se hace de forma aleatoria, que garantice que todas tengan la misma probabilidad de ser canceladas. También se denomina a esta modalidad **empréstitos amortizables por sorteo** o **con cancelación escalonada**, estando definido el plan o programa de cancelación por el número de títulos que se amortizan en cada período: $\{M_1, M_2, M_3, ..., M_s, ..., M_n\}$.

b) **Por la modalidad de préstamo que representa cada obligación.** Se distingue entre obligaciones americanas, obligaciones simples (o de cupón cero) y obligaciones con amortización progresiva o por reducción del nominal.

b.1) Empréstitos con obligaciones americanas: los títulos representan préstamos americanos, por lo que los obligacionistas percibirán periódicamente cupones, calculados sobre el nominal, y, en el momento de la cancelación, el valor de reembolso. Se trata de **empréstitos con pago periódico de intereses pospagables.**

b.2) Empréstitos con obligaciones simples: se trata de títulos que representan préstamos elementales. En el momento de la cancelación el obligacionista percibe el valor de reembolso del título en el que están incluidos los intereses acumulados hasta ese momento. Son **empréstitos con cupón acumulado** o de cupón cero.

b.3) Empréstitos con obligaciones con amortización progresiva: los títulos representan cualquier otra modalidad de préstamo (francés, de cuota constante, etc.). Durante toda la vida de cada obligación los obligacionistas perciben los intereses y las cuotas de amortización periódicas. De esta forma, el nominal de cada título se va reduciendo periódicamente, por lo que también se le denomina amortiza-

© Ediciones Pirámide

ción **con reducción del nominal.** En el momento de la cancelación el obligacionista percibe el valor de reembolso.

c) **Por la finalidad de los términos.** Los empréstitos pueden ser normales o puros, o bien con características comerciales.

c.1) Empréstitos normales o puros: los títulos son emitidos por su nominal, las cuantías desembolsadas por los obligacionistas son percibidas íntegramente por el emisor, y todos los términos amortizativos tienen como objetivo exclusivo abonar los intereses y devolver el nominal. En este tipo de empréstito es posible distinguir entre:

— **Empréstito normal tipo I,** en el que los términos amortizativos y el tipo de interés son constantes.

— **Empréstito normal tipo II,** si los términos amortizativos son variables y el tipo de interés constante.

— **Empréstito normal tipo III,** en el caso de que los tipos de interés sean variables.

c.2) Empréstitos con características comerciales: cuando no se cumplen las condiciones de los empréstitos normales. En general, en los **empréstitos con características comerciales,** los términos amortizativos, además de abonar intereses y devolver el nominal, están destinados a pagar cuantías adicionales, bien sea en concepto de gastos o por cualquier otro concepto inherente a las características propias del empréstito.

La combinación de los diferentes tipos de empréstitos mencionados da origen a diversas operaciones de empréstitos con características diferentes, como por ejemplo empréstito normal tipo I, amortizable mediante sorteo y abono periódico de intereses pospagables, o bien empréstito con características comerciales, amortizable mediante sorteo y pago de intereses acumulados, etc.

En cualquiera de las modalidades citadas es posible descomponer el término amortizativo en varios sumandos, los cuales representan los conceptos por los que el emisor abona tal término amortizativo: intereses, amortización y características comerciales. Tal descomposición se denomina **estructura del término amortizativo.**

18.3. EMPRÉSTITOS NORMALES SIN CANCELACIÓN ESCALONADA

Todos los títulos que integran estos empréstitos se extinguen en la misma fecha fijada en las condiciones de emisión, teniendo, pues, idéntica duración, por lo que se amortizan con cancelación única total.

© Ediciones Pirámide

El empréstito como operación global está integrado por N_1 préstamos que tienen las mismas condiciones financieras: cuantía, duración, términos amortizativos, saldos, etc. A cualquiera de tales préstamos le son aplicables todas las expresiones ya estudiadas según el método de amortización fijado.

De acuerdo con lo expuesto, las cuantías de los términos amortizativos, cuotas de interés, de amortización, saldos, etc., del empréstito son las correspondientes de cualquiera de los préstamos, multiplicadas por N_1.

Cada obligación representa un préstamo de cuantía C, amortizable con un conjunto de términos amortizativos $\{(a'_1, 1); (a'_2, 2); ...; (a'_n, n)\}$. El empréstito como operación global es una operación financiera de prestación $N_1 \times C$ y contraprestación $\{(a_s, s) \mid a_s = a'_s \times N_1, \forall s = 1, 2, ..., n\}$.

Según las características de la emisión, los títulos pueden representar cualquiera de las modalidades siguientes:

a) **Préstamos u obligaciones americanas:** los términos amortizativos de cada préstamo, hasta el penúltimo período, sólo incluyen intereses, y el del último período contiene intereses y cuota de amortización:

$$a'_s = C \times i_s, \forall s = 1, 2, ..., n - 1; a'_n = C \times i_n + C$$

b) **Préstamos simples u obligaciones de cupón cero:** los términos amortizativos de cada préstamo, hasta el penúltimo período, son nulos, y el último contiene el nominal y los intereses acumulados:

$$a'_s = 0, \forall s = 1, 2, ..., n - 1; a'_n = C\prod_{h=1}^{n}(1 + i_h)$$

c) **Préstamos con obligaciones amortizables por reducción del nominal o amortización progresiva:** los términos amortizativos de cada obligación incluyen cuota de interés (I_s) y de amortización (A_s), la cual se destina a reducir el nominal de cada título, si bien todos tienen la misma duración:

$$a'_s = I_s + A_s = i_s \times C_{s-1} + A_s$$

Se trata de obligaciones que representan préstamos amortizables por cualquier método con cuotas de amortización positivas (método francés, de cuota constante, etc.).

Ejercicio 18.1

Una empresa emite un empréstito de 20 millones de euros, integrado por 100.000 obligaciones de idéntico nominal. Todos los títulos serán cancelados dentro de 7 años y el tipo de interés es del 6% anual. Si los títulos representan préstamos americanos, determinar los términos amortizativos del empréstito.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El nominal de cada obligación (o cuantía de cada préstamo) es el cociente entre el importe total del empréstito y el número de títulos emitidos: $C = \frac{20.000.000}{100.000} =$ = 200. Como los títulos representan préstamos americanos que se cancelan todos una vez transcurridos 7 años, cada uno percibirá en los seis primeros los intereses por importe de 12 € (6% del nominal), y en el año 7 cobrará 212 € (suma del nominal con los intereses de dicho año). En consecuencia, los términos amortizativos de cada título son:

$$a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = a'_5 = a'_6 = 12$$

$$a'_7 = 12 + 200 = 212$$

Al multiplicar por el número de títulos emitidos ($N_1 = 100.000$) se obtienen los términos amortizativos del empréstito:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 12 \times 100.000 = 1.200.000 \text{ €}$$

$$a_7 = 212 \times 100.000 = 21.200.000 \text{ €}$$

Como los títulos son préstamos americanos, las seis primeras cuotas de amortización son nulas y la última es de 200 €.

EJERCICIO 18.2

Un empréstito está formado por 150.000 títulos de nominal 100 €. Las condiciones son: amortización total dentro de 5 años y cupón acumulado del 4% anual. Determinar: *a*) términos amortizativos del empréstito, y *b*) saldo al principio del año 3.

Resolución

a) Se trata de un empréstito cuyos títulos representan préstamos simples y serán amortizados todos en el año 5. En consecuencia, los términos amortizativos de cada título serán:

$$a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = 0$$

$$a'_5 = 100 \times 1{,}04^5 = 121{,}67$$

© Ediciones Pirámide

Al multiplicar por el número de títulos emitidos, se obtienen los términos amortizativos del empréstito:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

$$a_5 = 121{,}67 \times 150.000 = 18.250.500\ €$$

b) Como en los dos primeros años los términos amortizativos son nulos, el saldo de cada título al principio del año 3 es $C_2 = 100 \times 1{,}04^2 = 108{,}16$, y el saldo del empréstito asciende a $N_1 \times C_2 = 150.000 \times 108{,}16 = 16.224.000$.

EJERCICIO 18.3

Una determinada sociedad anónima emite un empréstito formado por 10.000 títulos de igual duración,10 años, de nominal 500 € y cupón anual del 5%. Los títulos se amortizan por el método de cuota constante. Determinar: *a*) término amortizativo del año 4; *b*) cuota de interés del año 8.

Resolución

a) Cada título representa un préstamo de cuantía 500 € que se amortiza en 10 años por el método de cuota constante de capital, de valor $A = \dfrac{500}{10} = 50$ €. Para determinar el término amortizativo del año 4 tenemos:

$$a'_4 = I_4 + A = 0{,}05 \times C_3 + 50$$

$$a'_4 = 0{,}05 \times 7 \times 50 + 50 = 67{,}5$$

El término amortizativo del empréstito en el año 4 es: $a_4 = 67{,}5 \times N_1 = 675.000$ €.

b) La cuota de interés correspondiente a cada obligación en el año 8 se obtiene al multiplicar su saldo al inicio del mismo por el tipo de interés: $I_8 = 3 \times 50 \times \times 5\% = 7{,}5$. Y para todo el empréstito, los intereses del año 8 ascienden a $I_8^T = = 7{,}5 \times N_1 = 75.000$ €.

Es preciso destacar que el saldo de cada título (cada préstamo) va disminuyendo año a año en 50 € (cuota de amortización constante), por lo que estamos en presencia de un empréstito amortizable con reducción del nominal, en el que todos los títulos permanecen vivos hasta el momento de su cancelación en el año 10.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 18.4

Cierta empresa emite un empréstito de 42 millones de euros, integrado por títulos de nominal 600 € y duración común 10 años. El tipo de interés pactado es el 6% anual y cada título será amortizado por el método francés. Determinar: *a*) términos amortizativos; *b*) cuota de amortización del año 4; *c*) cuota de interés del año 7, y *d*) saldo del empréstito al principio del año 7.

Resolución

Cada obligación representa un préstamo francés de 10 años de duración, de cuantía 600 € y amortizable al 6% anual. Como en esta modalidad de préstamo las cuotas de amortización son todas positivas, estamos en presencia de un empréstito formado por 70.000 títulos, amortizable con reducción del nominal, si bien todos los títulos permanecen vivos hasta el final del año 10.

a) Como se trata de un préstamo francés, el término amortizativo constante de cualquiera de las obligaciones es: $600 = a' \times a_{\overline{10}|6\%} \Rightarrow a' = 81{,}52$. Por tanto, el del empréstito asciende a: $a = N_1 \times a' = 5.706.400$ €.

b) Sabemos que en un préstamo francés las cuotas de amortización crecen en progresión geométrica. Por ello determinamos la primera y posteriormente la cuarta, verificándose:

$$A_1 = \frac{C}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{600}{s_{\overline{10}|6\%}} = 45{,}52$$

$$A_4 = A_1(1 + i)^3 = 54{,}22$$

En el cuarto año se reduce el nominal de cada título en 54,22 €. La cuota de amortización del año 4 para el empréstito es: $A_4^T = N_1 \times A_4' = 70.000 \times 54{,}22 = 3.795.400$ €.

c) La cuota de interés del año 7 se obtiene al multiplicar el saldo al inicio de dicho año por el tipo de interés. El saldo de cada título o préstamo al inicio del año 7, por el método prospectivo, se deduce de: $C_6 = a' \times a_{\overline{4}|6\%} = 282{,}48$. Por lo que la cuota de interés de un título en el año 7 es: $I_7 = 282{,}48 \times 0{,}06 = 16{,}95$, y la del empréstito: $I_7^T = 16{,}95 \times 70.000 = 1.186.500$ €.

d) El saldo del empréstito al inicio del año 7 se obtiene al multiplicar el número de títulos emitidos por el saldo de cada obligación en dicho año. Como el saldo es $C_6 = 282{,}48$, queda: $N_1 \times C_6 = 70.000 \times 282{,}48 = 19.773.600$ €.

© Ediciones Pirámide

18.4. EMPRÉSTITOS NORMALES AMORTIZABLES POR SORTEO Y PAGO PERIÓDICO DE INTERESES POSPAGABLES

Se trata de la modalidad de amortización periódica o con **cancelación escalonada,** en la que los títulos representan préstamos americanos de distinta duración, por lo que, de acuerdo con lo ya expuesto, los títulos perciben cupones mientras están vivos o pendientes de amortización y, además, los que resultan amortizados en cada período se determinan por un proceso aleatorio.

La estructura o descomposición del término amortizativo del período s para un **empréstito normal tipo III** es la siguiente:

$$a_s = N_s \times C \times i_s + M_s \times C$$

En la expresión anterior, el primer sumando indica los intereses totales o cupones del período s, calculados sobre los títulos en circulación al principio de dicho período. El segundo sumando indica el importe total de la amortización para el período señalado.

En general, el emisor recibe el valor nominal del empréstito en el momento de la emisión, y al final de cada período abona un término amortizativo, por lo que gráficamente la operación señalada es la siguiente:

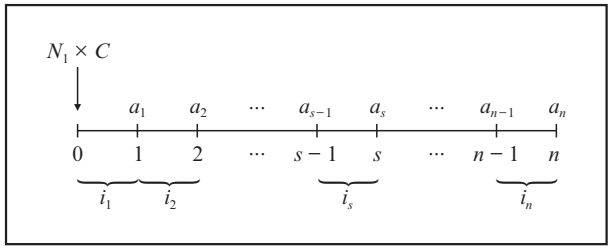


Figura 18.1.

En el origen, la ecuación de equivalencia financiera entre prestación, y contraprestación es:

$$N_1 \times C = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

El saldo al principio del período $s + 1$, por el método prospectivo es:

$$N_{s+1} \times C = \sum_{h=s+1}^{n} a_h \prod_{r=s+1}^{h} (1 + i_r)^{-1}$$

© Ediciones Pirámide

En el caso de **empréstitos tipo II,** los términos amortizativos son variables y el tipo de interés es constante. Por tanto, la estructura del término amortizativo para el período s se corresponde con la expresión siguiente:

$$a_s = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

En cuanto a la ecuación de equivalencia en el origen, tenemos:

$$N_1 \times C = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + i)^{-s}$$

Existen otras relaciones de interés, siendo una de ellas la correspondiente al saldo vivo al principio del período $s + 1$ por el método prospectivo:

$$N_{s+1} \times C = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h} (1 + i)^{-h}$$

También puede interesar la determinación de la ley de variación del número de títulos que se amortizan cada período. Para ello, hemos de partir de la estructura del término amortizativo en dos períodos consecutivos:

$$a_s = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

$$a_{s+1} = N_{s+1} \times C \times i + M_{s+1} \times C$$

Restando miembro a miembro, obtenemos la ley de variación del número de títulos a amortizar en cada período:

$$M_{s+1} = \frac{a_{s+1} - a_s}{C} + M_s (1 + i)$$

Entre este tipo de empréstitos se encuentran los que tienen términos amortizativos variables en progresión aritmética o geométrica, o bien los empréstitos en los que se amortiza un número constante de títulos en cada período. En este último caso se establece una correspondencia directa con los préstamos amortizables con cuotas de capital constantes, por lo que serán de aplicación todas las relaciones estudiadas en estos últimos.

En el **empréstito tipo I,** los términos amortizativos y el tipo de interés son constantes, por lo que la estructura del término amortizativo para el período s es:

$$a = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

Tenemos, pues, una operación de amortización en la que el emisor emite un empréstito de cuantía nominal $N_1 \times C$, que se amortiza con términos amortizati-

© Ediciones Pirámide

vos y tipo de interés constantes. Por tanto, podemos establecer una correspondencia entre esta modalidad de empréstito y las operaciones de préstamo por el método francés, y de esta forma aplicar todas las relaciones estudiadas en este último a la modalidad de empréstito señalada, teniendo siempre presente que en las operaciones de empréstitos existen múltiples préstamos.

Según lo mencionado anteriormente, la ecuación de equivalencia en el origen de la operación para un empréstito normal tipo I es la siguiente:

$$N_1 \times C = a \times a_{\overline{n}|i}$$

El saldo vivo al principio del período $s + 1$, por el método prospectivo, es:

$$N_{s+1} \times C = a \times a_{\overline{n-s}|i}$$

Por el método retrospectivo se cumple:

$$N_{s+1} \times C = N_1 \times C(1 + i)^s - a \times s_{\overline{s}|i}$$

Además, partiendo de la relación existente entre las cuotas de amortización en dos períodos consecutivos en un préstamo por el método francés, es posible obtener el número de títulos que resultan amortizados en cada período en los empréstitos normales tipo I. Así, sabemos que en el método francés las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)$, por lo que en la modalidad de empréstito que estamos analizando se verifica:

$$A_s = A_{s-1}(1 + i) \quad \Rightarrow \quad M_s \times C = M_{s-1} \times C(1 + i) \quad \Rightarrow \quad M_s = M_{s-1}(1 + i)$$

De la expresión anterior se deduce que el número de títulos amortizados en cada período varía en progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

A idéntica conclusión llegamos a través de la estructura de dos términos amortizativos consecutivos:

$$a_s = a = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

$$a_{s+1} = a = N_{s+1} \times C \times i + M_{s+1} \times C$$

Al restar miembro a miembro, y teniendo en cuenta que $N_s - N_{s+1} = M_s$, se llega a la misma conclusión anterior, o sea, $M_s = M_{s-1}(1 + i)$, por lo que, para el período s, se verifica: $M_s = M_1(1 + i)^{s-1}$.

Por otra parte, en cuanto al número de títulos amortizados en el primer período, teniendo en cuenta la correspondencia entre los préstamos amortizables por el método francés y la modalidad de empréstito que estamos analizando, tenemos:

$$A_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{N_1 \times C}{s_{\overline{n}|i}} = M_1 \times C \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}}$$

© Ediciones Pirámide

De igual forma, en cuanto al número de títulos amortizados en los s primeros períodos, tenemos:

$$M_s^e = A_1 \times s_{\overline{s}|i} \quad \Rightarrow \quad M_s^e \times C = M_1 \times C \times s_{\overline{s}|i} \quad \Rightarrow \quad M_s^e = M_1 \times s_{\overline{s}|i}$$

EJERCICIO 18.5

Sea un empréstito de 10.000 títulos de 50 euros nominales, a amortizar por sorteo en 10 años y con cupón periódico del 5% anual. Determinar el término amortizativo constante anual, así como el número de títulos que se amortizan en el año 6.

Resolución

De la ecuación de equivalencia en el origen de la operación entre prestación y contraprestación obtenemos la cuantía del término amortizativo constante:

$$N_1 \times C = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 10.000 \times 50 = a \times a_{\overline{10}|0,05} \quad \Rightarrow \quad a = 64.752{,}29 \text{ €}$$

El número teórico de títulos que se amortizan en el primer sorteo es:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{10.000}{s_{\overline{10}|0,05}} = 795{,}05$$

El número teórico de títulos que resultan amortizados en el sorteo del año es:

$$M_s = M_1(1 + i)^{s-1} \quad \Rightarrow \quad M_6 = M_1\,(1 + 0{,}05)^5 = 795{,}05 \times 1{,}05^5 = 1.014{,}71$$

El número amortizado de títulos en cada período ha de ser entero, por lo que, una vez hallados todos los valores teóricos, es necesario redondear a números enteros, de tal forma que el número total de títulos amortizados a lo largo de la vida del empréstito coincida con el total de títulos emitidos.

EJERCICIO 18.6

Una empresa emite un empréstito formado por 12.000 títulos de 60 € nominales a amortizar mediante sorteo en 15 años con anualidad constante. Si el cupón anual de cada título asciende a 2,4 €, determinar: *a*) el término amortizativo; *b*) número de títulos amortizados en el noveno sorteo; *c*) número de títulos en circulación al principio del año 9; *d*) número de títulos amortizados en los 6 primeros años, y *e*) número de títulos amortizados en los sorteos del 9 al 13, ambos inclusive.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Según los datos del enunciado, tenemos:

$$N_1 = 12.000;\ C = 60;\ n = 15;\ C \times i = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{2{,}4}{60} = 0{,}04 \text{ anual}$$

a) Para obtener la cuantía del término amortizativo, planteamos la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$N_1 \times C = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 12.000 \times 60 = a \times a_{\overline{15}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad a = 64.757{,}59\ €$$

b) Los números teóricos son:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{12.000}{s_{\overline{15}|0{,}04}} = 599{,}29$$

$$M_9 = M_1(1 + i)^8 = 599{,}29 \times 1{,}04^8 = 820{,}17$$

c) Para hallar el número teórico de títulos vivos al principio del año 9 planteamos la ecuación del saldo al inicio de dicho año por el método prospectivo:

$$N_9 \times C = a \times a_{\overline{15-8}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad N_9 \times 60 = 64.757{,}59 \times a_{\overline{7}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad N_9 = 6.477{,}98$$

d) El número teórico de títulos amortizados en los seis primeros años es:

$$M_6^e = M_1 \times s_{\overline{6}|4\%} = 599{,}29 \times s_{\overline{6}|4\%} = 3.975{,}08$$

e) Para calcular el número de títulos amortizados entre los años 9 y 13, ambos inclusive, es preciso hallar la suma del número de títulos amortizados en cada uno de esos años: $M_{[9,13]}^e = M_9 + M_{10} + M_{11} + M_{12} + M_{13}$. Ahora bien, una forma más sencilla se obtiene a través del siguiente razonamiento. Si al número de títulos en circulación al principio del año 9 le restamos el número de títulos vivos al principio del año 14, obtenemos los amortizados en ese tramo temporal:

$$M_{[9,13]}^e = N_9 - N_{14}$$

$$N_9 \times C = a \times a_{\overline{7}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad N_9 = 6.477{,}98$$

$$N_{14} \times C = a \times a_{\overline{2}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad N_{14} = 2.035{,}65$$

$$M_{[9,13]}^e = 4.442{,}33$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 18.7

Una empresa emite un empréstito integrado por 10.000 títulos de nominal 100 €, amortizables por sorteo en 5 años con términos amortizativos anuales constantes y pago periódico de cupones al 3% anual. Confeccionar el cuadro de amortización.

Resolución

De igual forma a lo señalado en los préstamos, en el cuadro de amortización de cualquier empréstito hemos de reflejar período a período los valores correspondientes a las magnitudes de la operación (términos amortizativos, cuotas de amortización, cuotas de interés, total amortizado y saldo o capital vivo). Para ello es preciso determinar las cuantías de los términos amortizativos, así como el número de títulos a amortizar en cada período y el de los que quedan en circulación. A partir de los resultados obtenidos se podrán determinar las restantes cantidades de las variables a incluir en el cuadro de amortización.

El número de títulos a cancelar en cada período ha de ser un número entero, por lo que, cuando no lo sea, es preciso utilizar un procedimiento que permita su aproximación a entero, existiendo distintas formas de hacerlo. Vamos a utilizar el **método de redondeo de las amortizaciones teóricas,** explicando su aplicación con el ejercicio planteado.

De los datos del ejercicio se desprende que se trata de un empréstito normal tipo I, por lo que se verifica:

$$N_1 \times C = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 10.000 \times 100 = a \times a_{\overline{5}|3\%} \quad \Rightarrow \quad a = 218.354,57$$

El número de títulos a amortizar en el primer año, redondeando a dos decimales, es:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{10.000}{s_{\overline{5}|3\%}} = 1.883,55$$

Teniendo en cuenta la relación $M_s = M_{s-1}(1 + i)$, y redondeando hasta las centésimas, obtenemos el número teórico de títulos que se amortizan en cada año:

$$M_1 = 1.883,55;\ M_2 = 1.940,06;\ M_3 = 1.998,26;\ M_4 = 2.058,21;\ M_5 = 2.119,96$$

La parte entera de cada uno de los números anteriores constituye el número inicial de títulos a amortizar. Al sumarlos se obtiene 9.998, por lo que faltan 2 títulos para cancelar la totalidad de los mismos. Para completar la amortización se asigna una obligación a los dos períodos en los que la parte decimal desprecia-

© Ediciones Pirámide

da es mayor (años 1 y 5), obteniendo de esta forma el número real de obligaciones a amortizar:

$$M_1' = 1.884;\ M_2' = 1.940;\ M_3' = 1.998;\ M_4' = 2.058;\ M_5' = 2.120$$

Teniendo en cuenta las expresiones que nos permiten determinar el número total de títulos amortizados hasta el final de un período, así como el de títulos vivos al inicio del siguiente, $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} M_h$ y $N_{s+1} = N_s - M_s$, respectivamente, podemos sintetizar en el siguiente cuadro el programa de cancelación de los títulos:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	10.000
1	1.884	1.884	8.116
2	1.940	3.824	6.176
3	1.998	5.822	4.178
4	2.058	7.880	2.120
5	2.120	10.000	0

En síntesis, a efectos de determinar el plan de cancelación de los títulos, el **método de redondeo de las amortizaciones teóricas** consiste en lo siguiente:

a) Determinar período a período, redondeando a dos decimales, el número teórico de títulos a amortizar.

b) La parte entera de cada uno de los números anteriores constituye el número inicial de títulos a amortizar.

c) Sumar los números anteriores y asignar un título, hasta completar los que faltan para la total amortización, a aquellos períodos en los que la parte decimal despreciada sea mayor, obteniendo así el número real de títulos a amortizar.

A partir del programa de cancelación de los títulos es posible confeccionar el cuadro de amortización, teniendo en cuenta la descomposición de cada término amortizativo en cuota de interés y cuota de amortización:

$$a_s = a = N_s \times C \times i + M_s \times C = I_s + A_s$$

Además, como el número real de títulos a amortizar en cada período se ha redondeado, el término amortizativo que se obtiene difiere del teórico calculado. Esa diferencia no supera el valor nominal de una obligación, pues el redondeo es

© Ediciones Pirámide

por defecto y el ajuste se ha hecho añadiendo un título en los períodos con parte decimal mayor. El término amortizativo así obtenido se denomina término amortizativo real.

El cuadro de amortización es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	1.000.000,00
1	3	218.400,00	188.400,00	30.000,00	188.400,00	811.600,00
2	3	218.348,00	194.000,00	24.348,00	382.400,00	617.600,00
3	3	218.328,00	199.800,00	18.528,00	582.200,00	417.800,00
4	3	218.334,00	205.800,00	12.534,00	788.000,00	212.000,00
5	3	218.360,00	212.000,00	6.360,00	1.000.000,00	0,00

En el cuadro precedente, la columna de saldo financiero se ha obtenido multiplicando el número de títulos en circulación por el nominal: $N_{s+1} \times C$.

La columna de cuotas de interés o de cupones se ha obtenido calculando el 3% al valor nominal de los títulos vivos al inicio de cada período: $I_s = N_s \times C \times 3\%$.

La columna de cuotas de amortización se ha obtenido de acuerdo con la expresión: $A_s = M_s \times C$.

Al sumar las respectivas cuotas de interés y de amortización obtenemos los términos amortizativos.

La columna de capital total amortizado se ha obtenido multiplicando el número total de títulos amortizados por su nominal: $M_s^e \times C$.

EJERCICIO 18.8

Realizar el cuadro de amortización de un empréstito de 30.000 títulos de valor nominal 100 €, pago periódico de cupones y amortizable por sorteo en 5 años. El tipo de interés es el 3% para los primeros dos años y el 4% para los tres siguientes. Los términos amortizativos son de cuantía a en cada uno de los primeros dos años, y de cuantía doble de la anterior en cada uno de los tres siguientes.

Resolución

Se trata de un empréstito normal tipo III. Para realizar el cuadro es preciso determinar en primer lugar las cuantías de los términos amortizativos. De acuerdo con los datos, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$30.000 \times 100 = a \times a_{\overline{2}|3\%} + 2a \times a_{\overline{3}|4\%} \times 1{,}03^{-2} \Rightarrow a = 419.871{,}18;\ 2a = 839.742{,}36$$

© Ediciones Pirámide

De la estructura del término amortizativo anual podemos obtener, redondeando hasta las centésimas, el número teórico de títulos a amortizar en cada año. Así, para el año 1 se verifica:

$$a_1 = a = N_1 \times C \times 3\% + M_1 \times C$$

$$419.871{,}18 = 30.000 \times 100 \times 3\% + M_1 \times 100 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 3.298{,}71$$

El número teórico de títulos vivos al inicio del año 2 es:

$$N_2 = N_1 - M_1 = 30.000 - 3.298{,}71 = 26.701{,}29$$

Para el año 2, tenemos:

$$a_2 = a = N_2 \times C \times 3\% + M_2 \times C$$

$$419.871{,}18 = 26.701{,}29 \times 100 \times 3\% + M_2 \times 100 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 3.397{,}67$$

El número teórico de títulos vivos al inicio del año 3 es:

$$N_3 = N_2 - M_2 = 26.701{,}29 - 3.397{,}67 = 23.303{,}62$$

Para el año 3, tenemos:

$$a_3 = 2a = N_3 \times C \times 4\% + M_3 \times C$$

$$839.742{,}36 = 23.303{,}62 \times 100 \times 4\% + M_3 \times 100 \quad \Rightarrow \quad M_3 = 7.465{,}28$$

El número teórico de títulos vivos al inicio del año 3 es:

$$N_4 = N_3 - M_3 = 23.303{,}62 - 7.465{,}27 = 15.838{,}34$$

De igual forma, para los años 4 y 5 tenemos:

$$M_4 = 7.763{,}89;\ M_5 = N_5 = 8.074{,}45$$

La parte entera de cada uno de los números anteriores constituye el número inicial de títulos a amortizar. Al sumarlos se obtiene se obtiene 29.997, por lo que faltan 3 títulos para cancelar la totalidad de los mismos. Para completar la amortización asignamos un título a aquellos períodos con parte decimal mayor (años 1, 2 y 4), obteniendo de esta forma el número real de obligaciones a amortizar.

© Ediciones Pirámide

Podemos sintetizar en el siguiente cuadro el programa de cancelación de los títulos:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	30.000
1	3.299	3.299	26.701
2	3.398	6.697	23.303
3	7.465	14.162	15.838
4	7.764	21.926	8.074
5	8.074	30.000	0

Utilizando la metodología expuesta, obtenemos el cuadro de amortización:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	3.000.000,00
1	3	419.900,00	329.900,00	90.000,00	329.900,00	2.670.100,00
2	3	419.903,00	339.800,00	80.103,00	669.700,00	2.330.300,00
3	4	839.712,00	746.500,00	93.212,00	1.416.200,00	1.583.800,00
4	4	839.752,00	776.400,00	63.352,00	2.192.600,00	807.400,00
5	4	839.696,00	807.400,00	32.296,00	3.000.000,00	0,00

EJERCICIO 18.9

Un empréstito de 60.000 títulos se amortiza por sorteo en 7 años mediante términos amortizativos anuales variables en progresión aritmética de razón 1.000 €. Los títulos son de nominal 50 € y perciben un cupón anual del 4%. Realizar el cuadro de amortización.

Resolución

Se trata de un empréstito normal tipo II; y teniendo en cuenta que los términos amortizativos varían en progresión aritmética, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$N_1 \times C = A_{(a_1,\, d)\overline{n}|i} = \left(a_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

© Ediciones Pirámide

Al sustituir, tenemos:

$$60.000 \times 50 = \left(a_1 + 1.000 \times 7 + \frac{1.000}{0,04}\right) \times a_{\overline{7}|4\%} - \frac{1.000 \times 7}{0,04} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 496.985,52$$

El número teórico de títulos a amortizar en el primer año se deduce de la ecuación:

$$a_1 = N_1 \times C \times 4\% + M_1 \times C$$

$$496.985,52 = 60.000 \times 50 \times 4\% + M_1 \times 50 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 7.539,71$$

El número teórico de títulos vivos al inicio del año 2 es:

$$N_2 = N_1 - M_1 = 60.000 - 7.539,71 = 52.460,29$$

Teniendo en cuenta que los términos amortizativos varían en progresión aritmética, las expresiones correspondientes a dos períodos consecutivos son:

$$a_s = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

$$a_{s+1} = a_s + d = N_{s+1} \times C \times i + M_{s+1} \times C$$

Restando miembro a miembro, y teniendo en cuenta que $N_{s+1} = N_s - M_s$, se llega a:

$$d = -M_s \times C \times i + M_{s+1} \times C - M_s \times C$$

En consecuencia, la ley de variación del número de títulos a amortizar en cada período es:

$$M_{s+1} = M_s(1 + i) + \frac{d}{C}$$

De acuerdo con la expresión anterior obtenemos el número teórico de títulos a amortizar en cada año, redondeando a dos decimales:

$$M_1 = 7.539,71;\ M_2 = 7.861,30;\ M_3 = 8.195,75;\ M_4 = 8.543,58;$$
$$M_5 = 8.905,32;\ M_6 = 9.281,53;\ M_7 = 9.672,79$$

Tal y como hemos señalado, la parte entera de cada uno de los números anteriores constituye el número inicial de títulos a amortizar. Al sumarlos se obtiene

© Ediciones Pirámide

59.996, por lo que faltan 4 títulos para cancelar la totalidad de los mismos. Para completar la amortización asignamos un título a aquellos períodos con parte decimal mayor (años 1, 3, 4 y 7), obteniendo de esta forma el número real de obligaciones a amortizar.

Sintetizamos en el siguiente cuadro el programa de cancelación de los títulos:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	60.000
1	7.540	7.540	52.460
2	7.861	15.401	44.599
3	8.196	23.597	36.403
4	8.544	32.141	27.859
5	8.905	41.046	18.954
6	9.281	50.327	9.673
7	9.673	60.000	0

Utilizando la metodología expuesta, obtenemos el cuadro de amortización:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Capital total amortizado	Saldo financiero
0	—	—	—	—	—	3.000.000,00
1	4	497.000,00	377.000,00	120.000,00	377.000,00	2.623.000,00
2	4	497.970,00	393.050,00	104.920,00	770.050,00	2.229.950,00
3	4	498.998,00	409.800,00	89.198,00	1.179.850,00	1.820.150,00
4	4	500.006,00	427.200,00	72.806,00	1.607.050,00	1.392.950,00
5	4	500.968,00	445.250,00	55.718,00	2.052.300,00	947.700,00
6	4	501.958,00	464.050,00	37.908,00	2.516.350,00	483.650,00
7	4	502.996,00	483.650,00	19.346,00	3.000.000,00	0,00

18.5. EMPRÉSTITOS NORMALES AMORTIZABLES POR SORTEO Y PAGO DE INTERESES ACUMULADOS

Estos empréstitos pertenecen a la modalidad con amortización periódica, en la que los títulos representan préstamos elementales o simples, por lo que, de acuerdo con lo ya expuesto, las obligaciones mientras están vivas no perciben intereses, y en el momento de la amortización reciben el nominal y los intereses

© Ediciones Pirámide

acumulados hasta dicho momento. Por consiguiente, el valor de reembolso para una obligación amortizada al final del período s es su saldo: $C_s = C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$.

En general, el emisor entrega periódicamente los términos amortizativos a cambio de haber recibido en el momento de la emisión el valor nominal del empréstito. El gráfico de la operación es el siguiente:

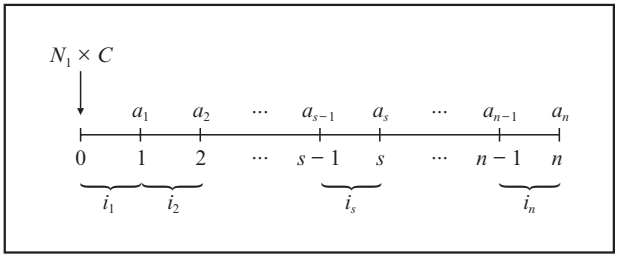


Figura 18.2.

En consecuencia, la estructura del término amortizativo para el período s de un **empréstito tipo III,** en el que los términos y el tipo de interés sean variables, se puede expresar de la siguiente forma:

$$a_s = M_s \times C_s = M_s \times C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

Además, la ecuación de equivalencia en el origen de la operación es:

$$N_1 \times C = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)^{-1}$$

Por otra parte, la deuda pendiente de amortizar al principio del período $s + 1$, hallada por el método prospectivo, se obtiene como el valor actualizado de los términos amortizativos futuros, por lo que nos queda la siguiente igualdad:

$$N_{s+1} \times C_s = \sum_{h=s+1}^{n} a_h \prod_{r=s+1}^{h}(1 + i_r)^{-1}$$

En el caso de un **empréstito tipo II,** al ser los términos amortizativos variables y el tipo de interés constante, la estructura del término amortizativo del período s viene dada por la siguiente expresión:

$$a_s = M_s \times C_s = M_s \times C(1 + i)^s$$

© Ediciones Pirámide

La ecuación de equivalencia en el origen es:

$$N_1 \times C = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + i)^{-s}$$

El saldo al inicio del período $s + 1$, por el método prospectivo, es:

$$N_{s+1} \times C_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h} (1 + i)^{-h}$$

Para deducir la ley de variación de los títulos amortizados en cada período, tenemos:

$$a_s = M_s \times C(1 + i)^s$$

$$a_{s+1} = M_{s+1} \times C(1 + i)^{s+1}$$

Dividiendo miembro a miembro queda:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{M_{s+1}(1 + i)}{M_s} \quad \Rightarrow \quad M_{s+1} = \frac{a_{s+1}}{a_s} \times \frac{M_s}{1 + i}$$

Dentro de este tipo de empréstitos destacamos los que tienen términos amortizativos variables en progresión aritmética o geométrica, o bien los empréstitos en los que se amortiza un número constante de títulos en cada período.

Si los términos amortizativos y el tipo de interés son constantes, tenemos un **empréstito normal tipo I,** siendo la estructura del término amortizativo del período s la siguiente:

$$a = M_s \times C(1 + i)^s$$

La ecuación de equivalencia en el origen es:

$$N_1 \times C = a \times a_{\overline{n}|i}$$

Para determinar el saldo de la operación al principio del período $s + 1$ planteamos la ecuación siguiente, teniendo en cuenta que el valor de reembolso viene dado por el nominal y los intereses acumulados hasta ese momento:

$$N_{s+1} \times C(1 + i)^s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$$

Teniendo en cuenta que los términos son constantes, vamos a determinar la ley de variación del número de títulos amortizados en cada período, partiendo

© Ediciones Pirámide

de las estructuras de los términos amortizativos correspondientes a los períodos s y $s + 1$:

$$a = M_s \times C(1 + i)^s$$

$$a = M_{s+1} \times C(1 + i)^{s+1}$$

Restando miembro a miembro, nos queda:

$$M_{s+1} \times C(1 + i)^{s+1} = M_s \times C(1 + i)^s \quad \Rightarrow \quad M_{s+1} = M_s(1 + i)^{-1}$$

Y por consiguiente: $M_{s+1} = M_1(1 + i)^{-s}$.

En consecuencia, el número de títulos amortizados en cada período varía en progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$. Además, el número de títulos amortizados en el primer período se puede obtener partiendo de la estructura del término amortizativo de dicho período:

$$a = M_1 \times C(1 + i) \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{a}{C}(1 + i)^{-1}$$

Sustituyendo el término amortizativo, y poniéndolo en función del número de títulos emitidos, nos queda la siguiente expresión, que nos permite hallar también los títulos amortizados en el primer período en función del número de títulos emitidos:

$$M_1 = \frac{N_1 \times C}{a_{\overline{n}|i}} \times \frac{1}{C}(1 + i)^{-1} \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{N_1}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

EJERCICIO 18.10

Se emite un empréstito formado por 20.000 títulos de nominal 60 €, con pago de cupón acumulado y amortización periódica, para ser amortizado con términos amortizativos constantes en 20 años. Sabiendo que el tipo de interés de la operación es el 6% anual, se pide: *a*) cuantía de los términos amortizativos; *b*) número de títulos amortizados en el año 15; *c*) número de títulos vivos al principio del año 12, y *d*) número de títulos amortizados en los cuatro primeros períodos.

Resolución

a) Para hallar la cuantía del término amortizativo planteamos la ecuación de equivalencia:

$$20.000 \times 60 = a \times a_{\overline{20}|0,06} \quad \Rightarrow \quad a = 104.621,47 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

b) Para hallar el número de títulos amortizados en el período 15 necesitamos conocer el número de títulos amortizados en el primer período, el cual se deduce de:

$$M_1 = \frac{a}{C}(1+i)^{-1} = \frac{104.621,47}{60} \times 1,06^{-1} = 1.644,99$$

Una vez hallado el número de títulos amortizados en el primer período, podemos obtener el número de títulos amortizados en el período 15, planteando la relación ya estudiada entre ambos:

$$M_{15} = 1.644,99 \times 1,06^{-14} = 727,58$$

c) Para determinar el número de títulos vivos al principio del año 12 planteamos la ecuación del saldo financiero por el método prospectivo:

$$N_{12} \times 60 \times 1,06^{11} = 104.621,47 \times a_{\overline{9}|0,06} \quad \Rightarrow \quad N_{12} = 6.247,73$$

d) El número de obligaciones amortizadas en los 4 primeros períodos se corresponde con el total de títulos emitidos menos el número de títulos vivos al principio del quinto período:

$$M_4^e = N_1 - N_5 = 20.000 - \frac{104.621,47 \times a_{\overline{16}|0,06}}{60 \times 1,06^4} = 6.042,07$$

EJERCICIO 18.11

Realizar el cuadro de amortización de un empréstito de 40.000 títulos de valor nominal 100 €, amortizable por sorteo en 5 años con cupón acumulado. El tipo de interés es el 3% para los primeros dos años y el 4% para los tres siguientes. Los términos amortizativos son de cuantía *a* en cada uno de los primeros dos años, y de cuantía doble de la anterior en cada uno de los tres siguientes.

Resolución

Se trata de un empréstito normal tipo III con cupón cero. Para realizar el cuadro es preciso determinar en primer lugar las cuantías de los términos amortizativos. De acuerdo con los datos, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$40.000 \times 100 = a \times a_{\overline{2}|3\%} + 2a \times a_{\overline{3}|4\%} \times 1,03^{-2} \quad \Rightarrow \quad a = 559.828,24;$$

$$2a = 1.119.656,48$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta que los títulos son de cupón cero, el saldo vivo o valor de reembolso de cualquier título verifica: $C_s = C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$, por lo que tenemos:

$$C_1 = 100 \times 1{,}03 = 103{,}00$$

$$C_2 = 100 \times 1{,}03^2 = 106{,}09$$

$$C_3 = 100 \times 1{,}03^2 \times 1{,}04 = 110{,}33$$

$$C_4 = 100 \times 1{,}03^2 \times 1{,}04^2 = 114{,}75$$

$$C_5 = 100 \times 1{,}03^2 \times 1{,}04^3 = 119{,}34$$

De la estructura del término amortizativo anual podemos obtener, redondeando hasta las centésimas, el número teórico de títulos a amortizar en cada año. Así, para los tres primeros años, tenemos:

$$a_1 = a = M_1 \times C_1$$

$$559.828{,}24 = M_1 \times 103 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 5.435{,}23$$

$$a_2 = a = M_2 \times C_2$$

$$559.828{,}24 = M_2 \times 106{,}09 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 5.276{,}92$$

$$a_3 = 2a = M_3 \times C_3$$

$$1.119.656{,}48 = M_3 \times 110{,}33 \quad \Rightarrow \quad M_3 = 10.148{,}25$$

De igual forma, para los años 4 y 5 se tiene: $M_4 = 9.757{,}35$; $M_5 = 9.382{,}07$.

De acuerdo con el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, sabemos que la parte entera de cada uno de los valores anteriores constituye el número inicial de títulos a amortizar. Al sumarlos se obtiene 39.998, por lo que faltan 2 títulos para cancelar la totalidad de los mismos. Para completar la amortización asignamos un título a aquellos períodos con parte decimal mayor (años 2 y 4), obteniendo de esta forma el número real de obligaciones a amortizar.

Teniendo en cuenta las expresiones que nos permiten determinar el número total de títulos amortizados hasta el final de un período, así como el de títulos vivos al inicio del siguiente, $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} M_h$ y $N_{s+1} = N_s - M_s$, respectivamente, podemos sintetizar en el siguiente cuadro el programa de cancelación de los títulos:

© Ediciones Pirámide

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	40.000
1	5.435	5.435	34.565
2	5.277	10.712	29.288
3	10.148	20.860	19.140
4	9.758	30.618	9.382
5	9.382	40.000	0

Por otra parte, sabemos que el valor de reembolso de un título en el período s verifica $C_s = C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) = C\left[\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) - 1\right] + C$, correspondiendo el primer sumando a los intereses acumulados del nominal del título hasta su amortización, y el otro a la devolución del mismo. Igual descomposición es posible efectuar en cada término amortizativo, siendo el primer sumando los intereses totales de los títulos amortizados en cada período, y el segundo el nominal total de tales títulos:

$$a_s = M_s \times C_s = M_s \times C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) = M_s \times C\left[\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) - 1\right] + M_s \times C = I_s + A_s$$

De acuerdo con lo expuesto, a partir del programa de cancelación de los títulos es posible confeccionar el cuadro de amortización efectuando la descomposición de cada término amortizativo en cuota de interés y cuota de amortización.

El cuadro de amortización es el siguiente:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
0	—	—	—	—	4.000.000,00
1	3	559.805,00	543.500,00	16.305,00	3.560.195,00
2	3	559.836,93	527.700,00	32.136,93	3.107.163,92
3	4	1.119.628,84	1.014.800,00	104.828,84	2.111.716,20
4	4	1.119.730,50	975.800,00	143.930,50	1.076.584,50
5	4	1.119.647,88	938.200,00	181.447,88	0,00

En el cuadro precedente, la columna de saldo financiero se ha obtenido multiplicando el número de títulos en circulación al principio del período por el valor de reembolso de cada uno: $N_{s+1} \times C_s$.

© Ediciones Pirámide

La columna correspondiente a los términos amortizativos reales se ha obtenido al multiplicar el número real de títulos que se amortiza en cada período por su valor de reembolso: $a_s = M_s \times C_s$.

La columna de cuotas de amortización se ha obtenido de acuerdo con la expresión: $A_s = M_s \times C$.

Los intereses correspondientes a cada año se han obtenido según la expresión: $I_s = a_s - A_s$.

Podemos sintetizar la metodología para confeccionar el cuadro:

a) Calcular los términos amortizativos, así como el valor de reembolso, en cada período.

b) Utilizando el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, determinar el programa de cancelación de títulos, así como el número de títulos vivos al inicio de cada período.

c) Determinar el saldo financiero al inicio de cada período.

d) Calcular los términos amortizativos reales, cuotas de amortización y cuotas de interés.

Para la realización del cuadro de amortización según el modelo expuesto, se descompone cada término amortizativo en los intereses pagados en el respectivo período a los títulos que en el mismo se amortizan, y en la devolución de su nominal.

EJERCICIO 18.12

Se emite un empréstito de 10.000 títulos de nominal 500 € para ser amortizado por sorteo en 5 años mediante términos amortizativos constantes. Los títulos son de cupón acumulado al 4% anual. Confeccionar el cuadro de amortización.

Resolución

Se trata de un empréstito normal tipo I, verificándose:

$$10.000 \times 500 = a \times a_{\overline{5}|4\%} \quad \Rightarrow \quad a = 1.123.135,57$$

El valor de reembolso de los títulos que se amortizan en el año 1 es $C_1 = 500 \times \times 1,04 = 520$ €, obteniéndose los restantes a través de la expresión $C_s = C(1 + i)^s = = 500 \times 1,04^s$.

El número de títulos a amortizar en el primer año, redondeando a dos decimales, es:

$$M_1 = \frac{a}{C_1} = \frac{1.123.135,57}{520} = 2.159,88$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta la relación $M_s = M_{s-1}(1 + i)^{-1}$, y redondeando hasta las centésimas, obtenemos el número teórico de títulos que se amortizan en cada año:

$$M_1 = 2.159{,}88;\ M_2 = 2.076{,}81;\ M_3 = 1.996{,}93;\ M_4 = 1.920{,}13;\ M_5 = 1.846{,}28$$

Al sumar la parte entera obtenemos 9.997, por lo que añadimos 1 a la parte entera del número de títulos correspondientes a aquellos períodos con mayor parte decimal (años 1, 2 y 3), obteniendo el número real de títulos a amortizar.

En el siguiente cuadro sintetizamos el programa de cancelación:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	10.000
1	2.160	2.160	7.840
2	2.077	4.237	5.763
3	1.997	6.234	3.766
4	1.920	8.154	1.846
5	1.846	10.000	0

Siguiendo la metodología expuesta, el cuadro de amortización es:

Período	Tipo de interés (%)	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
0	—	—	—	—	5.000.000,00
1	4	1.123.200,00	1.080.000,00	43.200,00	4.076.800,00
2	4	1.123.241,60	1.038.500,00	84.741,60	3.116.630,40
3	4	1.123.172,71	998.500,00	124.672,71	2.118.111,38
4	4	1.123.065,60	960.000,00	163.065,60	1.079.780,78
5	4	1.122.977,18	923.000,00	199.977,18	0,00

18.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una empresa emite un empréstito de 200.000 obligaciones de nominal 600 € para ser canceladas íntegramente dentro de 10 años. Los intereses se abonan dos veces al año, por semestres vencidos, y al final de cada año se reduce el nominal de cada título en una cuantía constante. Si el tipo de interés es el 2% semestral en los primeros 4 años y el 3% semestral en los siguientes, determinar: *a*) intereses totales a abonar en el segundo semestre del año 4, y *b*) término amortizativo total del segundo semestre del año 8.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Se trata de un empréstito sin cancelación escalonada, cuyos títulos van percibiendo semestralmente intereses, con reducción constante del nominal una vez al año. Por tanto, cada título representa un préstamo amortizable en 10 años por el método de cuota de capital constante anual e intereses semestrales. La cuota anual de amortización por título es 60 €.

a) Para determinar la cuantía de los intereses totales del segundo semestre del año 4, hemos de determinar los intereses correspondientes a un título y multiplicar por el número de ellos. Los intereses de un título se obtienen al multiplicar el saldo al inicio de dicho semestre por el tipo de interés. Como la reducción del nominal de los títulos se efectúa una vez al año, el saldo sólo se modifica al final del segundo semestre. Por tanto, se verifica:

$$C_3 = C_{3+\frac{1}{2}} = (10 - 3) \times 60 = 420$$

$$I_4 = 0{,}02 \times 420 = 8{,}40$$

$$I_4^T = N_1 \times I_4 = 200.000 \times 8{,}40 = 1.680.000 \text{ €}$$

b) El término amortizativo total del segundo semestre del año 8 se compone de la suma de los intereses totales de dicho semestre al 3% y de la cuota de amortización total:

$$I_8 = C_7 \times 0{,}03 = 3 \times 60 \times 0{,}03 = 5{,}40$$

$$a'_8 = I_8 + A_8 = 65{,}40$$

$$a_8 = 200.000 \times 65{,}40 = 13.080.000 \text{ €}$$

2. Determinada empresa emite un empréstito de 150.000 títulos, todos con una duración de 10 años. Cada título se amortiza por el método francés, y se sabe que la cuota de amortización del sexto año vale 50,67 €, y la del año 9 es 57 €. Determinar: *a*) término amortizativo total que debe satisfacer en cada año; *b*) intereses totales que debe abonar en el año 7 el emisor del empréstito, y *c*) saldo del empréstito al inicio del año 8.

Resolución

a) Como cada título representa un préstamo francés, el tipo de interés anual de la operación se obtiene de la relación existente entre las dos cuotas de amortización dadas:

$$57 = 50{,}67(1 + i)^{9-6} \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}04$$

© Ediciones Pirámide

El nominal de los títulos lo obtenemos de las siguientes relaciones:

$$50{,}67 = A_1 \times 1{,}04^5 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 41{,}65 = \frac{C}{s_{\overline{10}|0{,}04}} \quad \Rightarrow \quad C = 500$$

La cuantía del término amortizativo constante de cada título se deduce de la ecuación:

$$500 = a' \times a_{\overline{10}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad a' = 61{,}65$$

En consecuencia, el término amortizativo total del empréstito es:

$$a = N_1 \times a' = 9.247.500 \text{ €}$$

b) La cuota de interés del año 7 correspondiente a cada título se obtiene al multiplicar el saldo al inicio de dicho año por el tipo de interés. El saldo de un título al principio del año 7 es:

$$C_6 = 61{,}65 \times a_{\overline{4}|0{,}04} = 223{,}78$$

La cuota de interés del año 7 de un título es: $I_7 = 223{,}78 \times 0{,}04 = 8{,}95$. Los intereses totales ascienden a: $I_7^T = 8{,}95 \times 150.000 = 1.342.500$ €.

c) El saldo total al inicio del año 8 es el producto del saldo de cada título por el número de ellos. Podemos determinar el saldo de un título a través del método recurrente en función del saldo en 6, verificándose: $C_7 = C_6 \times 1{,}04 - a' = 171{,}08$. En consecuencia, el saldo total es: $N_1 \times C_7 = 150.000 \times 171{,}08 = 25.662.000$ €.

3. Se emite un empréstito de 150.000 obligaciones de 780 € de nominal, para ser canceladas íntegramente dentro de 12 años. Los intereses se abonan por trimestres vencidos, y al final de cada año se reduce el nominal de cada título en una cuantía constante. Si el tipo de interés es el 2% trimestral en los primeros 5 años y el 3% trimestral en los siguientes, determinar: *a*) intereses totales a abonar en el segundo trimestre del año 5, y *b*) término amortizativo total del cuarto trimestre del año 10.

Resolución

Se trata de un empréstito sin cancelación escalonada, cuyos títulos perciben intereses trimestrales, y con reducción constante anual del nominal. Por tanto, cada título representa un préstamo amortizable por el método de cuota constante anual de capital en 12 años e intereses trimestrales. La cuota anual de amortización por título es 65 €.

© Ediciones Pirámide

a) Para determinar la cuantía de los intereses totales del segundo trimestre del año 5 hemos de conocer los intereses de un título y multiplicar por el número de ellos. Los intereses de un título se obtienen al multiplicar el saldo al inicio de dicho trimestre por el tipo de interés. Como la reducción del nominal de los títulos se efectúa una vez al año, el saldo sólo se modifica al final del cuarto trimestre de cada año. Por tanto, se verifica:

$$C_4 = C_{4+\frac{1}{4}} = (12 - 4) \times 65 = 520$$

$$I_5 = 0{,}02 \times 520 = 10{,}40$$

$$I_5^T = N_1 \times I_5 = 150.000 \times 10{,}40 = 1.560.000 \text{ €}$$

b) El término amortizativo total del cuarto trimestre del año 10 se compone de la suma de los intereses totales de dicho trimestre al 3% y de la cuota de amortización total:

$$I_{10} = C_9 \times 0{,}03 = 3 \times 65 \times 0{,}03 = 5{,}85$$

$$a'_{10} = I_{10} + A = 70{,}85$$

$$a_{10} = 150.000 \times 70{,}85 = 10.627.500 \text{ €}$$

4. Una sociedad emite un empréstito integrado por 250.000 títulos de 100 € nominales, a amortizar por sorteo en 20 años mediante anualidad constante y cupón anual del 6%. Hallar el número de títulos amortizados en los primeros 14 años.

Resolución

Nos encontramos con un empréstito normal tipo I, amortizable por sorteo y con abono periódico de intereses. Por tanto, de acuerdo con lo expuesto, se verifica:

$$M_s^e = M_1 \times s_{\overline{n}|i}$$

Hemos de tener en cuenta que:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{250.000}{s_{\overline{20}|0{,}06}} = 6.796{,}14$$

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos el número teórico de títulos amortizados:

$$M_{14}^e = 6.796{,}14 \times s_{\overline{14}|0{,}06} = 142.821{,}33$$

© Ediciones Pirámide

5. Una sociedad emite un empréstito integrado por títulos de nominal 20 € a amortizar por sorteo en 30 años mediante anualidad constante y cupón anual del 6%. Sabiendo que el número teórico de títulos amortizados en el año 6 es de 406,25, hallar el número de títulos emitidos.

Resolución

Al conocer el número de títulos amortizados en el año 6, podemos hallar los títulos amortizados en el primer período a través de la siguiente expresión:

$$M_6 = M_1 \times 1{,}06^5 = 406{,}25 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 303{,}57$$

Una vez hallados los títulos amortizados en el primer año, sólo nos queda calcular el número de títulos emitidos:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{N_1}{s_{\overline{30}|0{,}06}} = 303{,}57 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 24.000$$

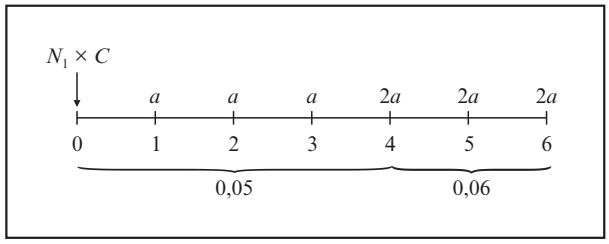
6. Se emite un empréstito de 15.000 títulos de nominal 40 € para ser amortizados en 6 años, mediante sorteo con términos amortizativos constantes durante los tres primeros años, y siendo la cuantía de cada uno de los términos de los tres últimos años el doble de la de los tres anteriores. Periódicamente se abonan cupones de 2 € los cuatro primeros años y de 2,4 € los dos siguientes. Hallar: *a*) las cuantías de los términos amortizativos; *b*) el número de títulos amortizados en el período 3, y *c*) el número total de títulos amortizados en los 4 primeros períodos.

Resolución

a) Los tipos de interés anuales correspondientes a los cupones dados y la representación gráfica del empréstito son:

$$C \times i_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0{,}05$$

$$C \times i_2 = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 0{,}06$$



© Ediciones Pirámide

Las cuantías de los términos amortizativos, partiendo de la ecuación de equivalencia planteada en el origen de la operación, son:

$$15.000 \times 40 = a \times a_{\overline{3}|0,05} + 2a \times \ddot{a}_{\overline{3}|0,06} \times 1,05^{-4} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a = 81.242,18 \quad \Rightarrow \quad 2a = 162.484,36$$

b) El término amortizativo del tercer período es:

$$a_3 = a = N_3 \times C \times i_1 + M_3 \times C$$

$$81.242,18 = N_3 \times 2 + M_3 \times 40$$

Para calcular el número de títulos amortizados en el tercer período, debemos hallar primero el número de títulos vivos al principio del período tres, para lo cual calculamos el saldo de la operación al final del año 2, por el método retrospectivo, y posteriormente despejamos para obtener lo solicitado:

$$N_3 \times 40 = 15.000 \times 40 \times 1,05^2 - 81.242,18 \times s_{\overline{2}|0,05} \quad \Rightarrow \quad N_3 = 12.373,84$$

$$M_3 = \frac{81.242,18 - 12.373,84 \times 2}{40} = 1.412,36$$

c) Para hallar el total de títulos amortizados en los 4 primeros años, basta con restar al total de títulos emitidos el número de títulos vivos al principio del período 5:

$$M_4^e = N_1 - N_5$$

$$N_5 \times 40 = 162.484,36 \times a_{\overline{2}|0,06} \quad \Rightarrow \quad N_5 = 7.447,44$$

$$M_4^e = 15.000 - 7.447,44 = 7.552,56$$

7. Se emite un empréstito de 12.000 títulos de cupón cero, con nominal de 40 €, para ser amortizado en 10 años, con términos amortizativos anuales que se incrementan cada año en 200 €. El tipo de interés anual es el 8%. Hallar el número de títulos amortizados en el quinto período, así como el capital total amortizado en los siete primeros períodos.

Resolución

Debemos conocer, en primer lugar, la cuantía del primer término amortizativo, para lo cual planteamos la ecuación de equivalencia en el origen de la operación, teniendo en cuenta que los términos varían en progresión aritmética:

$$12.000 \times 40 = \left(a_1 + \frac{200}{0,08} + 200 \times 10\right) \times a_{\overline{10}|0,08} - \frac{200 \times 10}{0,08} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 70.759,89$$

© Ediciones Pirámide

Una vez conocida la cuantía anterior, podemos hallar el número de títulos amortizados en el período 5 partiendo de la estructura del quinto término amortizativo y de la relación de éste con el primero:

$$a_5 = M_5 \times C(1 + i)^5;\ a_5 = a_1 + 4 \times d = 71.559{,}89$$

$$71.559{,}89 = M_5 \times 40 \times 1{,}08^5 \quad \Rightarrow \quad M_5 = 1.217{,}56$$

Los títulos amortizados en los siete primeros períodos se corresponden con la diferencia entre el número de títulos emitidos y el número de títulos vivos al principio del octavo período, o sea:

$$M_7^e = N_1 - N_8$$

$$a_8 = a_1 + 7 \times d \quad \Rightarrow \quad a_8 = 72.159{,}89$$

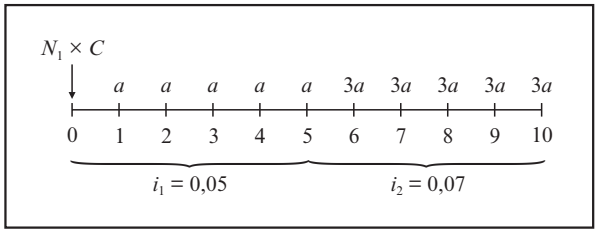
$$N_8 \times 40 \times 1{,}08^7 = \left(a_8 + \frac{200}{0{,}08} + 200 \times 3\right) \times a_{\overline{3}|0{,}08} - \frac{200 \times 3}{0{,}08} \quad \Rightarrow \quad N_8 = 2.719{,}82$$

$$M_7^e = 12.000 - 2.719{,}82 = 9.280{,}18$$

8. Se emiten 10.000 títulos de nominal 30 € para ser amortizados mediante sorteo, con términos amortizativos constantes los cinco primeros años, siendo la cuantía de los cinco últimos el triple de la de los anteriores. La duración es de 10 años. Los títulos se amortizan con abono acumulado de intereses, siendo el tipo de interés anual de los cinco primeros años el 5%, y el de los siguientes el 7%. Hallar las cuantías de los términos amortizativos, el número de títulos vivos al principio del año 8 y el número de títulos amortizados en el año 9.

Resolución

La representación gráfica del empréstito es:



© Ediciones Pirámide

Planteamos la ecuación de equivalencia financiera para obtener las cuantías de los términos amortizativos:

$$10.000 \times 30 = a \times a_{\overline{5}|0,05} + 3a \times a_{\overline{5}|0,07} \times 1,05^{-5}$$

$$a = 21.478,72 \text{ €} \quad \Rightarrow \quad 3a = 64.436,16 \text{ €}$$

Para hallar los títulos vivos al principio del octavo período planteamos la ecuación del saldo por el método prospectivo, teniendo en cuenta que el empréstito se emite con cupón acumulado:

$$N_8 \times 30 \times 1,05^5 \times 1,07^2 = 64.436,16 \times a_{\overline{3}|0,07} \quad \Rightarrow \quad N_8 = 3.857,54$$

Finalmente, para hallar el número de títulos amortizados en el noveno período planteamos la estructura del término amortizativo de dicho período y despejamos:

$$a_9 = 64.436,16 = M_9 \times 30 \times 1,05^5 \times 1,07^4 \quad \Rightarrow \quad M_9 = 1.283,89$$

9. Una sociedad emite un empréstito de 5.000 títulos de nominal 70 €, para ser amortizados conjuntamente a los 8 años de la emisión. El tipo de interés pactado es el 3,5% anual. Se pide: *a*) si el empréstito es con abono anual de cupones, determinar el importe de los mismos, y *b*) si los títulos son de cupón cero, calcular el valor total de reembolso.

Resolución

a) Si el empréstito se emite con obligaciones que representan préstamos americanos, los obligacionistas perciben por cada título un cupón anual de $70 \times 0,035 = 2,45$ €, y el emisor abonará periódicamente por la totalidad de las obligaciones $2,45 \times 5.000 = 12.250$ €.

b) Si los títulos representan préstamos elementales, el valor de reembolso por título al cabo de los 8 años es: $70 \times 1,035^8 = 92,18$ €. Para la totalidad de títulos el valor de reembolso será de $5.000 \times 92,18 = 460.900$ €.

10. Se emite un empréstito amortizable mediante sorteo, con términos semestrales variables en progresión geométrica de razón 1,02 y cupón semestral de 3,40 €. El nominal de las obligaciones es de 85 € y la duración del empréstito es de 15 años. Sabiendo que el número teórico de títulos vivos al principio del semestre 19 es 5.379,11, hallar el número de títulos emitidos y el número de títulos amortizados en el primer semestre del octavo año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Podemos obtener la cuantía del término amortizativo correspondiente al semestre 19 a través del planteamiento del saldo por el método prospectivo al principio de dicho período, teniendo en cuenta que $C \times i^{(m)} = 3{,}40 \quad \Rightarrow \quad i^{(m)} = 0{,}04$ semestral:

$$5.379{,}11 \times 85 = a_{19}\frac{1 - 1{,}02^{12} \times 1{,}04^{-12}}{1{,}04 - 1{,}02} \quad \Rightarrow \quad a_{19} = 43.993{,}51$$

Como los términos varían en progresión geométrica, podemos hallar la cuantía del primero en función del término anteriormente calculado, así como, tras plantear la ecuación de equivalencia, el número de títulos emitidos:

$$a_{19} = 43.993{,}51 = a_1(1{,}02)^{18} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 30.802{,}47$$

$$N_1 \times 85 = 30.802{,}47\frac{1 - (1{,}02)^{30}(1{,}04)^{-30}}{1{,}04 - 1{,}02} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 8.000$$

Para hallar el número de títulos amortizados en el primer semestre del octavo año es necesario partir de la estructura del término amortizativo correspondiente al semestre 15:

$$a_{15} = N_{15} \times 3{,}4 + M_{15} \times 85$$

La cuantía del término amortizativo del semestre 15 la hallamos partiendo de la correspondiente al primer período, y el número de títulos vivos al principio de dicho semestre lo obtenemos del saldo por el método prospectivo:

$$a_{15} = 30.802{,}47\,(1{,}02)^{14} = 40.643{,}21$$

$$N_{15} \times 85 = 40.643{,}21\frac{1 - 1{,}02^{16} \times 1{,}04^{-16}}{1{,}04 - 1{,}02} \quad \Rightarrow \quad N_{15} = 6.384{,}77$$

Para finalizar, sustituimos los valores hallados en la estructura del término amortizativo y despejamos el número teórico de títulos amortizados en el período solicitado:

$$40.643{,}21 = 6.384{,}77 \times 3{,}4 + M_{15} \times 85 \quad \Rightarrow \quad M_{15} = 222{,}76$$

11. Se emite un empréstito con títulos de cupón cero y valor nominal 70 €, para ser amortizados mediante sorteo en 25 años. Los términos amortizativos anuales son constantes y el tipo de interés es el 4,5% anual. Sabemos que el número teórico de títulos vivos al principio del período 20 es 3.768,01. Hallar el número de títulos amortizados en el período 15.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Partiendo del número de títulos pendientes de amortizar al principio del período 20, planteamos el saldo por el método prospectivo y obtenemos la cuantía del término amortizativo correspondiente a este empréstito:

$$3.768{,}01 \times 70 \times 1{,}045^{19} = a \times a_{\overline{6}|0{,}045} \quad \Rightarrow \quad a = 118.018{,}20$$

Al conocer la cuantía de los términos, podemos hallar el número de títulos emitidos planteando la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$N_1 \times 70 = 118.018{,}20 \times a_{\overline{25}|0{,}045} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 25.000$$

Para finalizar, podemos hallar el número teórico de títulos amortizados en el año 15 partiendo del número de títulos amortizados en el primer año y estableciendo las siguientes relaciones ya estudiadas:

$$M_1 = \frac{25.000}{\ddot{a}_{\overline{25}|0{,}045}} = 1.613{,}37$$

$$M_{15} = 1.613{,}37 \times 1{,}045^{-14} = 871{,}18$$

12. Se emite un empréstito con obligaciones de nominal 60 €. Periódicamente se amortiza el mismo número de títulos y anualmente se abona un cupón de 1,8 € por título. La duración de la operación es 25 años. Sabiendo que el número de títulos en circulación al principio del año 20 es 5.760, hallar la cuantía del primer término amortizativo.

Resolución

Conociendo el número de títulos vivos al principio del período 20 podemos hallar el número de títulos amortizados cada año, teniendo en cuenta que quedan 6 años para finalizar la amortización del empréstito; por ello, se cumple la siguiente relación:

$$5.760 = M \times 6 \quad \Rightarrow \quad M = 960$$

En consecuencia, el total de títulos emitidos es $960 \times 25 = 24.000$. Planteando la estructura correspondiente al primer término amortizativo, podemos obtener el valor del mismo:

$$a_1 = 24.000 \times 1{,}8 + 960 \times 60 = 100.800 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

También podemos calcular este término amortizativo planteando la ecuación de equivalencia en el origen de la operación. Para ello necesitamos conocer la ley de variación de los términos amortizativos en esta modalidad de empréstito. Dicha ley de variación la deducimos de las estructuras de dos términos amortizativos en períodos consecutivos:

$$a_s = N_s \times C \times i + M \times C$$

$$a_{s+1} = N_{s+1} \times C \times i + M \times C$$

Restando miembro a miembro, resulta que los términos amortizativos varían en progresión aritmética de razón $d = -M \times C \times i = -960 \times 1{,}8 = -1.728$.

A través de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación obtenemos la cuantía del primer término, que lógicamente coincide con la calculada anteriormente:

$$24.000 \times 60 = \left(a_1 - \frac{1.728}{0{,}03} - 1.728 \times 25\right) \times a_{\overline{25}|0{,}03} + \frac{1.728 \times 25}{0{,}03} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 100.800 \text{ €}$$

18.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una empresa emite un empréstito de 80.000 títulos con duración común de 10 años. Cada título representa un préstamo que se amortiza al 4% de interés anual y con cuota constante de capital. Si el término amortizativo del año 4 para la totalidad de los títulos asciende a 10.240.000 €, determinar la cuota de interés del año 8 correspondiente a un título.

2. Se emite un empréstito de 12.000 títulos de nominal 40 €, para ser amortizado mediante sorteo, con términos amortizativos trimestrales constantes y cupón trimestral de 0,8 €. La duración de la operación es 10 años. Se pide: *a*) número de títulos amortizados en los 6 primeros años; *b*) número de títulos amortizados en el último trimestre del octavo año, y *c*) número de títulos en circulación al principio del primer trimestre del séptimo año.

3. Se emite un empréstito de 30.000 títulos para ser amortizado con cupón periódico en 30 años mediante sorteo. Los términos aumentan anualmente en 200 € y el tipo de interés anual es el 4%. Los títulos tienen un nominal de 45 € cada uno. Hallar el número de títulos que se amortizan en el año 12.

4. Sea un empréstito con títulos de nominal 50 € que se emite con términos amortizativos anuales constantes, para ser amortizado mediante sorteo en 20

© Ediciones Pirámide

años, con cupón acumulado del 5% anual. Sabiendo que el número teórico de títulos pendientes de amortizar al principio del año 15 es 5.142,68, hallar el número de títulos emitidos y el número de títulos amortizados en el año 12.

5. Un empréstito se emite con títulos de nominal 30 €, para ser amortizado por sorteo en 15 años. Los términos amortizativos son variables, aumentando cada año en un 1% acumulativo. Los cupones anuales son de 1,8 € los cinco primeros años; de 2,1 € los cinco siguientes y los últimos cinco años de 2,4 €. Sabiendo que se emitieron 22.000 títulos, hallar el número de títulos amortizados en el sexto sorteo y el importe total de los cupones correspondientes al año 12.

6. Se emite un empréstito de 28.000 títulos de nominal 55 €, para ser amortizado por sorteo en 25 años, con cupón acumulado del 5% anual. Los términos amortizativos aumentan anualmente un 3% acumulativo. Se pide: *a*) número de títulos vivos al principio del año 20, y *b*) número de títulos amortizados en el año 10.

7. Un empréstito de 18.000 títulos de nominal 40 € es emitido con cupón acumulado y amortizable por sorteo en 12 años. Los términos amortizativos anuales son constantes los seis primeros años, siendo la cuantía del resto el doble de la de los seis anteriores. El tipo de interés correspondiente a los 7 primeros años es del 3% anual y el de los cinco años restantes del 4% anual. Hallar el número de títulos vivos al principio del año 11 y el total amortizado en los cuatro primeros años.

© Ediciones Pirámide

19 Empréstitos con características comerciales (I)

OBJETIVOS

- Identificar y diferenciar las distintas características comerciales.
- Plantear la estructura de los términos con diferentes características comerciales.
- Analizar de forma general la metodología de normalización de empréstitos.
- Aplicar la metodología de normalización a los empréstitos con intereses periódicos pospagables.

SUMARIO

19.1. Modalidades de características comerciales.
19.2. Estructura del término amortizativo con características comerciales.
19.3. Metodología de normalización de un empréstito amortizable por sorteo y con cupón periódico.
19.4. Empréstitos con intereses periódicos pospagables, amortizables por sorteo y con características comerciales.
19.5. Ejercicios y problemas resueltos.
19.6. Ejercicios y problemas propuestos.

19.1. MODALIDADES DE CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

Cuando no se cumplen las condiciones relativas a los empréstitos normales, nos encontramos ante empréstitos con características comerciales, en los que, en general, los términos amortizativos, además de cubrir el pago de los intereses y amortizar los títulos, incluyen otras cuantías derivadas de las características propias de la emisión del empréstito.

Las características comerciales se dividen en dos grupos: *a*) bilaterales o recíprocas, y *b*) unilaterales.

a) **Características bilaterales.** Afectan por igual al emisor y al conjunto de obligacionistas. Son cuantías intercambiadas entre los sujetos que intervienen en la operación de empréstito. Las entregas efectuadas por uno de los sujetos las recibe el otro y viceversa.

Como características bilaterales vamos a estudiar las siguientes: prima de emisión, prima de amortización, lote, amortización seca o ex-cupón y fraccionamiento de cupones.

a.1) **Prima de emisión.** Si el precio de las obligaciones en el momento de la emisión del empréstito es inferior al nominal, se dice que existe prima de emisión (P_e). La cuantía a pagar por una obligación en la emisión es el valor de emisión, y viene dada por la diferencia entre el nominal y la prima o quebranto de emisión:

$$V = C - P_e$$

a.2) **Prima de amortización o de reembolso.** Es la diferencia entre el valor de reembolso de un título en el momento *s* de su amortización, C'_s, y su saldo financiero, C_s: $P_s = C'_s - C_s$.

© Ediciones Pirámide

Si el empréstito es con abono periódico de intereses, la prima de amortización es la diferencia entre el valor de reembolso de un título en el momento de su amortización y el nominal del mismo: $P_s = C'_s - C$.

Si el empréstito es con abono de intereses acumulados, la prima de amortización es la diferencia entre el valor de reembolso de un título y el valor acumulado del nominal y sus intereses:

$$P_s = C'_s - C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

En cualquier caso, la prima puede ser constante o variable, positiva o negativa[1], y además ha de ser idéntica para todas las obligaciones que se amorticen en un mismo momento.

a.3) **Lote.** Es un capital que se reparte en cada período entre un cierto número de obligaciones, elegidas por sorteo entre todas las que se amortizan en el mismo. La cuantía del premio o lote puede ser constante o variable.

Es importante distinguir entre la prima de amortización y el lote, pues aquélla afecta a todos los títulos amortizados en el período correspondiente, mientras que el lote sólo a un subconjunto seleccionado aleatoriamente.

a.4) **Amortización seca o ex-cupón.** Las obligaciones se cancelan con deducción de los intereses correspondientes al último período vivido. Equivale, por tanto, a una prima de amortización negativa.

a.5) **Fraccionamiento de cupones.** Los cupones se abonan en subperíodos de amplitud inferior a la del período en el que se abona el valor de reembolso del título.

b) **Características unilaterales.** Afectan sólo a una de las partes contratantes. Entre estas características destacamos los gastos iniciales, gastos finales, gastos periódicos de administración e impuestos.

b.1) **Gastos iniciales.** Se originan en el momento de la emisión del empréstito. Pueden ser gastos de publicidad, gastos de escritura, etc. Si los gastos corresponden al emisor los denominaremos G_0^p, y si corresponden al conjunto de obligacionistas G_0^a.

b.2) **Gastos finales.** Surgen al concluir la vida del empréstito y suelen afectar al emisor. Los denominaremos G_n^p.

[1] Normalmente la prima es positiva, si bien existen empréstitos especiales (de rendimiento constante o con primas iso-rentables) en los que en algunos períodos puede ser negativa.

© Ediciones Pirámide

b.3) **Gastos periódicos de administración.** Es frecuente que en la distribución del empréstito en los mercados financieros y posterior administración del mismo intervengan instituciones financieras. Éstas, por su actuación, pueden cobrar unos gastos periódicos unitarios al emisor (g_1) sobre las cuantías entregadas y unos gastos periódicos unitarios al conjunto de obligacionistas (g_2) sobre las cuantías recibidas por ellos.

19.2. ESTRUCTURA DEL TÉRMINO AMORTIZATIVO CON CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

Teniendo en cuenta las características comerciales señaladas en el apartado anterior, y considerando que algunas de ellas afectan directamente a la estructura de los términos amortizativos, nos centramos en este apartado en analizar cuál será la nueva composición de tales términos en función de dichas características.

Los términos amortizativos comerciales recogen todas las cuantías que el emisor ha de desembolsar periódicamente para amortizar el empréstito. A través de la estructura de tales términos comerciales se trata de descomponerlos en sus diversos sumandos, los cuales incluyen tanto las cuotas de interés y de amortización, propias de un empréstito normal, como las características comerciales que correspondan. Así, supongamos un empréstito normal con pago periódico de cupones y amortización periódica de títulos, en el que la estructura del término amortizativo es: $a_s = N_s \times C \times i_s + M_s \times C$. Ahora bien, el emisor del empréstito, debido a las características comerciales, ha de abonar periódicamente no sólo los sumandos anteriores sino también los derivados de tales características. En consecuencia, el término amortizativo comercial comprensivo de todas las cuantías a abonar tiene la siguiente estructura: $a_s = N_s \times C \times i_s + M_s \times C + B_s$, indicando con el sumando B_s las cuantías correspondientes a las características comerciales propias de cada emisión.

Supongamos un **empréstito con cupones periódicos,** amortización por sorteo y percibiendo cada título una prima de amortización P_s. La estructura del término amortizativo comercial del período s es:

$$a_s = N_s \times C \times i_s + M_s(C + P_s)$$

Si además los títulos pierden el cupón correspondiente al período en el que son amortizados, de importe $M_s \times C \times i_s$, dicho importe es preciso restarlo de las cuantías a abonar por el emisor, resultando la siguiente estructura del término amortizativo comercial para el período s:

$$a_s = N_s \times C \times i_s + M_s(C + P_s) - M_s \times C \times i_s$$

© Ediciones Pirámide

Si también existe un lote variable de cuantía total periódica L_s, la estructura del término amortizativo comercial del período s es:

$$a_s = N_s \times C \times i_s + M_s(C + P_s) - M_s \times C \times i_s + L_s$$

Si además el emisor soporta unos gastos periódicos, de tanto unitario g_1 sobre todas las cuantías entregadas a los obligacionistas, el término amortizativo comercial del período s tiene la siguiente estructura:

$$a_s = [N_s \times C \times i_s + M_s(C + P_s) - M_s \times C \times i_s + L_s](1 + g_1)$$

De igual forma, en un **empréstito con cupón acumulado** y amortización por sorteo, si cada título percibe una prima de amortización P_s, la estructura del término amortizativo comercial del período s es:

$$a_s = M_s\left[C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) + P_s\right]$$

Si además los títulos pierden los intereses correspondientes al período en el que son amortizados, percibirán el valor acumulado del nominal con sus intereses hasta el período precedente al de la amortización, o sea $C\prod_{h=1}^{s-1}(1 + i_h)$. En consecuencia, la estructura del término amortizativo comercial correspondiente al período s es:

$$a_s = M_s\left[C\prod_{h=1}^{s-1}(1 + i_h) + P_s\right]$$

Si también existe un lote variable de cuantía total periódica L_s, y el emisor soporta unos gastos periódicos, de tanto unitario g_1 sobre todas las cuantías entregadas a los obligacionistas, el término amortizativo comercial periódico tiene la siguiente estructura:

$$a_s = \left\{M_s\left[C\prod_{h=1}^{s-1}(1 + i_h) + P_s\right] + L_s\right\}(1 + g_1)$$

19.3. METODOLOGÍA DE NORMALIZACIÓN DE UN EMPRÉSTITO AMORTIZABLE POR SORTEO Y CON CUPÓN PERIÓDICO

En la lección anterior hemos estudiado cómo resolver la problemática de cualquier empréstito, siempre y cuando la estructura de sus términos amortizativos

© Ediciones Pirámide

tenga como componentes los cupones, periódicos o acumulados, y que la amortización de los títulos sea por su valor nominal.

Sabemos que los términos amortizativos comerciales tienen una estructura distinta a la de los normales, por lo que para resolver la problemática de estos empréstitos tendríamos que deducir nuevas ecuaciones aplicables a cada modalidad de característica comercial. Sin embargo, resulta más eficiente aplicar una metodología general válida para cualquier conjunto de características comerciales. Dicha metodología se denomina **método de normalización**[2], mediante el cual podemos transformar la estructura de un empréstito amortizable por sorteo y con características comerciales en la de uno normal. A los empréstitos con características comerciales amortizables por sorteo a los que es posible aplicar el método de normalización se les denomina **empréstitos normalizables.**

El método de normalización consiste en la realización de un conjunto de operaciones que permiten, tras un adecuado cambio de variables, transformar la estructura de un término amortizativo comercial en la de un empréstito normal, es decir, en un término amortizativo compuesto sólo por cupones y devolución del nominal.

En consecuencia, para normalizar un empréstito amortizable por sorteo y con cupón periódico, previamente hemos de plantear la estructura general del término amortizativo con las características comerciales que le correspondan, y a continuación aplicar el denominado proceso de normalización, que consiste en realizar las siguientes operaciones en la ecuación de la estructura general del término amortizativo comercial:

- Agrupar todos los términos que tengan M_s o N_s.
- Pasar al primer miembro los términos que no tengan ni M_s ni N_s.
- Dividir ambos miembros entre el coeficiente que multiplica a M_s.
- Multiplicar ambos miembros por el nominal C.
- Realizar un cambio de variables, de tal forma que a toda la expresión matemática que queda en el primer miembro la llamamos a'_s (término amortizativo normalizado), y a la expresión que multiplica a $N_s \times C$ la denominamos i'_s (tipo de interés normalizado).

A través de la última operación señalada anteriormente obtenemos las denominadas fórmulas de conversión, que dan origen a un nuevo empréstito, denominado **empréstito normalizado,** con la siguiente estructura: $a'_s = N_s \times C \times i'_s + M_s \times C$, al que le son aplicables todas las expresiones matemáticas deducidas para los empréstitos normales, según el tipo al que corresponda.

Con el fin de explicar adecuadamente lo descrito, consideremos un empréstito con abono periódico de intereses, amortizable por sorteo con términos amortizativos, tipo de interés, lote y prima de amortización variables, y gastos periódicos

[2] Gil Peláez (1987: 675).

© Ediciones Pirámide

a cargo del emisor sobre todas las cuantías que satisface. La estructura del término amortizativo comercial del período s es la siguiente:

$$a_s = (N_s \times C \times i_s + M_s \times C + M_s \times P_s + L_s)(1 + g_1)$$

Agrupamos los términos que contengan N_s o M_s, resultando la siguiente expresión:

$$a_s = [N_s \times C \times i_s + M_s(C + P_s) + L_s](1 + g_1)$$

A continuación pasamos al primer miembro los términos que no tengan ni M_s ni N_s:

$$\frac{a_s}{(1 + g_1)} - L_s = N_s \times C \times i_s + M_s(C + P_s)$$

Dividimos ambos miembros entre el coeficiente que multiplica a M_s, y multiplicamos ambos miembros por C, quedando la siguiente expresión:

$$\left[\frac{a_s}{(1 + g_1)} - L_s\right]\frac{C}{(C + P_s)} = N_s \times C\frac{C \times i_s}{(C + P_s)} + M_s \times C$$

Para finalizar, hacemos el cambio de variables y al primer miembro le llamamos a'_s, y al factor que multiplica a $N_s \times C$ le denominamos i'_s. La expresión resultante se corresponde con la de un empréstito normal tipo III, al que denominamos empréstito normalizado:

$$a'_s = N_s \times C \times i'_s + M_s \times C$$

Una vez transformado en uno normal, cualquier problemática se puede resolver aplicando al empréstito normalizado todas las relaciones ya estudiadas. Dicho empréstito normalizado consta del mismo número de títulos que el comercial, con idéntico nominal e igual plan de amortización, siendo a'_s el término amortizativo normalizado, e i'_s el tipo de interés normalizado.

En los epígrafes siguientes analizaremos la aplicación práctica de lo expuesto.

19.4. EMPRÉSTITOS CON INTERESES PERIÓDICOS POSPAGABLES, AMORTIZABLES POR SORTEO Y CON CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

En este apartado nos centramos en la aplicación del proceso de normalización a los empréstitos con pago periódico de intereses pospagables, amortizables por sorteo y con características comerciales. Partiendo de las diferentes estructuras de

© Ediciones Pirámide

los términos amortizativos comerciales, derivadas de las características propias de cada emisión, vamos a convertir los mismos en empréstitos normalizados tipo I, II o III, según proceda.

a) Empréstitos normalizables al tipo I

EJERCICIO 19.1

Sea un empréstito de 12.000 títulos de 50 euros nominales a amortizar por sorteo en 8 años, con términos amortizativos comerciales constantes y con cupón periódico anual del 5%. Los títulos que resultan amortizados en cada período se reembolsan con una prima de 5 € por título. Anualmente se reparte un lote de 500 € entre los 10 primeros títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales pierden el último cupón. Hallar los títulos amortizados en el octavo período, el número de títulos pendientes de amortizar al principio del sexto período y la cuantía del término amortizativo comercial.

Resolución

Comenzamos planteando la estructura del término amortizativo comercial para el período s:

$$a = N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 10 \times C \times i$$

Para la estructura anterior hemos tenido en cuenta que el emisor, en cada período, debe abonar los cupones de los títulos vivos al inicio del mismo, el valor de reembolso de los títulos amortizados y el lote. Pero como los 10 títulos que reciben lote no cobran el último cupón, la cuantía correspondiente ha de ser restada, ya que se había incluido en el sumando $N_s \times C \times i$.

A continuación aplicamos el proceso de normalización, pasando al primer miembro los términos que no tengan ni M_s ni N_s; multiplicamos ambos miembros por C y los dividimos entre el coeficiente de M_s, quedando:

$$(a - L + 10 \times C \times i)\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Realizamos el cambio de variables, siendo la expresión del primer miembro igual a a' y el factor que multiplica a $N_s \times C$ igual a i':

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{2{,}5}{55} = 4{,}54545\%$$

$$a' = (a - L + 10 \times C \times i)\frac{C}{C + P}$$

© Ediciones Pirámide

Queda, por tanto, $a' = N_s \times C \times i' + M_s \times C$, estructura propia de un empréstito normal tipo I, y, en consecuencia, se pueden aplicar todas las expresiones estudiadas para este tipo de empréstito, las cuales se verifican con a' e i'.

Recordemos que en estos empréstitos los títulos amortizados en cada período varían en progresión geométrica de razón $(1 + i')$. Además, el número de títulos amortizados en el primer sorteo se deduce de la siguiente expresión:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i'}} = \frac{12.000}{s_{\overline{8}|4,54545\%}} = 1.277,24$$

En consecuencia, el número de títulos amortizados en el octavo sorteo es:

$$M_8 = M_1(1 + i')^7 = M_1(1 + 0,0454545)^7 = 1.743,45$$

En lo referente al cálculo del número de títulos vivos al principio de sexto año, necesitamos conocer la cuantía del término amortizativo normalizado, la cual obtenemos de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$12.000 \times 50 = a' \times a_{\overline{8}|4,54545\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 91.134,78$$

Para hallar el número de títulos vivos al principio del sexto período planteamos la ecuación del saldo en el empréstito normalizado, por el método prospectivo, verificándose:

$$N_6 \times 50 = 91.134,78 \times a_{\overline{8-5}|4,54545\%} \quad \Rightarrow \quad N_6 = 5.006,23$$

Por último, hallamos la cuantía del término amortizativo comercial, partiendo de la fórmula de conversión utilizada de a':

$$91.134,78 = (a - 500 + 10 \times 2,5)\frac{50}{55} \quad \Rightarrow \quad a = 100.723,26\ €$$

EJERCICIO 19.2

Se emite un empréstito de 50.000 títulos de nominal 1.000 € y prima de emisión de 10 €, para ser amortizado mediante sorteo anual con términos amortizativos comerciales constantes. La duración de la operación es 7 años, los títulos perciben un cupón anual del 4% y una prima de amortización de 10 €. Anualmente se reparte un lote de 20.000 € entre los cien primeros títulos que resulten amortizados en cada período, los cuales pierden el último cupón y su valor de reembolso es el de emisión. Existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,2% sobre todas las cuantías pagadas, y para el conjunto de obligacionistas del 0,3% sobre

© Ediciones Pirámide

las cuantías recibidas. Los gastos de emisión ascienden a 121.000 €. Realizar el cuadro de amortización.

Resolución

Necesitamos conocer el número de títulos a amortizar en cada período, así como las cuantías anuales que ha de desembolsar el emisor. Para ello vamos a normalizar el empréstito.

Con el fin de realizar un planteamiento general, denominamos h al número de títulos que perciben lote y g_1 al tanto unitario de gastos a cargo del emisor. Así, la estructura del término amortizativo comercial del período s es:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - h(C \times i + C + P - V)](1 + g_1)$$

Al normalizar obtenemos las siguientes fórmulas de conversión:

$$a' = \left[\frac{a}{1 + g_1} - L + h(C \times i + C + P - V)\right]\frac{C}{C + P}$$

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = 3{,}96039604\%$$

Tenemos un empréstito normalizado tipo I, para el que se verifica:

$$50.000 \times 1.000 = a' \times a_{\overline{7}|3{,}96039604\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 8.318.292{,}61$$

Al sustituir obtenemos la cuantía constante teórica anual del término amortizativo comercial: $a = 8.432.306{,}49$ €.

El número de títulos que se amortizan en el año 1 es:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i'}} = \frac{50.000}{s_{\overline{7}|3{,}96039604\%}} = 6.338{,}09$$

Teniendo en cuenta la ley de variación $M_s = M_{s-1} \times (1 + i')$, y redondeando hasta las centésimas, obtenemos el número teórico de títulos que se amortizan en cada año:

$$M_2 = 6.589{,}10;\ M_3 = 6.850{,}05;\ M_4 = 7.121{,}34;$$

$$M_5 = 7.403{,}37;\ M_6 = 7.696{,}57;\ M_7 = 8.001{,}38$$

De acuerdo con el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, en la siguiente tabla se expone el plan de cancelación y el número de títulos vivos:

© Ediciones Pirámide

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	50.000
1	6.338	6.338	43.662
2	6.589	12.927	37.073
3	6.850	19.777	30.223
4	7.121	26.898	23.102
5	7.403	34.301	15.699
6	7.697	41.998	8.002
7	8.002	50.000	0

A partir del programa de cancelación de títulos, y dependiendo de las necesidades de información, el cuadro de amortización puede elaborarse según distintos modelos, calculando período a período el importe de cada uno de los sumandos de cada término amortizativo, o bien agrupando tales sumandos en los conceptos que sea preciso. De entre las distintas formas de agrupación, vamos a exponer dos modelos:

Modelo 1

Descomposición del término amortizativo en tres sumandos: cuota de interés total, cuota de amortización y características comerciales.

De acuerdo con la estructura del término amortizativo, realizando operaciones obtenemos:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - h(C \times i + C + P - V)](1 + g_1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = N_s \times C \times i + M_s \times C +$$

$$+ (N_s \times C \times i + M_s \times C) \times g_1 + [M_s \times P + L - h(\mathrm{C} \times i + C + P - V)](1 + g_1)$$

El cuadro de amortización es:

Año	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés total	Características comerciales
0	—	—	—	—
1	8.432.210,76	6.338.000,00	2.000.000,00	94.210,76
2	8.432.200,74	6.589.000,00	1.746.480,00	96.720,74
3	8.432.250,84	6.850.000,00	1.482.920,00	99.330,84
4	8.431.960,26	7.121.000,00	1.208.920,00	102.040,26
5	8.431.940,22	7.403.000,00	924.080,00	104.860,22
6	8.432.761,86	7.697.000,00	627.960,00	107.801,86
7	8.432.932,20	8.002.000,00	320.080,00	110.852,20

© Ediciones Pirámide

La columna de cuotas de interés total se ha obtenido calculando el 4% al valor nominal de todos los títulos vivos al inicio de cada período: $I_s = N_s \times C \times 4\%$.

La columna de cuotas de amortización se ha obtenido de acuerdo con la expresión: $A_s = M_s \times C$.

La columna de características comerciales se ha obtenido según la expresión:

$$(N_s \times C \times i + M_s \times C) \times g_1 + [M_s \times P + L - h(\mathrm{C} \times i + C + P - V)](1 + g_1)$$

La columna de término amortizativo real se obtiene de la suma de sus componentes.

Modelo 2

Descomposición del término amortizativo en cuatro sumandos: cuota de interés neta, cuota de reembolso neta, lote y gastos periódicos.

De acuerdo con la estructura del término amortizativo, realizando operaciones obtenemos:

$$a = (N_s - h) \times C \times i + [M_s(C + P) - h(C + P - V)] + L +$$
$$+\{(N_s - h) \times C \times i + [M_s(C + P) - h(C + P - V)] + L\} \times g_1$$

El cuadro de amortización es:

Año	Término amortizativo real	Cuota de reembolso neta	Cuota de interés neta	Lote	Gastos
0	—	—	—	—	—
1	8.432.210,76	6.399.380,00	1.996.000,00	20.000,00	16.830,76
2	8.432.200,74	6.652.890,00	1.742.480,00	20.000,00	16.830,74
3	8.432.250,84	6.916.500,00	1.478.920,00	20.000,00	16.830,84
4	8.431.960,26	7.190.210,00	1.204.920,00	20.000,00	16.830,26
5	8.431.940,22	7.475.030,00	920.080,00	20.000,00	16.830,22
6	8.432.761,86	7.771.970,00	623.960,00	20.000,00	16.831,86
7	8.432.932,20	8.080.020,00	316.080,00	20.000,00	16.832,20

La columna de cuotas de interés netas se ha obtenido calculando los cupones de los títulos vivos, menos 100, al inicio de cada período: $(N_s - 100) \times C \times i$.

La columna de cuotas de reembolso netas se ha obtenido según la expresión:

$$M_s(C + P) - h(C + P - V)$$

La columna de gastos se ha obtenido por agregación del 0,2% de la cuota de reembolso neta, la cuota de interés neta y el lote.

© Ediciones Pirámide

b) Empréstitos normalizables al tipo II

EJERCICIO 19.3

Se emite un empréstito de 15.000 títulos de 50 € nominales para ser amortizado en 20 años con términos amortizativos comerciales constantes y cupón periódico de 2,5 € por título. Los títulos son amortizados con una prima de 10 €. Además, anualmente se entrega un lote entre los diez primeros títulos que resulten amortizados en cada período, los cuales pierden el último cupón y son reembolsados por el nominal. La cuantía correspondiente al lote del primer año es de 200 €, incrementándose anualmente a razón de 100 €. Hallar el número de títulos vivos al principio del año 13.

Resolución

Partimos de la estructura del término amortizativo del período s:

$$a = N_s \times C \times i + M_s(C+ P)+ L_s - 10(C \times i + P)$$

Para la estructura anterior hemos tenido en cuenta que el emisor, en cada período, debe abonar los cupones de los títulos vivos al inicio del mismo, la amortización por el nominal más la prima y el lote. Además, como los diez títulos que reciben lote no cobran el último cupón ni la prima de amortización, tales cuantías han de ser restadas porque ya se habían considerado, respectivamente, en los primeros sumandos.

Si a la estructura anterior le aplicamos el proceso de normalización, obtenemos la siguiente expresión:

$$[a - L_s + 10(C \times i + P)]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Haciendo el cambio de variables, obtenemos los siguientes valores para i' y a'_s:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{2{,}5}{60} = 0{,}041\hat{6}$$

$$a'_s = [a - L_s + 10(C \times i + P)]\frac{C}{C + P}$$

Para hallar N_{13} debemos conocer la ley de variación de los términos amortizativos normalizados. Para ello, partimos de los términos amortizativos normalizados de los períodos s y $s + 1$:

$$a'_s = [a - L_s + 10(C \times i + P)]\frac{C}{C + P}$$

$$a'_{s+1} = [a - L_{s+1} + 10(C \times i + P)]\frac{C}{C + P}$$

© Ediciones Pirámide

Restando ambas expresiones miembro a miembro, tenemos la siguiente igualdad:

$$a'_{s+1} - a'_s = (L_s - L_{s+1})\frac{C}{C+P}$$

Considerando que el lote varía en progresión aritmética y despejando el término del período $s + 1$, tenemos:

$$a'_{s+1} = a'_s - d\frac{C}{C+P}$$

Por tanto, los términos amortizativos normalizados varían en progresión aritmética de razón $d' = -100\dfrac{C}{C+P} = -83,\hat{3}$.

Para hallar el número de títulos vivos al principio del período 13, necesitamos conocer, en primer lugar, el valor del término amortizativo normalizado del primer período, el cual lo obtenemos de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$15.000 \times 50 = \left(a'_1 - \frac{83,\hat{3}}{0,041\hat{6}} - 83,\hat{3} \times 20\right) a_{\overline{20}|0,041\hat{6}} + \frac{83,\hat{3} \times 20}{0,041\hat{6}} \quad \Rightarrow \quad a'_1 = 56.683,62$$

Una vez hallado el término anterior, podemos calcular la cuantía del término amortizativo normalizado del período 13. Dado que los términos varían en progresión aritmética, la relación existente entre ambos es:

$$a'_{13} = 56.683,62 - 12 \times 83,\hat{3} = 55.683,62$$

El número teórico de títulos vivos al principio del período 13 lo podemos hallar planteando en el empréstito normalizado la ecuación del saldo por el método prospectivo, en la que sólo hemos de tener en cuenta las cuantías pendientes de entrega al final del período 12:

$$N_{13} \times 50 = \left(55.683,62 - \frac{83,\hat{3}}{0,041\hat{6}} - 83,\hat{3} \times 8\right) a_{\overline{8}|0,041\hat{6}} + \frac{83,\hat{3} \times 8}{0,041\hat{6}} \quad \Rightarrow \quad N_{13} = 7.410,12$$

---

c) Empréstitos normalizables al tipo III

EJERCICIO 19.4

Se emite un empréstito de 20.000 títulos de 40 € nominales para ser amortizado en 12 años con términos amortizativos comerciales variables en un 3 % acumu-

© Ediciones Pirámide

lativo anual. Los títulos que resultan amortizados en cada período reciben una prima de 4 €. Durante los seis primeros años se abona un cupón de 1,6 € por título, y en el resto de los años el cupón es de 2 € por título. Hallar el importe de los intereses totales entregados en el séptimo año.

Resolución

Dado que el empréstito tiene características comerciales, es necesario proceder a su normalización. Para ello seguimos el proceso descrito. En primer lugar, determinamos la estructura del término amortizativo comercial del período *s*:

$$a_s = [N_s \times C \times i_s + M_s(C + P)]$$

En segundo lugar, dividimos ambos miembros por el coeficiente que multiplica a M_s y multiplicamos por C, obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{a_s \times C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i_s}{C + P} + M_s \times C$$

En tercer lugar, realizamos el cambio de variables, llamando a'_s al primer miembro de la expresión anterior e i'_s al factor que multiplica a $N_s \times C$. Teniendo en cuenta que existen dos cuantías diferentes de cupones, denominaremos i'_1 al tipo normalizado a aplicar a los seis primeros años e i'_2 al tipo normalizado a aplicar el resto de los años, quedándonos las siguientes expresiones:

$$i'_s = \frac{C \times i_s}{C + P} \begin{cases} i'_1 = \dfrac{1{,}6}{44} = 0{,}03636 \\ i'_2 = \dfrac{2}{44} = 0{,}04545 \end{cases}$$

$$a'_s = \frac{a_s \times C}{C + P}$$

Como nos piden los intereses del séptimo período, necesitamos hallar el número de títulos vivos al principio del mismo. Para calcularlo hemos de conocer la ley de variación de los términos amortizativos normalizados, la cual podemos obtener estableciendo la relación entre los términos amortizativos de dos períodos consecutivos. Así, para los períodos *s* y *s* + 1, y teniendo en cuenta que los términos comerciales varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}03$, verificándose $a_{s+1} = a_s \times q$, se tiene:

$$a'_s = \frac{a_s \times C}{C + P}$$

$$a'_{s+1} = \frac{a_{s+1} \times C}{C + P} = \frac{a_s \times q \times C}{C + P}$$

© Ediciones Pirámide

Dividiendo miembro a miembro, nos queda:

$$a'_{s+1} = a'_s \times q$$

Por tanto, los términos amortizativos normalizados también varían en progresión geométrica de razón 1,03.

La cuantía del primer término la obtenemos de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$N_1 \times C = A_{(a'_1,q)\overline{6}|i'_1} + A_{(a'_7,q)\overline{6}|i'_2}\,(1 + i'_1)^{-6}$$

$$800.000 = a'_1 \frac{1 - 1{,}03^6(1{,}03636)^{-6}}{1{,}03636 - 1{,}03} + a'_1 \times 1{,}03^6 \frac{1 - 1{,}03^6(1{,}04545)^{-6}}{1{,}04545 - 1{,}03} \times 1{,}03636^{-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a'_1 = 72.517{,}32$$

El número teórico de títulos vivos al principio del séptimo período lo hallamos planteando en el empréstito normalizado la ecuación del saldo por el método retrospectivo:

$$N_7 \times 40 = 800.000 \times 1{,}03636^6 - 72.517{,}32 \frac{1 - 1{,}03^6 \times 1{,}03636^{-6}}{1{,}03636 - 1{,}03} \times 1{,}03636^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_7 = 11.973{,}67$$

Por tanto, como los intereses del séptimo período se obtienen multiplicando el número de títulos vivos al principio de dicho período por el importe del cupón del período, los mismos ascienden a:

$$N_7 \times C \times i_2 = 11.973{,}67 \times 2 = 23.947{,}34\ €$$

19.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una sociedad emite un empréstito de 5.000 títulos de nominal 70 €, para ser amortizado con términos amortizativos constantes mediante sorteo en 8 años. El tipo de interés pactado es el 3,5% anual. Los títulos que resultan amortizados reciben una prima de 20 €. Anualmente se reparte un lote de 2.000 € entre los diez primeros títulos que resultan amortizados. Además, el emisor ha de pagar gastos periódicos del 0,15% sobre todas las cuantías entregadas. Calcular el número de títulos vivos al principio del año cinco y el número de títulos amortizados en el año seis.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La estructura del término amortizativo comercial del período s es:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L] \times 1{,}0015$$

Aplicando el proceso de normalización resulta la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{1{,}0015} - L\right)\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Hacemos el cambio de variables por a' e i' y obtenemos las siguientes expresiones:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{2{,}45}{90} = 0{,}027\hat{2} \qquad \text{y} \qquad a' = \left(\frac{a}{1{,}0015} - L\right)\frac{C}{C + P}$$

Una vez convertido el empréstito comercial en un empréstito normalizado tipo I, le son de aplicación todas las relaciones ya señaladas para este tipo de empréstito. Por tanto, hallamos el valor del término amortizativo normalizado a través de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$5.000 \times 70 = a' \times a_{\overline{8}|0{,}027\hat{2}} \quad \Rightarrow \quad a' = 49.277{,}18$$

Conocido el importe de a', podemos hallar el número de títulos vivos al principio del año cinco, planteando en el empréstito normalizado la ecuación del saldo por el método prospectivo:

$$N_5 \times 70 = 49.277{,}18 \times a_{\overline{8}|0{,}027\hat{2}} \quad \Rightarrow \quad N_5 = 2.634{,}16$$

El número de títulos amortizados en el año seis lo podemos calcular partiendo del número de títulos amortizados en el primer año y recordando que los títulos amortizados cada año en un empréstito de estas características varían en progresión geométrica de razón $(1 + i')$:

$$M_1 = \frac{5.000}{a_{\overline{8}|0{,}027\hat{2}}} = 567{,}85 \quad \Rightarrow \quad M_6 = 567{,}85 \times 1{,}027\hat{2}^5 = 649{,}46$$

2. Una sociedad emite un empréstito integrado por 40.000 títulos de nominal 40 € a amortizar por sorteo en 30 años mediante anualidad comercial constante y cupón anual de 1,6 €. Se sabe que los títulos reciben una prima de amortización de 5 € y que anualmente se reparte un lote de 10.000 € entre los 30 primeros títulos que resultan amortizados, los cuales son reembolsa-

© Ediciones Pirámide

dos por el 10% del valor de emisión. Además el emisor desea recibir en esta operación un importe neto de 1.342.000 €, siendo los gastos iniciales a su cargo de 30.000 € más el 2% del valor de emisión. Existen gastos periódicos a cargo del emisor, sobre las cuantías entregadas, del 0,2%. Hallar el número de títulos vivos al principio del período 20 y la cuantía del término amortizativo comercial.

Resolución

Según las características de este empréstito, el término amortizativo comercial del período s se corresponde con la siguiente estructura:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 30(C + P) + 30 \times 0{,}10 \times V] \times 1{,}002$$

Procedemos a la normalización realizando, los pasos señalados anteriormente. En consecuencia, pasamos al primer miembro los términos que no tienen ni N_s ni M_s, multiplicamos ambos miembros por C y dividimos por el factor que multiplica a M_s, obteniendo la siguiente expresión:

$$\left[\frac{a}{1{,}002} - L + 30(C + P) - 3 \times V\right]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Aplicamos las fórmulas de conversión que nos permiten transformar este empréstito comercial en un empréstito normalizado, y así utilizar las relaciones y equivalencias ya estudiadas en las lecciones anteriores. En consecuencia, se verifica:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{1{,}6}{45} = 0{,}03\hat{5} \quad \text{y} \quad a' = \left[\frac{a}{1{,}002} - L + 30(C + P) - 3 \times V\right]\frac{C}{C + P}$$

Transformado el empréstito en uno normalizado tipo I, podemos plantear la ecuación de equivalencia en el origen, lo que nos permite hallar el término amortizativo normalizado:

$$N_1 \times C = a' \times a_{\overline{n}|i'} = 40.000 \times 40 = a' \times a_{\overline{30}|0{,}03\hat{5}} \quad \Rightarrow \quad a' = 87.600{,}71$$

Una vez conocido el importe del término normalizado podemos hallar el número de títulos vivos al principio del período veinte, para lo cual planteamos la reserva por el método prospectivo:

$$N_{20} \times 40 = 87.600{,}71 \times a_{\overline{11}|0{,}03\hat{5}} \quad \Rightarrow \quad N_{20} = 19.653{,}83$$

© Ediciones Pirámide

A continuación hallamos el valor de emisión, teniendo en cuenta los recursos que necesita el emisor y los gastos iniciales que ha de satisfacer, por lo que se cumple la siguiente igualdad:

$$1.342.000 = 40.000 \times V - 30.000 - 0{,}02 \times 40.000 \times V \quad \Rightarrow \quad V = 35$$

Para finalizar, obtenemos el importe del término amortizativo comercial sustituyendo las cuantías halladas en la fórmula de conversión de a':

$$87.600{,}71 = \left[\frac{a}{1{,}002} - 10.000 + 30(40 + 5) - 3 \times 35\right]\frac{40}{45} \quad \Rightarrow \quad a = 107.520{,}41\ €$$

3. Se emite un empréstito de N_1 títulos de nominal 30 € para ser amortizados en 40 años, mediante sorteo con términos amortizativos constantes y con cupón anual de 1,5 €. La prima de amortización es de 6 € para cada título. Los títulos amortizados pierden el último cupón. Además, anualmente se entrega un lote cuyo importe es igual al número de títulos amortizados en cada período multiplicado por 100. El lote se reparte entre los 50 primeros títulos que resultan amortizados cada período, los cuales sí perciben el cupón del período. Sabiendo que el número teórico de títulos vivos al principio del año 15 es de 34.958,10, hallar el importe del lote y el total de intereses correspondientes al año quince.

Resolución

Dado que el empréstito es con características comerciales, señalamos en primer lugar la estructura del término amortizativo del período s:

$$a = N_s \times C \times i + M_s(C + P - C \times i) + 100 \times M_s + 50 \times C \times i$$

Aplicando el proceso de normalización sacamos factor común de los términos que contienen M_s:

$$a = N_s \times C \times i + M_s(C + P - C \times i + 100) + 50 \times C \times i$$

A continuación realizamos el resto de los pasos de la normalización y nos queda la siguiente expresión:

$$(a - 50 \times C \times i)\frac{C}{C + P - C \times i + 100} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P - C \times i + 100} + M_s \times C$$

Para finalizar con la normalización, hacemos el cambio de variables que nos permite convertir este empréstito en un empréstito normalizado tipo I:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P - C \times i + 100} = \frac{1{,}5}{134{,}5} = 0{,}011152416$$

© Ediciones Pirámide

$$a' = (a - 50 \times C \times i)\,\frac{C}{C + P - C \times i + 100}$$

Como conocemos el número de títulos vivos al principio de período quince, podemos hallar el valor del término amortizativo normalizado a través del saldo por el método prospectivo:

$$34.958{,}10 \times 30 = a' \times a_{\overline{40-14}|0{,}011152416} \quad \Rightarrow \quad a' = 46.689{,}45$$

Conocido el término podemos calcular el número de títulos emitidos, planteando la ecuación de equivalencia en el origen:

$$N_1 \times 30 = 46.680{,}45\; a_{\overline{40}|0{,}011152416} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 50.000$$

A continuación hallamos el número de títulos amortizados en el primer período, lo que nos permitirá hallar posteriormente el número de títulos amortizados en el período 15:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i'}} = \frac{50.000}{a_{\overline{40}|0{,}011152416}} = 998{,}69$$

$$M_{15} = 998{,}69 \times 1{,}011152416^{14} = 1.166{,}4428$$

Por tanto, al ser el importe del lote del período quince el producto de cien por el número de títulos amortizados en dicho período, se tiene:

$$L_{15} = M_{15} \times 100 = 116.644{,}28\ €$$

En cuanto a los intereses del período quince, se obtienen de la expresión siguiente:

$$N_{15} \times C \times i - M_{15} \times C \times i + 50 \times C \times i =$$

$$= 34.958{,}10 \times 1{,}5 - 1.166{,}4428 \times 1{,}5 + 50 \times 1{,}5 = 50.762{,}49\ €$$

4. Se emite un empréstito con títulos de nominal 80 € para ser amortizado en 35 años, con términos amortizativos anuales constantes y cupón anual del 4%. Los títulos se amortizan con prima y se reparte anualmente un lote de cuantía 20.000 € entre los primeros 100 títulos que resultan amortizados, los cuales no reciben ni el cupón del período ni el valor de reembolso. Los gastos periódicos a cargo del emisor son del 0,1% de todas las cantidades entregadas. Se sabe que el número teórico de títulos amortizados en el año 20 es de 720,30 y que el número

© Ediciones Pirámide

teórico de títulos amortizados en el año 1 es de 370,87. Hallar la cuantía del término amortizativo comercial.

Resolución

La estructura del término amortizativo del período s es:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 100(C + P + C \times i)] \times 1{,}001$$

A continuación aplicamos el proceso de normalización:

$$\left[\frac{a}{1{,}001} - L + 100(C + P + C \times i)\right]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Realizamos el cambio de variables necesario para convertir este empréstito en un empréstito normalizado:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{3{,}2}{80 + P} \qquad \text{y} \qquad a' = \left[\frac{a}{1{,}001} - L + 100(C + P + C \times i)\right]\frac{C}{C + P}$$

Llegamos a un empréstito normalizado tipo I, en el que los títulos amortizados en cada período varían en progresión geométrica de razón $(1 + i')$, y, en consecuencia, al conocer el número de títulos amortizados en dos períodos podemos calcular i'. Por tanto, se verifica:

$$M_{20} = M_1(1 + i')^{19} \quad \Rightarrow \quad 720{,}30 = 370{,}87 \times (1 + i')^{19} \quad \Rightarrow \quad i' = 0{,}035555186$$

Conociendo el valor de i', a través de su fórmula de conversión, podemos calcular el importe de la prima de amortización:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{3{,}2}{80 + P} = 0{,}035555186 \quad \Rightarrow \quad P = 10$$

La cuantía del término amortizativo comercial la obtenemos despejándola de la expresión de la fórmula de conversión de a'. Para ello debemos conocer la cuantía del término amortizativo normalizado que se obtiene de la ecuación de equivalencia en el origen, aunque antes necesitamos conocer el número de títulos emitidos. Como sabemos el número de títulos amortizados en el primer período, podemos hallar N_1 a partir de la fórmula que relaciona ambas magnitudes:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i'}} \quad \Rightarrow \quad 370{,}87 = \frac{N_1}{s_{\overline{35}|0{,}035555186}} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 25.000$$

© Ediciones Pirámide

La ecuación de equivalencia en el origen nos permite hallar a':

$$25.000 \times 80 = a' \times a_{\overline{35}|0,035555186} \quad \Rightarrow \quad a' = 100.779,86$$

Sustituyendo los diferentes valores obtenidos en la fórmula de conversión de a', podemos conocer la cuantía del término amortizativo comercial:

$$100.779,86 = \left[\frac{a}{1,001} - 20.000 + 100(80 + 10 + 3,2)\right]\frac{80}{80 + 10} \Rightarrow a = 124.181,40\ €$$

5. Se emiten 60.000 títulos de nominal 150 € para ser amortizados mediante sorteo en 30 años. Anualmente se amortizan 2.000 títulos y el tipo de interés aplicado a la operación es el 4% anual. Los títulos se amortizan con una prima de 10 €. Anualmente se reparte un lote constante entre los 25 primeros títulos amortizados, los cuales reciben además un importe igual al valor de reembolso. Sabemos que el término amortizativo normalizado correspondiente al año 14 es de 491.250 € y que el término amortizativo comercial del quinto año es 676.000 €. Hallar el lote.

Resolución

Definimos, en primer lugar, la estructura del término amortizativo del período s:

$$a_s = N_s \times C \times i + M(C + P) + L + 25(C + P)$$

A continuación aplicamos el proceso de normalización, obteniendo la siguiente expresión:

$$[a_s - L - 25(C + P)]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M \times C$$

Las fórmulas de conversión son:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{6}{160} = 0,0375 \qquad \text{y} \qquad a'_s = [a_s - L - 25(C + P)]\frac{C}{C + P}$$

Hemos obtenido un empréstito normalizado tipo II.

Teniendo en cuenta que periódicamente se amortiza el mismo número de títulos, debemos saber cuál es la variación de los términos amortizativos comerciales. Para ello, partimos de las estructuras de los términos amortizativos de dos períodos consecutivos:

$$a_s = N_s \times C \times i + M(C + P) + L + 25(C + P)$$
$$a_{s+1} = N_{s+1} \times C \times i + M(C + P) + L + 25(C + P)$$

© Ediciones Pirámide

Restando miembro a miembro, nos queda la siguiente expresión:

$$a_{s+1} = a_s - M \times C \times i$$

Por tanto, los términos amortizativos comerciales varían en progresión aritmética de razón $d = -2.000 \times 6 = -12.000$.

Necesitamos conocer la ley de variación de los términos amortizativos normalizados y así hallar el número de títulos emitidos. Para ello realizamos la misma operación anterior, es decir, partimos de los términos normalizados correspondientes a dos períodos consecutivos:

$$a'_s = [a_s - L - 25(C + P)]\frac{C}{C + P}$$

$$a'_{s+1} = [a_{s+1} - L - 25(C + P)]\frac{C}{C + P}$$

Restando miembro a miembro, y teniendo en cuenta que $a_{s+1} = a_s - M \times C \times i$, obtenemos la relación entre dos términos normalizados consecutivos:

$$a'_{s+1} = a'_s - M \times C \times i\frac{C}{C + P} = a'_s - 11.250$$

De lo anterior se deduce que los términos normalizados varían en progresión aritmética de razón -11.250.

Como sabemos el importe del término normalizado del año 14, podemos conocer el importe del mismo correspondiente al primer período, a través de la siguiente expresión:

$$491.250 = a'_1 - 13 \times 11.250 \quad \Rightarrow \quad a'_1 = 637.500$$

A continuación hallamos el importe del primer término amortizativo comercial partiendo de la relación existente con el importe del año cinco:

$$676.000 = a_1 - 4 \times 12.000 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 724.000$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre el término amortizativo normalizado del primer año y su correspondiente comercial, podemos obtener la cuantía del lote:

$$637.500 = (724.000 - L - 25 \times 160)\frac{150}{160} \quad \Rightarrow \quad L = 40.000 \text{ €}$$

6. Se emite un empréstito de 35.000 títulos de nominal 80 € y prima de emisión de 10 €, para ser amortizado mediante sorteo con términos amortizativos

© Ediciones Pirámide

comerciales constantes. El tipo anual es del 4% y la duración de la operación 20 años. Anualmente se reparte un lote entre los veinte primeros títulos que resulten amortizados. La cuantía del lote del primer año es 2.000 €, incrementándose anualmente en 100 €. Existen gastos periódicos para el emisor sobre todas las cuantías entregadas del 0,1% y para el conjunto de obligacionistas de 0,2% sobre las cuantías recibidas. Hallar el número de títulos amortizados en el primer período.

Resolución

Partimos de la estructura del término amortizativo comercial del período s:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s \times C + L_s] \times 1{,}001$$

A continuación aplicamos el proceso de normalización, obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{a}{1{,}001} - L_s = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

Sustituyendo el primer miembro por a'_s y considerando que en este caso particular el tipo del préstamo coincide con el tipo de interés normalizado, o sea, $i = i'$, nos queda la estructura de un empréstito normalizado tipo II:

$$i' = 0{,}04;\ a'_s = \frac{a}{1{,}001} - L_s$$

Teniendo en cuenta que los términos amortizativos normalizados no son constantes, debemos conocer su ley de variación. Para ello partimos de los valores de los términos amortizativos normalizados en dos períodos consecutivos, s y $s + 1$:

$$a'_s = \frac{a}{1{,}001} - L_s$$

$$a'_{s+1} = \frac{a}{1{,}001} - (L_s + 100)$$

Restando miembro a miembro, nos queda la siguiente expresión:

$$a'_{s+1} = a'_s - 100$$

Por tanto, los términos amortizativos normalizados varían en progresión aritmética de razón $d = -100$.

© Ediciones Pirámide

Necesitamos conocer la cuantía del término amortizativo comercial, y para ello debemos calcular el importe del primer término amortizativo normalizado, por lo que planteamos la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$N_1 \times C = \left(a'_1 + d \times n + \frac{d}{i'}\right) a_{\overline{n}|i'} - \frac{d \times n}{i'} \quad \Rightarrow$$

$$35.000 \times 80 = \left(a'_1 - 100 \times 20 - \frac{100}{0{,}04}\right) a_{\overline{20}|0{,}04} + \frac{100 \times 20}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad a' = 206.849{,}81$$

Conocida la cuantía del primer término amortizativo normalizado, podemos hallar el importe del término amortizativo comercial del empréstito:

$$a'_1 = 206.849{,}81 = \frac{a}{1{,}001} - 2.000 \quad \Rightarrow \quad a = 209.058{,}66$$

Una vez conocido el importe del término comercial podemos plantear la estructura de dicho término para el primer período de vida del empréstito, y así obtener el número teórico de títulos amortizados en el primer año:

$$a = [N_1 \times C \times i + M_1 \times C + L_1] \times 1{,}001$$

$$209.056{,}66 = [35.000 \times 80 \times 0{,}04 + M_1 \times 80 + 2.000] \times 1{,}001 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 1.185{,}62$$

7. Una sociedad emite un empréstito de 15.000 títulos de nominal 40 €, para ser amortizado con términos amortizativos constantes mediante sorteo en 12 años. El tipo de interés pactado es el 4% anual. Los tres primeros años sólo se abonan intereses, comenzándose la amortización al final del cuarto año. Los títulos amortizados en cada año pierden el último cupón. El emisor ha de pagar gastos periódicos del 0,3% sobre los intereses y del 0,2% sobre el resto de las cuantías entregadas. Los obligacionistas han de satisfacer unos gastos periódicos del 0,4% sobre las cuantías recibidas. Calcular las cuantías entregadas por el emisor y las recibidas por los obligacionistas.

Resolución

En cuanto a la cuantía que entrega el emisor en los tres primeros años, se corresponde con la cuota de interés devengada en dichos períodos, incrementada con los gastos correspondientes:

$$15.000 \times 40 \times 0{,}04 \times 1{,}003 = 24.072 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

Para el resto de los años de vigencia del empréstito, y considerando las características del empréstito, la estructura del término amortizativo del período s es la siguiente:

$$a = N_s \times C \times i \times 1{,}003 + M_s \times C \times 1{,}002 - M_s \times C \times i \times 1{,}003$$
$$a = N_s \times C \times i \times 1{,}003 + M_s \times C(1{,}002 - i \times 1{,}003)$$

Aplicando el proceso de normalización, resulta la siguiente expresión:

$$\frac{a}{1{,}002 - i \times 1{,}003} = N_s \times C\frac{i \times 1{,}003}{1{,}002 - i \times 1{,}003} + M_s \times C$$

Hacemos el cambio del variables de a' e i' y obtenemos las siguientes expresiones:

$$i' = \frac{i \times 1{,}003}{1{,}002 - i \times 1{,}003} = \frac{0{,}04012}{0{,}96188} = 0{,}04170985;\ a' = \frac{a}{1{,}002 - i \times 1{,}003}$$

Quedando $a' = N_s \times C \times i' + M_s \times C$, que se corresponde con la estructura de un empréstito normalizado tipo I.

Una vez convertido el empréstito comercial en un empréstito normal, hallamos el valor del término amortizativo normalizado de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$15.000 \times 40 = a' \times a_{\overline{9}|0{,}041709985} \quad \Rightarrow \quad a' = 81.325{,}79$$

Conocido el importe de a', podemos hallar el importe del término amortizativo comercial a entregar por el emisor en el intervalo temporal [4,12]:

$$a' = 81.325{,}79 = \frac{a}{1{,}002 - 0{,}04 \times 1{,}003} \quad \Rightarrow \quad a = 78.225{,}65\ €$$

En lo referente a las cuantías recibidas por el conjunto de obligacionistas, tenemos que para los tres primeros años los intereses a percibir serán los entregados por el emisor menos los gastos correspondientes: $15.000 \times 40 \times 0{,}04(1 - 0{,}004) = 23.904$ €. Y en el resto de los períodos de vigencia del empréstito la cuantía de los términos amortizativos netos se obtienen de la siguiente expresión:

$$a_a = (N_s \times C \times i + M_s \times C - M_s \times C \times i)(1 - 0{,}004)$$

Para el cálculo del término amortizativo neto del conjunto de obligacionistas, hallamos en primer lugar el número de títulos amortizados en el pri-

© Ediciones Pirámide

mer período, partiendo de la estructura del término comercial para dicho período:

$$a = 78.225{,}65 = 15.000 \times 40 \times 0{,}04 \times 1{,}003 + M_1 \times 40 \times 1{,}002 - M_1 \times$$
$$\times 40 \times 0{,}04 \times 1{,}003 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 1.407{,}49$$

También se puede obtener con la siguiente expresión:

$$M_1 = \frac{15.000}{s_{\overline{9}|0{,}041709985}} = 1.407{,}50$$

Sustituyendo el número de títulos amortizados en el primer período en la ecuación del término amortizativo neto para el conjunto de obligacionistas, obtenemos el importe de éste para los años cuarto al duodécimo, ambos inclusive:

$$a_a = (15.000 \times 40 \times 0{,}04 + 1.407{,}49 \times 40 - 1.407{,}49 \times 40 \times 0{,}04)(1 - 0{,}004) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a_a = 77.735{,}43 \text{ €}$$

8. Una empresa emite un empréstito a amortizar mediante sorteo en n años y con anualidad comercial constante. Las características de la emisión son las siguientes: 400.000 títulos de 100 € de nominal; 98 € de valor de emisión; cupón anual del 5,5%; prima de amortización constante de 10 € por título; lote anual de 500 €, el cual se distribuye entre los diez primeros títulos amortizados en cada año, perdiendo dichos títulos el último cupón y siendo reembolsados por el valor de emisión. Se sabe que la cuantía neta de los cupones que el emisor abona en el año 18 asciende a 480.690,03 €. Determinar: *a*) cuantía del término amortizativo comercial anual, y *b*) número de títulos que no percibirán lote en el último año.

Resolución

Partimos de la estructura del término amortizativo del período s:

$$a = N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 10(C \times i + C + P) + 10 \times V$$

Aplicando el proceso de normalización, resulta la siguiente expresión:

$$[a - L + 10(C \times i + C + P) - 10 \times V]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

© Ediciones Pirámide

Hacemos el cambio de variables de a' e i' y obtenemos las siguientes expresiones:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{100 \times 0{,}055}{100 + 10} = 0{,}05$$

$$a' = [a - L + 10(C \times i + C + P) - 10 \times V]\frac{C}{C + P}$$

Por otra parte, con el importe neto de los cupones abonados por el emisor en el año 18 podemos obtener el número de títulos vivos al principio de dicho año:

$$480.690{,}03 = N_{18} \times C \times i - 10 \times C \times i = N_{18} \times 5{,}5 - 55 \quad \Rightarrow \quad N_{18} = 87.408{,}19$$

El saldo al principio del año 18 del empréstito normalizado, por el método retrospectivo, es:

$$87.408{,}19 \times 100 = 400.000 \times 100 \times 1{,}05^{17} - a' \times s_{\overline{17}|0{,}05} \quad \Rightarrow \quad a' = 3.209.703{,}48$$

Una vez calculado el término amortizativo normalizado podemos hallar el término comercial a través de la expresión que los relaciona:

$$a' = 3.209.703{,}48 = [a - 500 + 10(5{,}5 + 100 + 10) - 10 \times 98] \times \frac{100}{110} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = 3.530.998{,}83 \text{ €}$$

El número de años de vigencia del empréstito lo podemos obtener de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación, considerando el valor nominal del empréstito, los términos amortizativos y tipo de interés normalizados:

$$400.000 \times 100 = 3.209.703{,}48 \times a_{\overline{n}|0{,}05} \quad \Rightarrow \quad n = 20$$

En el apartado *b*) nos piden el número de títulos que no perciben lote en el último año de vida del empréstito. Para su cálculo debemos conocer cuántos títulos son amortizados en dicho período. El número de títulos amortizados en el año 20 lo calculamos a partir del número de títulos amortizados en el primer año, considerando que, al ser un empréstito tipo I, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$M_1 = \frac{400.000}{s_{\overline{20}|5\%}} = 12.097{,}03$$

$$M_{20} = M_1(1 + i')^{19} = 12.097{,}03 \times 1{,}05^{19} = 30.568{,}59$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el número de títulos que en el año 20 no reciben lote es el número de títulos amortizados en dicho año menos los diez que reciben el lote; en consecuencia, 30.558 títulos.

19.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se emite un empréstito de 12.000 títulos de nominal 40 €, para ser amortizado mediante sorteo, con términos amortizativos comerciales anuales variables en progresión aritmética de razón 1.000 €. El cupón anual es de 0,8 €. La duración de la operación es 10 años. Los títulos son reembolsados con prima constante. Además, anualmente se reparte un lote de cuantía 500 € a repartir entre los cinco primeros títulos que resulten amortizados, los cuales pierden la prima de amortización y el último cupón. Sabiendo que el tipo de interés normalizado es del 1,6% anual, determinar la cuantía de la prima de amortización y el número de títulos vivos al principio del séptimo año.

2. Una determinada empresa necesita obtener recursos por valor de 1.190.000 €, por lo que decide emitir un empréstito para ser amortizado en 15 años mediante sorteo con términos amortizativos comerciales constantes de cuantía 169.950,57 €. El tipo de interés anual es el 5%. Los títulos tienen un nominal de 45 € y son reembolsados con una prima de 15 € por título. Anualmente, y entre los 30 primeros títulos amortizados, se reparte un lote variable que aumenta cada año a razón de 1.500 €. Los títulos que reciben lote son rembolsados por el valor de emisión. Existen gastos de emisión por valor de 10.000 €. Sabiendo que el número teórico de títulos vivos al principio del año 12 es 9.120,56, hallar la cuantía del lote del primer año.

3. Sea un empréstito de 50.000 títulos de nominal 50 €, a amortizar por sorteo en 20 años con términos amortizativos comerciales anuales. Los correspondientes términos amortizativos normalizados aumentan a razón de un 10% anual. El tipo de interés anual es el 5%. Los títulos son reembolsados con una prima de 10 €. Además, anualmente se distribuye un lote de 2.000 € entre los primeros 20 títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales son rembolsados solamente por el nominal. Hallar el número de títulos vivos al principio del décimo período.

4. Una sociedad emite un empréstito a amortizar por sorteo en 30 años mediante anualidad comercial constante. El nominal de cada obligación es de 60 €, siendo el cupón del 4,5% anual. El valor de emisión de las obligaciones es V y existe una prima de amortización por obligación de 30 €. Anualmente se reparte un lote constante de 2.300 € entre las 20 primeras obligaciones amortizadas, las cuales pierden el último cupón y son reembolsadas por el valor de emisión. El

© Ediciones Pirámide

emisor soporta unos gastos anuales del 0,1% sobre todas las cuantías abonadas. Los obligacionistas soportan unos gastos anuales del 0,25% sobre todas las cuantía recibidas. Si el importe del término amortizativo comercial es de 2.299.610 € y el número teórico de obligaciones amortizadas en el quinto año es 11.828,68, determinar la cuantía del valor de emisión.

5. Una sociedad emite un empréstito de 150.000 títulos con prima de emisión de 200 €, a amortizar por sorteo en 25 años mediante anualidad comercial constante. El nominal de cada título es de 10.000 €; el cupón anual es de 720 € y cada uno de los títulos amortizados percibirá una prima constante *P*. Se reparte un lote constante anual de 400.000 € entre los 20 primeros títulos amortizados en cada sorteo, los cuales pierden el último cupón y la prima de amortización. Si los gastos anuales a cargo del emisor son del 0,1% sobre las cantidades entregadas, y el número teórico de títulos amortizados en el primer período es 2.487,46, determinar el término amortizativo comercial.

6. Se emite un empréstito para ser amortizado mediante sorteo en 30 años. El nominal de los títulos es de 60 € y se amortizan con una prima de 20 € por título. Los intereses periódicos son del 4% anual y la prima de emisión es de 20 €. Anualmente se reparte un lote de 4.000 € entre los 10 primeros títulos que resultan amortizados, los cuales son reembolsados por su valor de emisión. Además, los títulos que se amortizan cada período pierden el último cupón. Calcular el número de títulos emitidos, si el emisor paga periódicamente unos gastos del 0,1% sobre las cuantías entregadas y los términos anuales entregados por el emisor son de cuantía 84.619,04 €.

7. Un empréstito se emite con títulos de nominal 80 € y prima de amortización de 22 €. La amortización es anual mediante sorteo y los términos amortizativos comerciales son de cuantía 882.527,38 €. Anualmente se abonan intereses al 6% anual y se reparte un lote constante entre los 40 primeros títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales pierden el último cupón. El emisor abona periódicamente unos gastos del 0,1% sobre todas las cuantías entregadas. La duración de la operación es de 24 años y sabemos que el número teórico de títulos amortizados en el año 18 es 6.123,89. Hallar el importe del lote.

© Ediciones Pirámide

20 Empréstitos con características comerciales (II)

OBJETIVOS

- Aplicar la metodología de normalización a los empréstitos con intereses acumulados.
- Resolver la problemática de los empréstitos con cupón fraccionado.
- Determinar los diferentes tipos efectivos.
- Identificar los empréstitos con tanto de rendimiento constante y resolver su problemática.
- Analizar la problemática de las características comerciales en los empréstitos sin cancelación escalonada.
- Realizar la distribución temporal de costes e ingresos en los empréstitos con características comerciales.

SUMARIO

20.1. Empréstitos con intereses acumulados, amortizables por sorteo y con características comerciales.
20.2. Empréstitos amortizables por sorteo y con cupón fraccionado.
20.3. Tantos efectivos.
20.4. Empréstitos amortizables por sorteo a tanto de rendimiento constante.
20.5. Empréstitos sin cancelación escalonada y con características comerciales.
20.6. Distribución temporal de costes de financiación y de ingresos financieros.
20.7. Ejercicios y problemas resueltos.
20.8. Ejercicios y problemas propuestos.

20.1. EMPRÉSTITOS CON INTERESES ACUMULADOS, AMORTIZABLES POR SORTEO Y CON CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

En este apartado nos centramos en la aplicación de la metodología de normalización a los empréstitos con pago de intereses acumulados. En términos generales, y con ligeras adaptaciones, la metodología a aplicar coincide prácticamente con la ya estudiada para los empréstitos con cupón periódico.

Consideremos un empréstito amortizable por sorteo, de cupón cero, con términos amortizativos, tipo de interés, lote y prima de amortización todos ellos variables, y con gastos periódicos a cargo del emisor. A dicho empréstito le corresponde la siguiente estructura del término amortizativo comercial que debe abonar el emisor en el período s:

$$a_s = \left[M_s \times C \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) + M_s \times P_s + L_s \right] (1 + g_1)$$

Agrupamos los términos que contengan M_s, resultando la siguiente expresión:

$$a_s = \left\{ M_s \left[C \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) + P_s \right] + L_s \right\} (1 + g_1)$$

A continuación pasamos al primer miembro los términos que no tengan M_s:

$$\frac{a_s}{(1 + g_1)} - L_s = M_s \left[C \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) + P_s \right]$$

© Ediciones Pirámide

Dividimos ambos miembros entre el coeficiente que multiplica a M_s y multiplicamos ambos miembros por $C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$, obteniendo la siguiente expresión:

$$\left[\frac{a_s}{(1 + g_1)} - L_s\right] \times \frac{C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)}{C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) + P_s} = M_s \times C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

Para finalizar hacemos el cambio de variable, denominando a'_s al primer miembro, por lo que el término amortizativo normalizado verifica la siguiente expresión:

$$a'_s = M_s \times C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

La estructura señalada se corresponde con la de un empréstito normalizado de cupón cero tipo III.

Una vez normalizado el empréstito, cualquier problemática se puede resolver aplicando al empréstito normalizado todas las relaciones ya estudiadas. Dicho empréstito consta del mismo número de títulos que el comercial, con idéntico nominal e igual plan de amortización, siendo el término amortizativo normalizado a'_s.

a) Empréstitos normalizables al tipo I

EJERCICIO 20.1

Se emite un empréstito de 50.000 títulos de cupón cero para ser amortizado mediante sorteo en 30 años, con términos amortizativos comerciales constantes. El nominal de cada título es de 50 € y el tipo de interés del 10% anual. Se reparte anualmente un lote de 500 € entre los diez primeros títulos que resultan amortizados en cada período. Hallar la cuantía del término amortizativo comercial y el número de títulos amortizados en el décimo período.

Resolución

Al tratarse de títulos cupón cero, la estructura del término amortizativo del período s es:

$$a = M_s \times C(1 + i)^s + L$$

Aplicando el proceso de normalización:

$$a - L = M_s \times C(1 + i)^s$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el término amortizativo normalizado es: $a' = a - L$, coincidiendo el tipo de interés normalizado con el del empréstito comercial, $i' = i = 10\%$. La cuantía de este término la obtenemos de la ecuación de equivalencia en el origen:

$$50.000 \times 50 = a' \times a_{\overline{30}|10\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 265.198,12$$

En consecuencia, el término amortizativo comercial asciende a 265.698,12 €, obtenido de la expresión $265.198,12 = a - 500$.

Para determinar el número de títulos amortizados en el año 10, hemos de saber el número de títulos amortizados en el primer período. Como el empréstito normalizado es del tipo I, podemos obtener el número de títulos amortizados en el primer período a través de la expresión ya estudiada para esta modalidad:

$$M_1 = \frac{N_1}{\ddot{a}_{\overline{n}|i'}} = \frac{50.000}{\ddot{a}_{\overline{30}|10\%}} = 4.821,78$$

Además, hemos de tener en cuenta que los títulos amortizados en cada período varían en progresión geométrica de razón $(1 + i')^{-1}$, verificándose:

$$M_s = M_{s-1}(1 + i')^{-1}$$

En consecuencia:

$$M_{10} = 4.821,78 \times 1,10^{-9} = 2.044,91$$

Ejercicio 20.2

Determinada empresa emite un empréstito cupón cero formado por 100.000 títulos de nominal 100 € y prima de emisión de 5 €. La amortización es por sorteo anual, con términos amortizativos comerciales constantes. La duración de la operación es 7 años y los títulos devengan un interés anual del 3%. Anualmente se reparte un lote de 20.000 € entre los cien primeros títulos que resulten amortizados en cada período. Los gastos de emisión ascienden a 130.000 € y existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,1% sobre todas las cuantías pagadas. Realizar el cuadro de amortización.

Resolución

Necesitamos conocer el número de títulos a amortizar en cada período, así como las cuantías anuales que ha de desembolsar el emisor. Para ello vamos a normalizar el empréstito. La estructura del término amortizativo comercial es:

$$a = [M_s \times C(1 + i)^s + L](1 + g_1)$$

© Ediciones Pirámide

Las fórmulas de conversión son:

$$a' = \frac{a}{1 + g_1} - L;\ i' = i$$

Se trata de un empréstito normalizado tipo I, en el que se verifica:

$$100.000 \times 100 = a' \times a_{\overline{7}|3\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 1.605.063,54$$

Al sustituir obtenemos la cuantía constante teórica anual del término amortizativo comercial: $a = 1.626.688,60$ €.

El valor de reembolso de los títulos que se amortizan en el año 1 es $C_1 = 100 \times \times 1,03 = 103$ €, obteniéndose los restantes a través de la expresión $C_s = C(1 + i)^s = = 100 \times 1,03^s$.

El número de títulos a amortizar en el año 1, redondeando a dos decimales, es:

$$M_1 = \frac{a'}{C_1} = \frac{1.605.063,54}{103} = 15.583,14$$

Teniendo en cuenta la relación $M_s = M_{s-1}(1 + i)^{-1}$, y redondeando hasta las centésimas, obtenemos el número teórico de títulos que se amortizan en cada año:

$$M_2 = 15.129,26;\ M_3 = 14.688,60;\ M_4 = 14.260,78;$$

$$M_5 = 13.845,42;\ M_6 = 13.442,16;\ M_7 = 13.050,64$$

De acuerdo con el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, en la siguiente tabla se expone el plan de cancelación y el número de títulos vivos:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	100.000
1	15.583	15.583	84.417
2	15.129	30.712	69.288
3	14.689	45.401	54.599
4	14.261	59.662	40.338
5	13.845	73.507	26.493
6	13.442	86.949	13.051
7	13.051	100.000	0

De igual forma a lo señalado para los empréstitos con cupón periódico, en esta modalidad el cuadro de amortización puede realizarse según distintos mode-

© Ediciones Pirámide

los, calculando período a período el importe de cada uno de los sumandos de cada término amortizativo, o bien agrupando tales sumandos en los conceptos que sea preciso. De entre las distintas formas de agrupación, vamos a exponer dos modelos:

Modelo 1

Descomposición del término amortizativo en tres sumandos: cuota de interés total, cuota de amortización y características comerciales.

Teniendo en cuenta que se verifica:

$$M_s \times C(1+i)^s = M_s \times C[(1+i)^s - 1] + M_s \times C$$

el término amortizativo comercial queda:

$$a = \{M_s \times C[(1+i)^s - 1] + M_s \times C + L\}(1+g_1) = M_s \times C[(1+i)^s - 1] + \\ + M_s \times C + \{M_s \times C[(1+i)^s - 1] + M_s \times C\} \times g_1 + L(1+g_1)$$

En la segunda ecuación anterior, el primer sumando representa los intereses pagados en cada período; el segundo la cuota de amortización, y la agregación de los dos últimos corresponde a las características comerciales. En consecuencia, el cuadro de amortización es:

Año	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Características comerciales
0	—	—	—	—
1	1.626.674,05	1.558.300,00	46.749,00	21.625,05
2	1.626.660,65	1.512.900,00	92.135,61	21.625,04
3	1.626.692,10	1.468.900,00	136.167,03	21.625,07
4	1.626.700,63	1.426.100,00	178.975,55	21.625,08
5	1.626.675,90	1.384.500,00	220.550,85	21.625,05
6	1.626.734,33	1.344.200,00	260.909,22	21.625,11
7	1.626.767,63	1.305.100,00	300.042,49	21.625,14

Modelo 2

Descomposición del término amortizativo en tres sumandos: valores de reembolso, lote y gastos periódicos.

De acuerdo con la estructura del término amortizativo, se tiene:

$$a = [M_s \times C(1+i)^s + L] \times (1+g_1) = \\ = M_s \times C(1+i)^s + L + [M_s \times C(1+i)^s + L] \times g_1$$

© Ediciones Pirámide

En la segunda ecuación anterior, el primer sumando constituye el valor de reembolso de los títulos amortizados en cada período; el segundo, el lote, y el tercero, los gastos periódicos.

El cuadro de amortización es:

Año	Término amortizativo real	Valor de reembolso	Lote	Gastos
0	—	—	—	—
1	1.626.674,05	1.605.049,00	20.000,00	1.625,05
2	1.626.660,65	1.605.035,61	20.000,00	1.625,04
3	1.626.692,10	1.605.067,03	20.000,00	1.625,07
4	1.626.700,63	1.605.075,55	20.000,00	1.625,08
5	1.626.675,90	1.605.050,85	20.000,00	1.625,05
6	1.626.734,33	1.605.109,22	20.000,00	1.625,11
7	1.626.767,63	1.605.142,49	20.000,00	1.625,14

b) Empréstitos normalizables al tipo II

EJERCICIO 20.3

Se emite un empréstito de 30.000 títulos de cupón cero, siendo el nominal de cada título de 40 €, para ser amortizado en 20 años con términos amortizativos comerciales variables en progresión aritmética de razón 2.000 € y tipo de interés del 4% anual. Anualmente se reparte un lote constante de 1.000 €. Hallar el número de títulos vivos al principio del período 15.

Resolución

Partimos de la estructura del término amortizativo comercial del período s:

$$a_s = M_s \times C(1 + i)^s + L$$

Aplicamos el proceso de normalización, obteniendo la siguiente expresión:

$$a_s - L = M_s \times C(1 + i)^s$$

El primer miembro se corresponde con el término amortizativo normalizado del período s, a'_s. Para hallar el número de títulos vivos al principio del período 15 podemos plantear, por el método prospectivo, la ecuación del saldo en el empréstito normalizado, para lo cual necesitamos conocer previamente la ley de varia-

© Ediciones Pirámide

ción de los términos amortizativos normalizados. Para ello, partimos de los términos amortizativos de dos períodos consecutivos y restamos miembro a miembro, resultando que los términos amortizativos normalizados también varían en progresión aritmética de razón 2.000:

$$a'_{s+1} - a'_s = a_{s+1} - \mathrm{L} - a_s + L \quad \Rightarrow \quad a'_{s+1} = a'_s + d$$

A continuación planteamos la ecuación de equivalencia en el origen de la operación, lo que nos permitirá conocer el importe del primer término amortizativo normalizado:

$$30.000 \times 40 = \left(a'_1 + \frac{2.000}{0{,}04} + 2.000 \times 20\right) \times a_{\overline{20}|0{,}04} - \frac{2.000 \times 20}{0{,}04} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a'_1 = 71.879{,}85$$

Para calcular el número de títulos vivos al principio del año 15 mediante la ecuación del saldo, por el método prospectivo, correspondiente al empréstito normalizado, necesitamos conocer la cuantía del término amortizativo de dicho período. Éste lo podemos obtener partiendo del primer término amortizativo normalizado, considerando que varían en progresión aritmética de razón 2.000:

$$a'_{15} = a'_1 + (15 - 1) \times 2.000 = 99.879{,}85$$

Por tanto, la ecuación que permite calcular el número de títulos vivos al principio del año quince es:

$$N_{15} \times C \times 1{,}04^{14} = \left(99.879{,}85 + \frac{2.000}{0{,}04} + 2.000 \times 6\right) \times a_{\overline{6}|0{,}04} - \frac{2.000 \times 6}{0{,}04} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_{15} = 7.920$$

---

c) Empréstitos normalizables al tipo III

EJERCICIO 20.4

Se emite un empréstito de 10.000 títulos de cupón cero y 40 € de nominal, para ser amortizado por sorteo en 6 años con términos amortizativos comerciales de cuantía a en los tres primeros años, y de cuantía $2a$ en los siguientes. Durante los tres primeros años se aplica el 5% de interés anual y el resto de los años el 6% anual. Se reparte un lote constante anual de 10.000 € entre los 50 primeros títulos

© Ediciones Pirámide

que resultan amortizados en cada período. Hallar el importe del término amortizativo comercial del tercer año.

Resolución

Dado que el empréstito tiene características comerciales, es necesario proceder a su normalización. En primer lugar, determinamos la estructura del término amortizativo comercial del período s:

$$a_s = M_s \times C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) + L$$

A continuación, pasamos al primer miembro el término que no tiene M_s; dividimos ambos miembros entre el coeficiente que multiplica a M_s y multiplicamos ambos miembros por $C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$, obteniendo la siguiente expresión:

$$a_s - L = M_s \times C\prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

Realizamos el cambio de variables, obteniendo el término amortizativo normalizado del período s:

$$a'_s = a_s - L$$

Considerando que los términos amortizativos comerciales son de cuantía a en los tres primeros años y de cuantía $2a$ en los tres siguientes, los términos amortizativos normalizados correspondientes a los intervalos temporales señalados son los siguientes:

$$a' = a - L \quad \Rightarrow \quad \forall s \mid s = 1, 2, 3$$

$$a'' = 2a - L \quad \Rightarrow \quad \forall s \mid s = 4, 5, 6$$

Necesitamos conocer la cuantía de estos términos normalizados, para lo que planteamos la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$10.000 \times 40 = a' \times a_{\overline{3}|0,05} + a'' \times a_{\overline{3}|0,06}(1,05)^{-3}$$

$$400.000 = (a - 10.000) \times a_{\overline{3}|0,05} + (2a - 10.000) \times a_{\overline{3}|0,06} \times 1,05^{-3} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a = 61.340,67 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

20.2. EMPRÉSTITOS AMORTIZABLES POR SORTEO Y CON CUPÓN FRACCIONADO

En esta modalidad, la periodicidad en el pago de los cupones es inferior a la periodicidad en el pago de las cuotas de amortización, determinándose el importe de cada cupón de acuerdo con el tipo de interés del subperíodo correspondiente. Por tanto, los cupones de cada período se hacen efectivos en subperíodos de amplitud $\frac{1}{m}$, mientras que la amortización de los títulos vence al final de cada período.

Si el tipo de interés de los subperíodos permanece constante a lo largo del período, tenemos la siguiente representación gráfica para el período s:

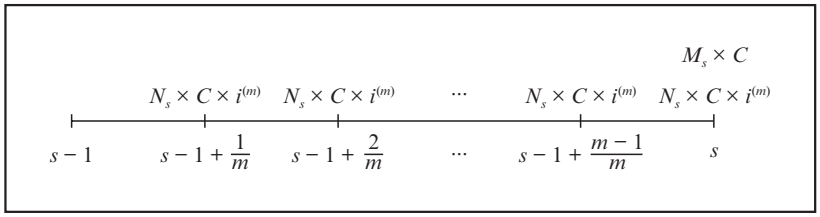


Figura 20.1.

El valor financiero al final del período s de los m cupones con vencimiento en dicho período es:

$$N_s \times C \times i^{(m)} \times s_{\overline{m}|i^{(m)}} = N_s \times C \times i^{(m)} \times \left[\frac{(1 + i^{(m)})^m - 1}{i^{(m)}}\right] = N_s \times C \times i$$

Siendo el tipo de interés del período el equivalente al tipo de los subperíodos:

$$i = (1 + i^{(m)})^m - 1.$$

Por tanto, el valor financiero al final del período s de todos los pagos con vencimiento en el mismo se corresponde con la siguiente expresión:

$$a_s = N_s \times C \times i + M_s \times C$$

Debemos señalar que en estos empréstitos se denomina término amortizativo comercial de un determinado período o término amortizativo comercial equivalente al valor financiero al final del mismo del conjunto de pagos que vencen en el citado período. En consecuencia, una vez determinado el término amortizativo equivalente son aplicables todas las expresiones ya deducidas.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 20.5

Se emite un empréstito de 15.000 títulos de nominal 50 €, para ser amortizado por sorteo en 16 años, con cupones trimestrales de 2 € y amortización anual de títulos. Existe una prima de amortización de 5 €. Anualmente se reparte un lote de 200 € entre los diez primeros títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales pierden la prima y el último cupón. Los gastos periódicos para el emisor son del 0,2% sobre las cuantías entregadas. Hallar la cuantía constante del término amortizativo comercial anual.

Resolución

Considerando que los cupones son pagaderos trimestralmente, hallamos el tipo equivalente anual al tipo trimestral:

$$C \times i^{(m)} = 2 \quad \Rightarrow \quad i^{(m)} = \frac{2}{50} = 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad 1{,}04^4 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}16985856$$

A continuación determinamos la estructura del término amortizativo comercial equivalente anual del período s:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 10(P + C \times i^{(m)})](1 + g_1)$$

Aplicando el proceso de normalización, obtenemos la siguiente expresión:

$$\left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 10(P + C \times i^{(m)})\right]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Realizamos el cambio de variables, y al primer miembro le llamamos a' y al factor que multiplica $N_s \times C$ le llamamos i', convirtiendo el empréstito comercial en un empréstito normalizado tipo I, de tipo efectivo anual de interés:

$$i' = \frac{50 \times 0{,}16985856}{55} = 0{,}154416872$$

Partiendo de la ecuación de equivalencia en el origen hallamos el término amortizativo anual:

$$15.000 \times 50 = a' \times a_{\overline{16}|0{,}154416872} \quad \Rightarrow \quad a' = 128.753{,}29$$

El término amortizativo comercial lo obtenemos de la igualdad que relaciona el término amortizativo normalizado y el comercial:

$$128.753{,}29 = \left[\frac{a}{1{,}002} - 200 + 10(5 + 2)\right]\frac{50}{55} \quad \Rightarrow \quad a = 142.042{,}14 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

20.3. TANTOS EFECTIVOS

En los empréstitos, al igual que en cualquier operación financiera, los tipos efectivos son aquellos que establecen la equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas y las recibidas por cada uno de los sujetos que intervienen en la operación.

El **tipo efectivo activo,** i_a, es el que verifica la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades efectivamente entregadas y las efectivamente recibidas por el sujeto activo de la operación, o sea, el prestamista o conjunto de obligacionistas. Éstos entregan el valor de emisión del empréstito ($N_1 \times V$) en el origen de la operación y reciben los términos amortizativos netos ($a_{a,s}$). Se consideran **términos amortizativos netos** para el conjunto de obligacionistas los términos amortizativos que reciben periódicamente éstos una vez deducidos los gastos periódicos a su cargo.

Por tanto, el tipo efectivo activo se deduce de la siguiente ecuación:

$$N_1 \times V = \sum_{s=1}^{n} a_{a,s}(1 + i_a)^{-s}$$

El **tipo efectivo pasivo,** i_p, es el que verifica la ecuación de equivalencia financiera entre las cuantías realmente entregadas y las realmente recibidas por el deudor, sujeto pasivo de la operación o emisor del empréstito. En el origen de la operación, el emisor recibe del conjunto de obligacionistas el valor de la emisión y paga los gastos iniciales derivados de la operación (G_0^p). Las cuantías periódicas pagadas por este sujeto pasivo durante la vida del empréstito constituyen los términos amortizativos comerciales. En consecuencia, la ecuación de equivalencia entre las cantidades realmente entregadas y recibidas por el emisor es la siguiente:

$$N_1 \times V - G_0^p = \sum_{s=1}^{n} a_s(1 + i_p)^{-s}$$

En el caso de un empréstito que sólo tenga características comerciales bilaterales, los tipos efectivos activos y pasivos coincidirían.

Además de los tipos efectivos anteriores, hemos de considerar la rentabilidad obtenida por un obligacionista poseedor de un título que ha sido amortizado en un período concreto. O sea, una vez amortizada una determinada obligación, el **tipo de rendimiento** o tipo de rentabilidad obtenido en la inversión, i_R, viene dado por el tipo de interés que verifica la ecuación de equivalencia financiera entre lo realmente entregado por el obligacionista en la compra de dicha obligación y lo realmente recibido hasta el momento de su amortización.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 20.6

Se emite un empréstito de 21.000 títulos de nominal 60 €, para ser amortizados por sorteo en 30 años con términos amortizativos comerciales constantes. La prima de amortización es de 20 € por título y se reparte un cupón anual de 4,8 €. Los títulos se emiten con una prima de emisión de 15 €. Anualmente se reparte un lote de 4.000 € entre los 20 primeros títulos que resulten amortizados, los cuales perciben, además del nominal, el valor de emisión, y pierden la prima de amortización. Existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,1% sobre todas las cantidades entregadas, y a cargo de los obligacionistas del 0,2% sobre todas las cantidades recibidas. Además, los gastos de la emisión ascienden a 10.000 €. Hallar: *a*) tipo efectivo pasivo; *b*) tipo efectivo activo, y *c*) tanto de rendimiento de una obligación que se amortice en el año 15 y reciba lote.

Resolución

La estructura del término amortizativo comercial del período s es:

$$a_s = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 20 \times P + 20 \times V](1 + g_1)$$

Normalizando, llegamos a:

$$\left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 20 \times P - 20 \times V\right]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Realizamos los cambios de variables, obteniendo a' e i':

$$a' = \left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 20 \times P - 20 \times V\right]\frac{C}{C + P}$$

$$i' = \frac{C}{C + P} = \frac{4{,}8}{80} = 0{,}06$$

Hallamos el término amortizativo normalizado, planteando la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$25.000 \times 60 = a' \times a_{\overline{30}|0{,}06} \quad \Rightarrow \quad a' = 108.973{,}37$$

Conociendo el valor del término amortizativo normalizado, podemos hallar el término amortizativo comercial, a través de la expresión matemática que los relaciona:

$$108.973{,}37 = \left(\frac{a}{1{,}001} - 4.000 + 20 \times 20 - 20 \times 45\right)\frac{60}{80} \quad \Rightarrow \quad a = 149.947{,}62$$

© Ediciones Pirámide

a) Con el fin de calcular el tipo efectivo pasivo anual de la operación, establecemos la equivalencia entre las cantidades efectivamente entregadas y recibidas por el emisor. Para ello, consideramos como cuantía realmente recibida por el emisor, en el origen de la operación, el valor de emisión del empréstito menos los gastos de la emisión, y como cuantías realmente entregadas por este sujeto los términos amortizativos comerciales. La expresión matemática que recoge lo mencionado es la siguiente:

$$N_1 \times V - G_0^p = a \times a_{\overline{30}|i_p} \Rightarrow 1.115.000 = 149.947{,}62 \times a_{\overline{30}|i_p} \Rightarrow i_p = 13{,}114721\%$$

b) En cuanto al cálculo del tipo efectivo activo anual, debemos considerar que los términos amortizativos netos para los obligacionistas son aquellos que reciben del emisor, menos los gastos periódicos a su cargo. Por tanto, se corresponden con la siguiente expresión:

$$a_a = \frac{a}{1 + g_1}(1 - g_2) = \frac{149.947{,}62}{1{,}001}(1 - 0{,}002) = 149.498{,}23$$

El tipo efectivo activo anual se deduce de la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas y recibidas por el conjunto de los obligacionistas:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_a} \quad \Rightarrow \quad 25.000 \times 45 = 149.498{,}23 \times a_{\overline{30}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 12{,}943960\%$$

c) Para calcular el tanto de rendimiento hemos de plantear la ecuación de equivalencia en el origen entre las cuantías efectivamente entregadas y recibidas por el poseedor de una obligación que se amortiza en el año 15 y reciba en dicho momento la cuantía del lote correspondiente, el valor de emisión y el nominal.

Esquemáticamente, las cuantías entregadas y recibidas por el obligacionista son las siguientes:

$$\text{Entrega realmente: } \{(V, 0)\}$$

$$\text{Recibe realmente: } \left\{[C \times i(1 - g_2), s]; \left[\left(\frac{L}{20} + V + C\right) \times (1 - g_2), 15\right], \forall s \mid s = 1, 2, ..., 15\right\}$$

La ecuación de equivalencia que nos permite hallar el tipo de rendimiento anual de esta obligación es:

$$45 = \left[4{,}8 \times a_{\overline{15}|i_R} + \left(\frac{4.000}{20} + 45 + 60\right)(1 + i_R)^{-15}\right](1 - 0{,}002) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_R = 19{,}200376\%$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 20.7

Una sociedad emite un empréstito a amortizar por sorteo en 10 años mediante anualidad comercial constante. El nominal de cada obligación es de 1.000 €, siendo el cupón del 5% anual. El valor de emisión de las obligaciones es V y existe una prima de amortización por obligación de 300 €. Las obligaciones amortizadas pierden el último cupón. Anualmente se reparte un lote constante L entre las 15 primeras obligaciones amortizadas, las cuales serán reembolsadas por su valor nominal incrementado en el 10% del valor de emisión. El emisor soporta unos gastos iniciales de 10.000 € y unos gastos anuales del 0,15% sobre todas las cuantías abonadas. Los obligacionistas soportan unos gastos anuales del 0,1% sobre todas las cuantías recibidas. Además, se sabe que el emisor desea obtener una cuantía neta de 189.990.000 €, que el número teórico de obligaciones amortizadas en los cuatro primeros años es 70.738,40 y que el tanto efectivo activo es el 10,01284624% anual. Determinar el tanto de rendimiento para una obligación que perciba lote y; *a*) se amortice en el sexto año, y *b*) se amortice en el séptimo año.

Resolución

Planteamos la estructura del término amortizativo comercial del período s:

$$a_s = [N_s \times C \times i + M_s(C + P - C \times i) + L - 15 \times P + 15 \times 0{,}10 \times V](1 + g_1)$$

Aplicamos a continuación el proceso de normalización, obteniendo la siguiente expresión:

$$\left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 15(P - 0{,}10 \times V)\right]\frac{C}{C + P - C \times i} =$$
$$= N_s \times C\frac{C \times i}{C + P - C \times i} + M_s \times C$$

Realizamos los cambios de variables correspondientes, obteniendo el valor del tipo de interés anual normalizado:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P - C \times i} = \frac{50}{1.250} = 0{,}04$$

Hallamos el valor de emisión del empréstito, partiendo de la cuantía que necesita el emisor para su financiación:

$$189.990.000 = N_1 \times V - 10.000 \quad \Rightarrow \quad N_1 \times V = 190.000.000$$

© Ediciones Pirámide

Por otra parte, sabemos el número teórico de títulos amortizados en los cuatro primeros períodos; en consecuencia, podemos calcular el número teórico de títulos amortizados en el primer período, y una vez calculados éstos podemos hallar el número de títulos emitidos:

$$M_4^e = 70.738{,}40 = M_1 \times s_{\overline{4}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad M_1 = 16.658{,}19$$

$$16.658{,}19 = \frac{N_1}{s_{\overline{10}|0{,}04}} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 200.000$$

Por tanto, el valor de emisión es 950 €.

El término amortizativo comercial lo obtenemos a partir de a_a, el cual deducimos de la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas y recibidas por el conjunto de obligacionistas:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_a} \quad \Rightarrow \quad 200.000 \times 950 = a_a \times a_{\overline{10}|0{,}1001284624} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a_a = 30.938.691{,}43$$

$$30.938.691{,}43 = \frac{a}{1{,}0015}(1 - 0{,}001) \quad \Rightarrow \quad a = 31.016.115{,}58$$

A continuación calculamos el término amortizativo normalizado, planteando la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$200.000 \times 1.000 = a' \times a_{\overline{10}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad a' = 24.658.188{,}87$$

La cuantía del lote la hallamos a través de la expresión matemática que relaciona los términos amortizativos normalizados y comerciales:

$$24.658.188{,}87 = \left[\frac{31.016.115{,}58}{1{,}0015} - L + 15(300 - 0{,}10 \times 950)\right]\frac{1.000}{1.250} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad L = 150.000$$

a) Calculado el importe del lote, hallamos el tanto de rendimiento anual para un título que recibe lote y se amortiza en el sexto año. Las cuantías reales entregadas y recibidas por un obligacionista al que se le amortiza una obligación en el año 6 son:

$$V = \left[C \times i \times a_{\overline{5}|i_R} + \left(\frac{\mathrm{L}}{15} + C + 0{,}10 \times V\right)(1 + i_R)^{-6}\right](1 - 0{,}001)$$

$$950 = \left[50 \times a_{\overline{5}|i_R} + 11.095(1 + i_R)^{-6}\right](1 - 0{,}001) \quad \Rightarrow \quad i_R = 52{,}9164987\,\%$$

© Ediciones Pirámide

b) Por último, el tanto de rendimiento anual de un título que se amortiza en el séptimo año y recibe lote es:

$$950 = \left[50 \times a_{\overline{6}|i_R} + 11.095(1 + i_R)^{-7}\right](1 - 0{,}001) \quad \Rightarrow \quad i_R = 44{,}32481483\%$$

EJERCICIO 20.8

Una sociedad emite un empréstito de 50.000 títulos a amortizar por sorteo en 10 años mediante anualidad comercial constante. Los títulos se emiten a un valor de emisión V y el valor nominal es de 30 €. Los títulos reciben un cupón acumulado del 4% anual. El emisor soporta unos gastos iniciales de 6.000 €, recibiendo un importe neto en el momento de la emisión de 1.244.000 €. Se reparte un lote constante entre los 20 primeros títulos amortizados, los cuales son reembolsados por el valor de emisión. Los gastos anuales a cargo del emisor son del 0,1% sobre las cantidades entregadas. Los obligacionistas soportan unos gastos anuales del 0,2% sobre las cantidades recibidas. Sabiendo que el tanto de rendimiento de un título que se amortiza en el quinto sorteo y percibe lote es el 33,5705% anual, calcular el tanto efectivo activo y el pasivo.

Resolución

La estructura del término amortizativo del período s es:

$$a = [M_s \times C(1 + i)^s + L - 20 \times C + 20 \times V](1 + g_1)$$

Normalizando, resulta:

$$\frac{a}{1 + g_1} - L + 20(C - V) = M_s \times C(1 + i)^s$$

La cuantía del término amortizativo normalizado la obtenemos de la ecuación de equivalencia en el origen, siendo $i' = i$:

$$50.000 \times 30 = a' \times a_{\overline{10}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad a' = 184.936{,}42$$

Por otra parte, el valor de emisión se obtiene considerando la cuantía que necesita el emisor para su financiación:

$$1.244.000 = 50.000 \times V - 6.000 \quad \Rightarrow \quad V = 25$$

© Ediciones Pirámide

Conocido el valor de emisión, planteamos la ecuación del tanto de rendimiento de un título amortizado en el quinto año y que percibe lote, lo que nos permite hallar la cuantía del lote:

$$25 = \left\{30[(1{,}04)^5 - 1] + \frac{L}{20} + 25\right\} 1{,}335705^{-5}(1 - 0{,}002) \quad \Rightarrow \quad L = 1.500$$

A continuación hallamos el término amortizativo comercial a partir de la ecuación que relaciona éste con el término amortizativo normalizado:

$$a' = \frac{a}{1 + g_1} - L + 20(C - V)$$

$$184.936{,}42 = \frac{a}{1{,}001} - 1.500 + 100 \quad \Rightarrow \quad a = 186.522{,}76$$

Con el fin de calcular el tipo efectivo pasivo anual de la operación, establecemos la equivalencia entre las cantidades efectivamente entregadas y recibidas por el emisor:

$$N_1 \times V - G_0^p = a \times a_{\overline{n}|i_p} \quad \Rightarrow \quad 1.244.000 = 186.522{,}76 \times a_{\overline{10}|i_p} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_p = 8{,}134955179\%$$

La ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas y recibidas por el conjunto de obligacionistas nos permite hallar el tipo efectivo activo anual:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_a} \quad \Rightarrow \quad 50.000 \times 25 = \frac{186.522{,}76}{1{,}001}(1 - 0{,}002) \times a_{\overline{n}|i_a} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad i_a = 7{,}96153034\%$$

EJERCICIO 20.9

Una sociedad emite 20.000 títulos a amortizar por sorteo en 20 años mediante anualidad comercial constante. El valor de emisión es V, el valor nominal de cada título es de 20 euros, el cupón anual es del 3% y cada uno de los títulos amortizados percibirá una prima constante de 5 euros. Anualmente se reparte un lote constante entre los 20 primeros títulos amortizados en cada período, los cuales pierden el último cupón. Los gastos anuales a cargo del emisor son del 0,1% sobre todas las cuantías entregadas. Sabiendo que el tanto de rendimiento de un título amortizado en el séptimo sorteo y que no percibe lote es el 10,846577% anual y que el tanto efectivo activo es el 8,53381% anual, calcular el tanto de rendimiento de un título amortizado en el séptimo sorteo y que perciba lote.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Planteamos la estructura del término amortizativo comercial del período s:

$$a_s = a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 20 \times C \times i)](1 + g_1)$$

Normalizando, obtenemos la siguiente expresión:

$$\left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 20 \times C \times i\right]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Realizamos los cambios de variables correspondientes, obteniendo el valor del tipo de interés anual normalizado:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{0{,}6}{25} = 0{,}024$$

A continuación calculamos el término amortizativo normalizado, planteando la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$20.000 \times 20 = a' \times a_{\overline{20}|0{,}024} \quad \Rightarrow \quad a' = 25.417{,}10$$

El valor de emisión del empréstito lo obtenemos de la ecuación de rendimiento de un título que se amortiza en el año siete y no recibe lote:

$$V = 0{,}6 \times a_{\overline{7}|0{,}10846577} + 25 \times 1{,}10846577^{-7} \quad \Rightarrow \quad V = 15$$

A continuación planteamos la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades realmente entregadas y recibidas por el conjunto de obligacionistas, lo que nos permite determinar el valor del término amortizativo comercial:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_a} \quad \Rightarrow \quad 20.000 \times 15 = \frac{a}{1{,}001} \times a_{\overline{20}|0{,}0853381} \quad \Rightarrow \quad a = 31.811{,}16$$

La cuantía del lote la hallamos al sustituir en las fórmulas de conversión:

$$25.417{,}10 = \left(\frac{31.811{,}16}{1{,}001} - L + 12\right)\frac{20}{25} \quad \Rightarrow \quad L = 20{,}01$$

Por último, el tanto de rendimiento anual de un título que se amortiza en el séptimo año y recibe lote es:

$$15 = 0{,}6 \times a_{\overline{6}|i_R} + 26(1 + i_R)^{-7} \quad \Rightarrow \quad i_R = 11{,}07138355\%$$

© Ediciones Pirámide

20.4. EMPRÉSTITOS AMORTIZABLES POR SORTEO A TANTO DE RENDIMIENTO CONSTANTE

Los empréstitos a tanto de rendimiento constante, o empréstitos de Lenzi, son aquellos en los que los títulos, con independencia del momento de su amortización, tienen el mismo tipo efectivo de rentabilidad. Para ello es preciso que la prima de amortización sea variable. Pueden ser empréstitos amortizables por sorteo con abono periódico de intereses o empréstitos de cupón cero.

a) Empréstitos de cupón periódico

Supongamos un empréstito con cupón periódico y prima de amortización variable, amortizable por sorteo, de tal forma que el tanto de rendimiento de cualquier obligación sea constante e independiente del período en que resulte amortizada. La estructura del término amortizativo comercial del período s es la siguiente, siendo C'_s el valor de reembolso de dicho período:

$$a_s = (N_s \times C \times i + M_s \times C'_s)(1 + g_1)$$

Por tanto, al ser la prima variable, el valor de reembolso de las obligaciones también lo es, verificándose: $C'_s = C + P_s$.

Hemos de obtener la ley de variación de los valores de reembolso, teniendo en cuenta que el tipo de rendimiento es constante cualquiera que sea el momento de la amortización de las obligaciones. Para deducir dicha ley, partimos de las ecuaciones de equivalencia en función del tipo de rendimiento para dos períodos consecutivos:

$$V = C \times i(1 - g_2) \times a_{\overline{s}|i_R} + C'_s(1 - g_2)(1 + i_R)^{-s}$$

$$V = C \times i(1 - g_2) \times a_{\overline{s+1}|i_R} + C'_{s+1}(1 - g_2)(1 + i_R)^{-(s+1)}$$

Al igualar y simplificar, tenemos:

$$C \times i \times a_{\overline{s}|i_R} + C'_s(1 + i_R)^{-s} = C \times i \times a_{\overline{s+1}|i_R} + C'_{s+1}(1 + i_R)^{-(s+1)}$$

Teniendo en cuenta que $C \times i \times a_{\overline{s+1}|i_R} = C \times i \times a_{\overline{s}|i_R} + C \times i(1 + i_R)^{-(s+1)}$, la ecuación anterior se convierte en:

$$C \times i \times a_{\overline{s}|i_R} + C'_s(1 + i_R)^{-s} = C \times i \times a_{\overline{s}|i_R} + C \times i(1 + i_R)^{-(s+1)} + C'_{s+1}(1 + i_R)^{-(s+1)}$$

Simplificando y multiplicando ambos miembros por $(1 + i_R)^{s+1}$:

$$C'_s(1 + i_R)^{-s}(1 + i_R)^{s+1} = C \times i(1 + i_R)^{-(s+1)}(1 + i_R)^{s+1} + C'_{s+1} + (1 + i_R)^{-(s+1)}(1 + i_R)^{s+1}$$

© Ediciones Pirámide

Al realizar operaciones se llega a:

$$C'_{s+1} = C'_s(1 + i_R) - C \times i$$

Por otra parte, para un título amortizado en el primer año, la ecuación del tanto de rendimiento es:

$$V = (C \times i + C'_1)(1 - g_2)(1 + i_R)^{-1}$$

De esta expresión se deduce que el valor de reembolso del primer período verifica:

$$C'_1 = \frac{V(1 + i_R)}{1 - g_2} - C \times i$$

Conocido el valor del reembolso del primer período y la ley de variación para dos períodos consecutivos, podemos obtener el valor de reembolso para cualquier período, y en consecuencia el importe de la prima de amortización correspondiente, verificándose:

$$P_s = C'_s - C$$

Es importante destacar que el tanto de rendimiento, al ser constante e independiente del momento en que se amortice el título, coincide con el tipo efectivo activo. Recordemos que el tipo efectivo activo o del conjunto de los obligacionistas satisface la equivalencia financiera entre la prestación y contraprestación reales entregadas y recibidas por los mismos. Por otra parte, el tipo de rendimiento mide la rentabilidad de un título en función de las cantidades entregadas y recibidas por el obligacionista hasta el momento de la amortización del mismo. Si en este empréstito el tipo de rendimiento es constante y no depende del período en el que se amortice la obligación, ambos tipos medirán la rentabilidad media de la operación, y en consecuencia se verificará la siguiente igualdad:

$$N_1 \times V = \sum_{s=1}^{n} a_{a,s}(1 + i_a)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_{a,s}(1 + i_R)^{-s}$$

En el caso particular de que el término amortizativo comercial sea constante, la estructura del término para el período s es:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P_s)](1 + g_1)$$

Para esta hipótesis, la ecuación de equivalencia entre las cuantías efectivamente entregadas y recibidas por el conjunto de obligacionistas verifica:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_R}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 20.10

Se emite un empréstito de 30.000 títulos de nominal 1.000 €, para ser amortizado por sorteo con términos amortizativos anuales constantes y con un tipo de interés del 9% anual. El empréstito tiene una duración de 25 años, siendo la prima de emisión de 20 €. Los obligacionistas obtienen un tipo de rendimiento constante del 10% anual. El emisor paga unos gastos periódicos del 0,1% sobre las cuantías entregadas y los obligacionistas del 0,3% sobre las cuantías recibidas. Hallar el importe del término amortizativo comercial y las primas de amortización del octavo y noveno año.

Resolución

Al ser el tipo de rendimiento constante, se verifica:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_R}$$

$$30.000 \times 980 = a_a \times a_{\overline{25}|i_R} \quad \Rightarrow \quad a_a = 3.238.941,32$$

Conociendo la cuantía del término amortizativo neto, podemos determinar la del comercial a través de la siguiente relación:

$$a_a = \frac{a}{1,001}(1 - 0,003) = 3.238.941,32 \quad \Rightarrow \quad a = 3.251.936,07 \text{ €}$$

Para obtener la cuantía de la prima de amortización del octavo período hemos de hallar el valor de reembolso del período mencionado. Para ello, planteamos la ecuación de equivalencia para un título que resulta amortizado en el año 8:

$$V = [C \times i \times a_{\overline{8}|i_R} + C'_8(1 + i_R)^{-8}](1 - g_2)$$

$$980 = (90 \times a_{\overline{8}|10\%} + C'_8 \times 1,1^{-8})(1 - 0,003) \quad \Rightarrow \quad C'_8 = 1.077,81$$

Por tanto, la prima de amortización del período 8 es:

$$P_8 = C'_8 - C = 1.077,81 - 1.000 = 77,81 \text{ €}$$

La prima de amortización del año 9 la podemos obtener de la relación entre el valor de reembolso de dicho período y el del precedente, verificándose:

$$C'_9 = C'_8(1 + i_R) - C \times i = 1.077,81 \times 1,1 - 90 = 1.095,59 \quad \Rightarrow \quad P_9 = 95,59 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

***b*) Empréstitos con cupón acumulado**

Supongamos un empréstito de cupón cero, con tipo de interés constante y gastos periódicos a cargo de los obligacionistas. Si el tanto de rendimiento es constante, las ecuaciones de equivalencia en dos períodos consecutivos verifican:

$$V = C'_s(1 - g_2)(1 + i_R)^{-s}$$

$$V = C'_{s+1}(1 - g_2)(1 + i_R)^{-(s+1)}$$

De donde se llega a: $C'_{s+1} = C'_s(1 + i_R)$. Obviamente, para conseguir un rendimiento constante es preciso que las primas de amortización sean variables. Además, como se trata de un empréstito de cupón acumulado, se verifica: $C'_s = C(1 + i)^s + P_s$.

Por otra parte, sabemos que para un título que se amortiza en el primer año se verifica:

$$V = C'_1(1 - g_2)(1 + i_R)^{-1} \quad \Rightarrow \quad C'_1 = \frac{V(1 + i_R)}{1 - g_2}$$

Conocido el valor del reembolso del primer período y la ley de variación para dos períodos consecutivos, podemos obtener el valor de reembolso de cualquier período y en consecuencia el importe de la prima de amortización correspondiente, verificándose:

$$P_s = C'_s - C(1 + i)^s$$

En esta modalidad de empréstitos, también el tanto efectivo activo coincide con el tanto de rendimiento constante.

En el caso particular de términos amortizativos comerciales constantes, su estructura es:

$$a = M_s \times C'_s(1 + g_1) = M_s[C(1 + i)^s + P_s](1 + g_1)$$

Para esta hipótesis, la ecuación de equivalencia entre las cuantías efectivamente entregadas y recibidas por el conjunto de los obligacionistas verifica:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_R}$$

Ejercicio 20.11

Se emite un empréstito de 30.000 títulos de nominal 100 €, para ser amortizado por sorteo con términos anuales constantes y con cupón acumulado del 4% anual. El empréstito tiene una duración de 20 años. Los obligacionistas obtienen un tipo de rendimiento constante del 8%. El emisor paga unos gastos periódicos

© Ediciones Pirámide

del 1,5% sobre las cuantías entregadas, y los obligacionistas del 2% sobre las cuantías recibidas. Sabemos que el término amortizativo comercial asciende a 284.822,42. Hallar la prima de amortización del décimo año y el valor de reembolso del año 11.

Resolución

Al coincidir el tanto efectivo activo con el tanto de rendimiento constante, se verifica:

$$N_1 \times V = \frac{a}{(1+g_1)}(1-g_2) \times a_{\overline{n}|i_R}$$

$$30.000 \times V = \frac{284.822,42}{1,015}(1-0,02) \times a_{\overline{20}|8\%} \quad \Rightarrow \quad V = 90$$

Para un título que se amortice en el décimo año, la ecuación del tanto de rendimiento verifica:

$$90 = (100 \times 1,04^{10} + P_{10}) \times 1,08^{-10}(1-0,02) \quad \Rightarrow \quad P_{10} = 50,24 \text{ €}$$

En consecuencia, el valor de reembolso del año 10 es:

$$C'_{10} = 100 \times 1,04^{10} + 50,24 = 198,26$$

De acuerdo con lo expuesto, el valor de reembolso del año 11 es:

$$C'_{11} = 198,26 \times 1,08 = 214,12 \text{ €}$$

También es posible obtener el valor de reembolso del año 11 a través de la ecuación del tanto de rendimiento:

$$90 = C'_{11} \times 1,08^{-11}(1-0,02)$$

20.5. EMPRÉSTITOS SIN CANCELACIÓN ESCALONADA Y CON CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

La consideración de características comerciales en este tipo de empréstitos no presenta especiales dificultades, analizándose su problemática mediante los ejercicios siguientes.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 20.12

Determinada empresa precisa obtener financiación por importe neto de 80 millones de euros. Para ello emite un empréstito de 81.000 títulos con las siguientes características: cancelación única dentro de 10 años, cupón anual del 4%; prima de emisión del 1% y prima de amortización de P € por título. Los gastos de emisión ascienden a 190.000 €, y los gastos periódicos sobre todas las cuantías satisfechas son del 0,1% de las mismas. Se desea que el tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas sea el 5% anual. Determinar el tanto efectivo pasivo.

Resolución

Para determinar el tanto efectivo pasivo es preciso conocer las cuantías reales recibidas y las entregadas por el emisor, para lo cual hemos de determinar el nominal de los títulos y la prima de amortización P.

Al existir una prima de emisión del 1%, el valor de emisión verifica: $V = 0{,}99C$, por lo que teniendo en cuenta los gastos iniciales y que el emisor desea obtener una cuantía neta de 80 millones de euros, emitiendo 81.000 títulos, tenemos: $80.000.000 = 81.000 \times V - 190.000$, siendo $V = 990$; $C = 1.000$.

De acuerdo con las condiciones de la emisión, cada título percibe durante 9 años el interés del 4% del nominal, y en el año 10, además del cupón correspondiente, recibe el valor de reembolso: $C'_{10} = 1.000 + P$. Por tanto, los términos amortizativos de un título son:

$$a'_1 = 1.000 \times 0{,}04 = 40 = a'_2 = ... = a'_9$$

$$a'_{10} = 40 + C'_{10} = 40 + 1.000 + P = 1.040 + P$$

Al multiplicar por el número de títulos emitidos, se obtienen las cuantías totales que perciben los obligacionistas:

$$a_1 = a_2 = ... = a_9 = 40 \times N_1$$

$$a_{10} = (1.040 + P) \times N_1$$

De la ecuación de equivalencia financiera entre las cuantías totales entregadas y las recibidas por el conjunto de los obligacionistas obtenemos el tanto efectivo activo, que en este caso es del 5% anual, por lo que se verifica:

$$N_1 \times 990 = 40 \times N_1 \times a_{\overline{9}|5\%} + (1.040 + P) \times N_1 \times 1{,}05^{-10}$$

Podemos simplificar la ecuación anterior dividiendo ambos miembros entre N_1, quedando:

$$990 = 40 \times a_{\overline{9}|5\%} + (1.040 + P) \times 1{,}05^{-10}$$

© Ediciones Pirámide

La ecuación anterior pone de manifiesto que el tanto efectivo activo o del conjunto de los obligacionistas coincide con el tanto de rendimiento de cualquier título. Al resolver, obtenemos $P = 109{,}49$. En consecuencia, el valor de reembolso de un título en el año 10 es: $C'_{10} = 1.000 + P = 1.109{,}49$, por lo que un título percibe en dicho año: $a'_{10} = 40 + C'_{10} = 40 + 1.109{,}49 = 1.149{,}49$.

Para el tanto efectivo pasivo, tenemos que el emisor abona unos gastos iniciales de 190.000 € y desembolsa los siguientes capitales, teniendo en cuenta que soporta unos gastos del 0,1% de cada término amortizativo:

$$a_1 \times 1{,}001 = a_2 \times 1{,}001 = \ldots = a_9 \times 1{,}001 = 40 \times 1{,}001 \times N_1 = 3.243.240$$

$$a_{10} = 1.149{,}49 \times 1{,}001 \times N_1 = 93.201.798{,}69$$

De acuerdo con lo expuesto, el tanto efectivo pasivo es el 5,041809% anual, deducido de la siguiente ecuación:

$$81.000 \times 990 - 190.000 = 3.243.240 \times a_{\overline{9}|i_p} + 93.201.798{,}69(1 + i_p)^{-10}$$

EJERCICIO 20.13

Una empresa emite un empréstito formado por títulos de igual duración, con cupón acumulado al tipo i anual, amortizables con un valor de reembolso en el año 5 de 1.259,27 € para cada uno. Los títulos son de nominal 1.000 €, se emiten con prima de emisión y proporcionan a los obligacionistas un tanto efectivo del 4,82362040% anual. La empresa tiene unos gastos de emisión de 100.000 € y soporta un coste efectivo del 4,87637514% anual. Sabiendo que los títulos se amortizan con prima de 100 €, calcular, redondeando a enteros: *a*) valor de emisión; *b*) número de títulos emitidos, y *c*) tipo de interés.

Resolución

a) De la ecuación del tanto efectivo activo se deduce:

$$N_1 \times V = N_1 \times C'_5(1 + i_a)^{-5} \quad \Rightarrow \quad V = 1.259{,}27 \times 1{,}0482362040^{-5} = 995 \text{ €}$$

b) Según la ecuación del tanto efectivo pasivo, tenemos:

$$995 \times N_1 - 100.000 = 1.259{,}27 \times 1{,}0487637514^{-5} \times N_1 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 40.000$$

c) Al ser los títulos de cupón cero y amortizarse con prima, el valor de reembolso en el año 5 verifica la siguiente ecuación, de la que obtenemos el tipo de interés anual:

$$C'_5 = 1.259{,}27 = 1.000(1 + i)^5 + 100 \quad \Rightarrow \quad i = 3\%$$

© Ediciones Pirámide

20.6. DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE COSTES DE FINANCIACIÓN Y DE INGRESOS FINANCIEROS

De igual forma a lo señalado para los préstamos, también el emisor de un empréstito o el inversor que adquiere títulos del mismo pueden precisar realizar la periodificación temporal de los costes de financiación o de los ingresos financieros correspondientes.

La distribución en el tiempo de las cuantías de costes se realiza de acuerdo con las cuantías netas realmente recibidas y entregadas y, por tanto, utilizando el tanto efectivo pasivo. La distribución de los ingresos financieros se realiza de acuerdo con las cuantías desembolsadas y recibidas y, en consecuencia, utilizando el tanto de rendimiento del inversor.

Para realizar la distribución temporal de los ingresos financieros de un obligacionista que adquiere un determinado número de títulos es preciso conocer no sólo la cuantía neta desembolsada, sino también la contraprestación real recibida. En el momento de la adquisición de los títulos, la contraprestación a recibir está vinculada a todas las características del empréstito y a la fecha en la que sus títulos sean amortizados. Por ello, para el obligacionista poseedor de un cierto número de títulos, la distribución temporal de sus ingresos se puede realizar en el momento de adquisición de tales títulos exclusivamente si los mismos pertenecen a un empréstito sin cancelación escalonada, ya que en dicho momento son conocidas tanto las cuantías a percibir como sus vencimientos. En cambio, en los empréstitos con cancelación escalonada tal distribución sólo es posible realizarla al final de la vida de los títulos, pues es el momento en el que se conocen las cuantías percibidas y sus vencimientos.

La problemática correspondiente la vamos a analizar a través de distintos ejercicios en los que pondremos de manifiesto la metodología a utilizar para la distribución temporal y la confección de los cuadros correspondientes. Además, por razones didácticas, expondremos en primer lugar la problemática de los empréstitos sin cancelación escalonada, para a continuación analizar la de los empréstitos con cancelación escalonada de títulos.

20.6.1. Empréstitos sin cancelación escalonada

EJERCICIO 20.14

Una empresa emite un empréstito de 100.000 títulos de nominal 1.000 €, con cancelación única dentro de 6 años. Los títulos percibirán anualmente un cupón del 4%, teniendo derecho a una prima de amortización de 10 €. El valor de emisión es 995 €. Los gastos de emisión son 220.000 €. Los gastos periódicos del emisor son el 0,1% sobre todas las cuantías que satisface. Se pide: *a*) realizar la

© Ediciones Pirámide

distribución temporal de los costes de financiación, y *b*) efectuar la distribución temporal de los ingresos financieros de un inversor que suscribe 50 títulos, sabiendo que soporta unos gastos anuales del 0,2% sobre todas las cuantías que percibe.

Resolución

Se trata de un empréstito de cupón periódico, cuotas de amortización nulas y cuyos títulos se cancelan íntegramente en el año 6.

a) Como los títulos se amortizan con prima de 10 € en el año 6 y existen gastos periódicos a cargo del emisor, los términos amortizativos comerciales son:

$$a_1 = a_2 = ... = a_5 = 100.000 \times 1.000 \times 0{,}04 \times 1{,}001 = 4.004.000$$

$$a_6 = [100.000 \times 1.000 \times 0{,}04 + 100.000(1.000 + 10)] \times 1{,}001 = 105.105.000$$

El cuadro de amortización de la operación comercial es:

Año	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés	Características comerciales
0	—	—	—	—
1	4.004.000,00	0,00	4.000.000,00	4.000,00
2	4.004.000,00	0,00	4.000.000,00	4.000,00
3	4.004.000,00	0,00	4.000.000,00	4.000,00
4	4.004.000,00	0,00	4.000.000,00	4.000,00
5	4.004.000,00	0,00	4.000.000,00	4.000,00
6	105.105.000,00	100.000.000,00	4.000.000,00	1.105.000,00
Total	125.125.000,00	100.000.000,00	24.000.000,00	1.125.000,00

De la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida y la contraprestación real entregada por el emisor obtenemos un tanto efectivo pasivo anual del 4,30743714%:

$$100.000 \times 995 - 220.000 = 99.280.000 = 4.004.000 \times a_{\overline{5}|i_p} + 105.105.000(1 + i_p)^{-6}$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el emisor la operación supone obtener unos recursos netos de 99.280.000 € al 4,30743714% anual, amortizándose los mismos con los términos anuales señalados, satisfaciendo un precio financiero o costes de financiación totales de 25.845.000 €, diferencia entre las cuantías totales desembolsadas y las recibidas. El desglose es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

Prima de emisión	500.000,00
Gastos de emisión	220.000,00
Intereses	24.000.000,00
Prima de amortización	1.000.000,00
Gastos periódicos	125.000,00
Total	25.845.000,00

Para realizar la imputación temporal de los citados costes se utiliza el tanto efectivo pasivo de la operación, realizándose el siguiente cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	99.280.000,00
1	4,30743714	4.004.000,00	4.276.423,59	−272.423,59	99.552.423,59
2	4,30743714	4.004.000,00	4.288.158,07	−284.158,07	99.836.581,66
3	4,30743714	4.004.000,00	4.300.398,00	−296.398,00	100.132.979,66
4	4,30743714	4.004.000,00	4.313.165,16	−309.165,16	100.442.144,82
5	4,30743714	4.004.000,00	4.326.482,25	−322.482,25	100.764.627,07
6	4,30743714	105.105.000,00	4.340.372,93	100.764.627,07	0,00
Total	—	125.125.000,00	25.845.000,00	99.280.000,00	—

Los costes de financiación correspondientes a cada período se obtienen aplicando el tipo efectivo pasivo a la cuantía del capital pendiente neto de devolver por el prestatario al inicio de cada período.

Para efectuar la separación de los costes de financiación en precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales, necesitamos el cuadro de amortización de la operación pura, el cual se recoge en la siguiente tabla:

Año	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
0	—	—	—	—	100.000.000,00
1	4	4.000.000,00	0,00	4.000.000,00	100.000.000,00
2	4	4.000.000,00	0,00	4.000.000,00	100.000.000,00
3	4	4.000.000,00	0,00	4.000.000,00	100.000.000,00
4	4	4.000.000,00	0,00	4.000.000,00	100.000.000,00
5	4	4.000.000,00	0,00	4.000.000,00	100.000.000,00
6	4	104.000.000,00	100.000.000,00	4.000.000,00	0,00
Total	—	124.000.000,00	100.000.000,00	24.000.000,00	—

© Ediciones Pirámide

Por tanto, tenemos:

Año	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	4.276.423,59	4.000.000,00	276.423,59
2	4.288.158,07	4.000.000,00	288.158,07
3	4.300.398,00	4.000.000,00	300.398,00
4	4.313.165,16	4.000.000,00	313.165,16
5	4.326.482,25	4.000.000,00	326.482,25
6	4.340.372,93	4.000.000,00	340.372,93
Total	25.845.000,00	24.000.000,00	1.845.000,00

Observamos en el cuadro anterior que los costes de financiación, 25.845.000 €, se distribuyen en 6 años, correspondiendo 24.000.000 a intereses y 1.845.000 a la suma de la prima de emisión (500.000), prima de amortización (1.000.000), gastos de emisión (220.000) y gastos periódicos (125.000). Además, la cuantía total de las características comerciales se compone de la suma de las características periódicas (1.125.000 €, según se desprende del cuadro de amortización comercial) con las iniciales (prima y gastos de emisión).

b) Un inversor que suscribe 50 títulos percibe unos ingresos financieros integrados por la prima de emisión, las cuotas de interés de la operación pura y la prima de amortización, soportando unos gastos periódicos del 0,2% de todas las cuantías que percibe. La distribución en el tiempo de dichos ingresos se realiza de acuerdo con el tanto de rendimiento del inversor, deducido de la ecuación de equivalencia entre la cuantía realmente entregada (valor de emisión de los 50 títulos, o sea, 49.750 €) y las recibidas (términos amortizativos comerciales correspondientes a 50 obligaciones). Dichos términos amortizativos son:

$$a_{a,1} = 50 \times 1.000 \times 0{,}04(1 - 0{,}002) = a_{a,2} = \ldots = a_{a,5} = 1.996$$

$$a_{a,6} = 50(1.000 \times 0{,}04 + 1.000 + 10)(1 - 0{,}002) = 52.395$$

Para el inversor, el cuadro de amortización de la operación comercial es:

Año	Término amortizativo real	Cuota de reembolso	Cuota de interés	Gastos
0	—	—	—	—
1	1.996,00	0,00	2.000,00	4,00
2	1.996,00	0,00	2.000,00	4,00

© Ediciones Pirámide

Año	Término amortizativo real	Cuota de reembolso	Cuota de interés	Gastos
3	1.996,00	0,00	2.000,00	4,00
4	1.996,00	0,00	2.000,00	4,00
5	1.996,00	0,00	2.000,00	4,00
6	52.395,00	50.500,00	2.000,00	105,00
Total	62.375,00	50.500,00	12.000,00	125,00

El tanto de rendimiento del inversor es el 4,20770830% anual, obtenido de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$49.750 = 1.996 \times a_{\overline{5}|i_R} + 52.395(1 + i_R)^{-6}$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el inversor la operación supone invertir una cuantía de 49.750 € al 4,20770830% anual, recuperándose la misma en 6 años con los términos señalados, percibiendo un precio financiero o ingresos financieros totales de 12.625 €, diferencia entre las cuantías totales recibidas y las desembolsadas. El desglose es el siguiente:

Prima de emisión	250,00
Intereses	12.000,00
Prima de amortización	500,00
− Gastos periódicos	−125,00
Total	12.625,00

El cuadro de distribución es:

Año	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	49.750,00
1	4,20770830	1.996,00	2.093,33	−97,33	49.847,33
2	4,20770830	1.996,00	2.097,43	−101,43	49.948,76
3	4,20770830	1.996,00	2.101,70	−105,70	50.054,46
4	4,20770830	1.996,00	2.106,15	−110,15	50.164,61
5	4,20770830	1.996,00	2.110,78	−114,78	50.279,39
6	4,20770830	52.395,00	2.115,61	50.279,39	0,00
Total	—	62.375,00	12.625,00	49.750,00	—

© Ediciones Pirámide

Los ingresos financieros correspondientes a cada período se obtienen aplicando el tipo de rendimiento a la cuantía del capital pendiente neto de recuperar por el inversor al inicio de cada período.

La separación de los ingresos financieros entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales se recoge en la siguiente tabla:

Año	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	2.093,33	2.000,00	93,33
2	2.097,43	2.000,00	97,43
3	2.101,70	2.000,00	101,70
4	2.106,15	2.000,00	106,15
5	2.110,78	2.000,00	110,78
6	2.115,61	2.000,00	115,61
Total	12.625,00	12.000,00	625,00

Observamos en el cuadro anterior que los ingresos financieros, 12.625 €, se distribuyen en 6 años, correspondiendo 12.000 a intereses y 625 a la suma de la prima de emisión (250), prima de amortización (500), menos los gastos periódicos (125).

EJERCICIO 20.15

Determinada empresa emite un empréstito cupón cero formado por 50.000 títulos de 100 € de nominal. Las características de la emisión son: tipo de interés 2% anual; valor de emisión 90 €; prima de amortización 5 €; cancelación total a los 6 años. Los gastos de emisión ascienden a 12.000 €. El emisor soporta unos gastos periódicos del 0,1% sobre todas las cuantías que satisface. Se pide: *a*) realizar la distribución temporal de los costes de financiación, y *b*) efectuar la distribución temporal de los ingresos financieros de un inversor que suscribe 80 títulos, sabiendo que soporta unos gastos anuales del 0,2% sobre todas las cuantías que percibe.

Resolución

a) Se trata de un empréstito de cupón cero, cuotas de amortización nulas y cuyos títulos se cancelan íntegramente en el año 6, percibiendo una prima de amortización de 5 €. El emisor abona un único término amortizativo de cuantía 5.886.692,91 €:

$$a_6 = (50.000 \times 100 \times 1{,}02^6 + 50.000 \times 5) \times 1{,}001 = 5.886.692{,}91$$

© Ediciones Pirámide

La cuantía del único término amortizativo comercial la podemos descomponer en intereses, amortización y características comerciales (prima de amortización y gastos):

$$a = 5.886.692,91 = 50.000 \times 100(1,02^6 - 1) + 50.000 \times 100 + [50.000 \times 5 \times$$
$$\times 1,001 + 50.000 \times 100(1,02^6 - 1) \times 0,001 + 50.000 \times 100 \times 0,001] =$$
$$= 630.812,10 + 5.000.000 + 255.880,81$$

De la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida y la contraprestación real entregada por el emisor obtenemos un tanto efectivo pasivo del 4,62522912% anual:

$$50.000 \times 90 - 12.000 = 4.488.000 = 5.886.692,91(1 + i_p)^{-6}$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el emisor la operación supone obtener unos recursos netos de 4.488.000 € al 4,62522912%, amortizándose los mismos mediante un pago único de la cuantía señalada, satisfaciendo un precio financiero o costes de financiación totales de 1.398.692,91 €, cuyo desglose es el siguiente:

Prima de emisión	500.000,00
Gastos de emisión	12.000,00
Intereses	630.812,10
Prima de amortización	250.000,00
Gastos periódicos	5.880,81
Total	1.398.692,91

El cuadro de distribución es:

Año	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	4.488.000,00
1	4,62522912	0,00	207.580,28	−207.580,28	4.695.580,28
2	4,62522912	0,00	217.181,35	−217.181,35	4.912.761,63
3	4,62522912	0,00	227.226,48	−227.226,48	5.139.988,11
4	4,62522912	0,00	237.736,23	−237.736,23	5.377.724,34
5	4,62522912	0,00	248.732,07	−248.732,07	5.626.456,41
6	4,62522912	5.886.692,91	260.236,50	5.626.456,41	0,00
Total	—	5.886.692,91	1.398.692,91	4.488.000,00	—

© Ediciones Pirámide

Los costes de financiación correspondientes a cada período se obtienen aplicando el tipo efectivo pasivo a la cuantía del capital neto pendiente de devolver por el prestatario al inicio de cada período.

Para efectuar la separación de los costes de financiación entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales necesitamos el cuadro de amortización de la operación pura, el cual es:

Año	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
0	—	—	—	—	5.000.000,00
1	2	0	−100.000,00	100.000,00	5.100.000,00
2	2	0	−102.000,00	102.000,00	5.202.000,00
3	2	0	−104.040,00	104.040,00	5.306.040,00
4	2	0	−106.120,80	106.120,80	5.412.160,80
5	2	0	−108.243,22	108.243,22	5.520.404,02
6	2	5.630.812,10	5.520.404,02	110.408,08	0,00
Total	—	5.630.812,10	5.000.000,00	630.812,10	—

Por tanto:

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	207.580,28	100.000,00	107.580,28
2	217.181,35	102.000,00	115.181,35
3	227.226,48	104.040,00	123.186,48
4	237.736,23	106.120,80	131.615,43
5	248.732,07	108.243,22	140.488,85
6	260.236,50	110.408,08	149.828,42
Total	1.398.692,91	630.812,10	767.880,81

Observamos en el cuadro anterior que los costes de financiación, 1.398.692,91 €, se distribuyen en 6 años, correspondiendo a intereses 630.812,10 y 767.880,81 a la suma de la prima de emisión (500.000), prima de amortización (250.000), gastos de emisión (12.000) y gastos periódicos (5.880,81).

b) Un inversor que suscribe 80 títulos percibe unos ingresos financieros integrados por la prima de emisión, los intereses de la operación pura y la prima de amortización, soportando unos gastos del 0,2% de todas las cuantías que percibe. La distribución en el tiempo de dichos ingresos se realiza de acuerdo con el tanto de rendimiento del inversor, deducido de la ecuación de equivalencia entre la

© Ediciones Pirámide

cuantía realmente entregada (valor de emisión de los 80 títulos, o sea, 7.200 €) y la recibida. Al tratarse de un empréstito de cupón cero y amortizarse todos los títulos en el año 6 con una prima de 5 €, la cuantía del único término amortizativo percibido por el inversor por sus 80 títulos es:

$$a_{a,6} = 80(100 \times 1{,}02^6 + 5)(1 - 0{,}002) = 9.390{,}48$$

El tanto de rendimiento del inversor es el 4,52637341 % anual obtenido de la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$7.200 = 9.390{,}48(1 + i_R)^{-6}$$

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el inversor la operación supone invertir una cuantía de 7.200 € al 4,52637341 % anual, recuperándose la misma en el año 6 con el término señalado, percibiendo un precio financiero o ingresos financieros totales de 2.190,48 €, diferencia entre la cuantía total recibida y la desembolsada. El desglose es el siguiente:

Prima de emisión	800,00
Intereses	1.009,30
Prima de amortización	400,00
− Gastos	−18,82
Total	2.190,48

El cuadro de distribución es:

Año	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales cobrados	Ingresos financieros	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	7.200,00
1	4,52637341	0,00	325,90	−325,90	7.525,90
2	4,52637341	0,00	340,65	−340,65	7.866,55
3	4,52637341	0,00	356,07	−356,07	8.222,62
4	4,52637341	0,00	372,19	−372,19	8.594,81
5	4,52637341	0,00	389,03	−389,03	8.983,84
6	4,52637341	9.390,48	406,64	8.983,84	0,00
Total	—	9.390,48	2.190,48	7.200,00	—

Los ingresos financieros correspondientes a cada período se obtienen aplicando el tipo de rendimiento a la cuantía del capital neto pendiente de recuperar por el inversor al inicio de cada período.

© Ediciones Pirámide

Para realizar la separación de los ingresos financieros entre precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales, es preciso efectuar el cuadro de amortización de la operación pura correspondiente a los 80 títulos del inversor. Dicho cuadro es:

Año	Tipo de interés (%)	Término amortizativo	Cuota de amortización	Cuota de interés	Saldo financiero
0	—	—	—	—	8.000,00
1	2	0	−160,00	160,00	8.160,00
2	2	0	−163,20	163,20	8.323,20
3	2	0	−166,46	166,46	8.489,66
4	2	0	−169,79	169,79	8.659,45
5	2	0	−173,19	173,19	8.832,64
6	2	9.009,30	8.832,64	176,66	0,00
Total	—	9.009,30	8.000,00	1.009,30	—

En consecuencia:

Año	Ingresos financieros	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés)	Precio financiero de las características comerciales
1	325,90	160,00	165,90
2	340,65	163,20	177,45
3	356,07	166,46	189,61
4	372,19	169,79	202,40
5	389,03	173,19	215,84
6	406,64	176,66	229,98
Total	2.190,48	1.009,30	1.181,18

Observamos en el cuadro anterior que los ingresos financieros, 2.190,48 €, se distribuyen en 6 años, correspondiendo 1.009,30 a intereses y 1.181,18 a la suma de la prima de emisión (800), prima de amortización (400), menos los gastos (18,82).

20.6.2. Empréstitos con cancelación escalonada

EJERCICIO 20.16

Se emite un empréstito de 150.000 títulos de nominal 1.000 € y prima de emisión de 10 €, para ser amortizado mediante sorteo anual con términos amortizati-

© Ediciones Pirámide

vos comerciales constantes. La duración de la operación es 7 años y los títulos perciben un cupón anual del 4%, así como una prima de amortización de 10 €. Anualmente se reparte un lote de 20.000 € entre los cien primeros títulos que resulten amortizados en cada período, los cuales pierden el último cupón, y su valor de reembolso es el de emisión. Existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,2% sobre todas las cuantías pagadas. Los gastos de emisión ascienden a 271.000 €. Realizar la distribución temporal de los costes de financiación.

Resolución

Necesitamos conocer el plan de cancelación, los términos amortizativos reales y el tanto efectivo pasivo. Para ello, partiendo de la estructura del término amortizativo comercial, normalizamos:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 100(C \times i + C + P - V)](1 + g_1)$$

Las fórmulas de conversión son:

$$a' = \left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 100(C \times i + P - V)\right]\frac{C}{C + P}$$

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = 3{,}96039604\% \text{ anual}$$

Tenemos un empréstito normalizado tipo I, para el que se verifica:

$$150.000 \times 1.000 = a' \times a_{\overline{7}|3{,}96039604\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 24.954.877{,}83$$

Al sustituir obtenemos la cuantía constante teórica del término amortizativo comercial: $a = 25.268.863{,}46$ €.

El número teórico de títulos que se amortizan en el año 1 es:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{150.000}{s_{\overline{7}|3{,}96039604\%}} = 19.014{,}28$$

Teniendo en cuenta la ley de variación $M_s = M_{s-1}(1 + i')$, y redondeando hasta las centésimas, obtenemos el número teórico de títulos que se amortizan en cada año:

$$M_2 = 19.767{,}32;\ M_3 = 20.550{,}18;\ M_4 = 21.364{,}05;$$

$$M_5 = 22.210{,}15;\ M_6 = 23.089{,}76;\ M_7 = 24.004{,}21$$

© Ediciones Pirámide

De acuerdo con el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, en la siguiente tabla se expone el plan de cancelación y el número de títulos vivos:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	150.000
1	19.014	19.014	130.986
2	19.768	38.782	111.218
3	20.550	59.332	90.668
4	21.364	80.696	69.304
5	22.210	102.906	47.094
6	23.090	125.996	24.004
7	24.004	150.000	0

Descomponiendo el término amortizativo comercial en cuota de interés total, cuota de amortización y características comerciales, el cuadro de amortización de la operación comercial es:

Año	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés total	Características comerciales
0	—	—	—	—
1	25.268.576,28	19.014.000,00	6.000.000,00	254.576,28
2	25.269.558,24	19.768.000,00	5.239.440,00	262.118,24
3	25.268.656,44	20.550.000,00	4.448.720,00	269.936,44
4	25.268.796,72	21.364.000,00	3.626.720,00	278.076,72
5	25.268.696,52	22.210.000,00	2.772.160,00	286.536,52
6	25.269.097,32	23.090.000,00	1.883.760,00	295.337,32
7	25.268.636,40	24.004.000,00	960.160,00	304.476,40
Total	176.882.017,92	150.000.000,00	24.930.960,00	1.951.057,92

Para el cuadro anterior, la columna de cuotas de interés total se ha obtenido calculando el 4% al valor nominal de todos los títulos vivos al inicio de cada período: $I_s = N_s \times C \times 4\%$.

La columna de cuotas de amortización se ha obtenido de acuerdo con la expresión: $A_s = M_s \times C$.

La columna de características comerciales se ha obtenido según la expresión:

$$(N_s \times C \times i + M_s \times C) \times 0{,}2\% + [M_s \times P + L - 100(C \times i + C + P - V)] \times 1{,}002$$

© Ediciones Pirámide

De la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida por el emisor, 148.229.000 € (valor de emisión menos los gastos emisión), y la contraprestación real entregada, obtenemos un tanto efectivo pasivo anual del 4,62390994%.

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el emisor la operación supone obtener unos recursos netos de 148.229.000 € al 4,62390994% anual, amortizándose los mismos con los términos anuales señalados, satisfaciendo un precio financiero o costes de financiación totales de 28.653.017,92 €, diferencia entre las cuantías totales desembolsadas y las recibidas. El desglose es el siguiente:

Prima de emisión	1.500.000,00
Gastos de emisión	271.000,00
Intereses	24.930.960,00
Prima de amortización	1.500.000,00
Lote neto	98.000,00
Gastos periódicos	353.057,92
Total	28.653.017,92

El importe del lote neto es la diferencia entre el total del lote de los 7 años y las cuantías totales que no cobran los cien títulos que en cada período perciben el lote.

Para realizar la imputación temporal de los citados costes se utiliza el tanto efectivo pasivo de la operación, realizándose el siguiente cuadro de distribución:

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	148.229.000,00
1	4,62390994	25.268.576,28	6.853.975,46	18.414.600,82	129.814.399,18
2	4,62390994	25.269.558,24	6.002.500,91	19.267.057,33	110.547.341,85
3	4,62390994	25.268.656,44	5.111.609,53	20.157.046,91	90.390.294,94
4	4,62390994	25.268.796,72	4.179.565,83	21.089.230,89	69.301.064,05
5	4,62390994	25.268.696,52	3.204.418,79	22.064.277,73	47.236.786,32
6	4,62390994	25.269.097,32	2.184.186,46	23.084.910,86	24.151.875,46
7	4,62390994	25.268.636,40	1.116.760,94	24.151.875,46	0,00
Total	—	176.882.017,92	28.653.017,92	148.229.000,00	—

La separación de los costes de financiación en precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales es:

© Ediciones Pirámide

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés totales)	Precio financiero de las características comerciales
1	6.853.975,46	6.000.000,00	853.975,46
2	6.002.500,91	5.239.440,00	763.060,91
3	5.111.609,53	4.448.720,00	662.889,53
4	4.179.565,83	3.626.720,00	552.845,83
5	3.204.418,79	2.772.160,00	432.258,79
6	2.184.186,46	1.883.760,00	300.426,46
7	1.116.760,94	960.160,00	156.600,94
Total	28.653.017,92	24.930.960,00	3.722.057,92

Observamos en el cuadro anterior que los costes de financiación, 28.653.017,92 €, se distribuyen en 7 años, correspondiendo 24.930.960 a intereses totales y 3.722.057,92 a la suma de la prima de emisión (1.500.000), prima de amortización (1.500.000), gastos de emisión (271.000), lote neto (98.000) y gastos periódicos (353.057,92). Además, la cuantía total de las características comerciales se compone de la suma de las características periódicas (1.951.057,92 €, según se desprende del cuadro de amortización comercial) con las iniciales (prima y gastos de emisión).

EJERCICIO 20.17

Una empresa emite un empréstito cupón cero formado por 150.000 títulos de nominal 100 € y prima de emisión de 5 €. La amortización es por sorteo con términos amortizativos comerciales anuales constantes. La duración de la operación es 7 años y los títulos devengan un interés anual del 2%. Anualmente se reparte un lote de 40.000 € entre los cien primeros títulos que resulten amortizados en cada período. Los gastos de emisión ascienden a 160.000 € y existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,1% sobre todas las cuantías pagadas. Realizar la distribución temporal de los costes de financiación.

Resolución

Necesitamos conocer el plan de cancelación, los términos amortizativos reales y el tanto efectivo pasivo. Para ello, partiendo de la estructura del término amortizativo comercial, normalizamos:

$$a = [M_s \times C(1 + i)^s + L](1 + g_1)$$

Las fórmulas de conversión son:

$$a' = \frac{a}{(1 + g_1)} - L;\ i' = i$$

© Ediciones Pirámide

Se trata de un empréstito normalizado tipo I en el que se verifica:

$$150.000 \times 100 = a' \times a_{\overline{7}|2\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 2.317.679{,}34$$

Al sustituir obtenemos la cuantía constante teórica anual del término amortizativo: $a = 2.360.037{,}02$ €.

El valor de reembolso de los títulos que se amortizan en el año 1 es $C_1 = 100 \times \times 1{,}02 = 102$ €, obteniéndose los restantes a través de la expresión $C_s = C(1 + i)^s = = 100 \times 1{,}02^s$.

El número teórico de títulos a amortizar en el año 1, redondeando a dos decimales, es:

$$M_1 = \frac{a'}{C_1} = \frac{2.317.679{,}34}{102} = 22.722{,}35$$

Teniendo en cuenta la relación $M_s = M_{s-1}(1 + i)^{-1}$, y redondeando hasta las centésimas, obtenemos el número teórico de títulos que se amortizan en cada año:

$$M_2 = 22.276{,}81;\ M_3 = 21.840{,}01;\ M_4 = 21.411{,}77;$$

$$M_5 = 20.991{,}93;\ M_6 = 20.580{,}32;\ M_7 = 20.176{,}78$$

De acuerdo con el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, en la siguiente tabla se expone el plan de cancelación y el número de títulos vivos:

Período	Títulos amortizados	Total títulos amortizados	Títulos vivos
0	—	—	150.000
1	22.722	22.722	127.278
2	22.277	44.999	105.001
3	21.840	66.839	83.161
4	21.412	88.251	61.749
5	20.992	109.243	40.757
6	20.580	129.823	20.177
7	20.177	150.000	0

Descomponiendo el término amortizativo comercial en cuota de interés total, cuota de amortización y características comerciales, el cuadro de amortización de la operación comercial es:

© Ediciones Pirámide

Año	Término amortizativo real	Cuota de amortización	Cuota de interés total	Características comerciales
0	—	—	—	—
1	2.360.001,64	2.272.200,00	45.444,00	42.357,64
2	2.360.056,78	2.227.700,00	89.999,08	42.357,70
3	2.360.018,46	2.184.000,00	133.660,80	42.357,66
4	2.359.992,51	2.141.200,00	176.434,88	42.357,63
5	2.360.084,45	2.099.200,00	218.526,72	42.357,73
6	2.360.077,32	2.058.000,00	259.719,60	42.357,72
7	2.360.089,72	2.017.700,00	300.031,99	42.357,73
Total	16.520.320,88	15.000.000,00	1.223.817,07	296.503,81

Para el cuadro anterior, la columna de cuotas de interés se ha obtenido según la expresión: $I_s = M_s \times C[(1 + i)^s - 1]$.

La columna de cuotas de amortización se ha obtenido de acuerdo con la expresión: $A_s = M_s \times C$.

La columna de características comerciales se ha obtenido según la expresión:

$$\{M_s \times C[(1 + i)^s - 1] + M_s \times C\}g_1 + L(1 + g_1)$$

De la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real recibida por el emisor, 14.090.000 € (valor de emisión menos los gastos emisión) y la contraprestación real entregada, obtenemos un tanto efectivo pasivo anual del 4,14407184%.

En consecuencia, desde el punto de vista financiero, para el emisor la operación supone obtener unos recursos netos de 14.090.000 € al 4,14407184% anual, amortizándose los mismos con los términos anuales señalados, satisfaciendo un precio financiero o costes de financiación totales de 2.430.320,88 €, diferencia entre las cuantías totales desembolsadas y las recibidas. El desglose es el siguiente:

Prima de emisión	750.000,00
Gastos de emisión	160.000,00
Intereses	1.223.817,07
Lote	280.000,00
Gastos periódicos	16.503,81
Total	2.430.320,88

De acuerdo con el tanto efectivo pasivo de la operación, el cuadro de distribución es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

Período	Tipo de interés efectivo (%)	Capitales pagados	Costes de financiación	Amortización	Capital pendiente neto
0	—	—	—	—	14.090.000,00
1	4,14407184	2.360.001,64	583.899,72	1.776.101,92	12.313.898,08
2	4,14407184	2.360.056,78	510.296,78	1.849.760,00	10.464.138,08
3	4,14407184	2.360.018,46	433.641,40	1.926.377,06	8.537.761,02
4	4,14407184	2.359.992,51	353.810,95	2.006.181,56	6.531.579,46
5	4,14407184	2.360.084,45	270.673,35	2.089.411,10	4.442.168,36
6	4,14407184	2.360.077,32	184.086,65	2.175.990,67	2.266.177,69
7	4,14407184	2.360.089,72	93.912,03	2.266.177,69	0,00
Total	—	16.520.320,88	2.430.320,88	14.090.000,00	—

La separación de los costes de financiación en precio financiero de la operación pura y precio financiero de las características comerciales es:

Período	Costes de financiación	Precio financiero de la operación pura (cuotas de interés totales)	Precio financiero de las características comerciales
1	583.899,72	45.444,00	538.455,72
2	510.296,78	89.999,08	420.297,70
3	433.641,40	133.660,80	299.980,60
4	353.810,95	176.434,88	177.376,07
5	270.673,35	218.526,72	52.146,63
6	184.086,65	259.719,60	−75.632,95
7	93.912,03	300.031,99	−206.119,96
Total	2.430.320,88	1.223.817,07	1.206.503,81

Observamos en el cuadro anterior que los costes de financiación, 2.430.320,88 €, se distribuyen en 7 años, correspondiendo 1.223.817,08 a intereses totales y 1.206.503,81 a la suma de la prima de emisión (750.000), gastos de emisión (160.000), lote (280.000) y gastos periódicos (16.503,81). Además, la cuantía total de las características comerciales se compone de la suma de las características periódicas (296.503,81 €, según se desprende del cuadro de amortización comercial) con las iniciales (prima y gastos de emisión).

20.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una sociedad emite un empréstito integrado por 22.000 títulos de nominal 100 € a amortizar por sorteo en 18 años mediante anualidad comercial constante y cupón semestral del 3%. Se sabe que los títulos reciben una prima de

© Ediciones Pirámide

amortización de 20 € y que anualmente se reparte un lote constante entre los 60 primeros títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales sólo reciben el importe del lote correspondiente, perdiendo el valor de reembolso y el último cupón. Los títulos tienen una prima de emisión de 5 €. Existen gastos periódicos a cargo de los obligacionistas sobre las cuantías recibidas del 0,1%. Además, sabemos que el tipo efectivo activo es el 8,54812% anual. Hallar la cuantía del lote.

Resolución

Se trata de un empréstito con fraccionamiento de intereses, pues los cupones son semestrales y la amortización anual. El tipo de interés anual equivalente al semestral de los cupones es:

$$1{,}03^2 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}0609$$

En consecuencia, la estructura del término amortizativo comercial equivalente anual para el período s es la siguiente:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 60(C + P + C \times i^{(m)})]$$

Normalizando:

$$[a - L + 60(C + P + C \times i^{(m)})]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

Las fórmulas de conversión son:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{6{,}09}{120} = 0{,}05075;\ a' = [a - L + 60(C + P + C \times i^{(m)})]\frac{C}{C + P}$$

Transformado el empréstito comercial en uno normalizado tipo I, podemos plantear la ecuación de equivalencia en el origen, lo que nos permite hallar el término amortizativo normalizado:

$$N_1 \times C = a' \times a_{\overline{n}|i'} \quad \Rightarrow \quad 22.000 \times 100 = a' \times a_{\overline{18}|0{,}05075} \quad \Rightarrow \quad a' = 189.306{,}06$$

Teniendo en cuenta que conocemos el tipo efectivo activo de la operación, podemos plantear la ecuación de equivalencia financiera entre las cantidades efectivamente entregadas y recibidas por el conjunto de los obligacionistas, obteniendo así la cuantía del término amortizativo comercial:

$$22.000 \times 95 = a(1 - 0{,}001) \times a_{\overline{18}|0{,}0854812} \quad \Rightarrow \quad a = 231.787{,}23$$

© Ediciones Pirámide

Para finalizar, podemos hallar el importe del lote a través de la ecuación que relaciona el término amortizativo normalizado con el término amortizativo comercial:

$$189.306{,}06 = [231.787{,}23 - L + 60(120 + 3)]\frac{100}{120} \quad \Rightarrow \quad L = 12.000\ €$$

2. Se emite un empréstito de 25.000 títulos de nominal 40 € para ser amortizado en 24 años, mediante sorteo con términos amortizativos comerciales constantes y con cupón acumulado del 4% anual. Además, anualmente se entrega un lote, cuyo importe es 18.000 €, entre los 20 primeros títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales pierden el nominal. Los títulos tienen una prima de emisión de 5 €. Existen gastos periódicos para el emisor del 0,15% sobre todas las cuantías entregadas y para los obligacionistas del 0,2% sobre todas las cuantía recibidas. Hallar: *a*) tipo efectivo activo; *b*)tipo efectivo pasivo, y *c*) tipo de rendimiento para una obligación que se amortiza en el año 10 y recibe lote.

Resolución

La estructura del término amortizativo del período s es:

$$a = [M_s \times C(1 + i)^s + L - 20 \times C](1 + g_1)$$

Normalizando:

$$\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 20 \times C = M_s \times C(1 + i)^s$$

El primer miembro de la expresión anterior es el término amortizativo normalizado para el período s, siendo $i' = i$.

Calculamos los términos amortizativos normalizados a través de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$25.000 \times 40 = a' \times a_{\overline{24}|4\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 65.586{,}83$$

Conocido este término, podemos determinar la cuantía del término amortizativo comercial:

$$65.586{,}83 = \frac{a}{1{,}0015} - 18.000 + 20 \times 40 \quad \Rightarrow \quad a = 82.911{,}01$$

© Ediciones Pirámide

a) Una vez calculado el término comercial, planteamos la ecuación de equivalencia entre las cuantías realmente entregadas y recibidas por el conjunto de los obligacionistas, lo que nos permite hallar el tipo efectivo activo anual:

$$N_1 \times V = a_a \times a_{\overline{n}|i_a} \quad \Rightarrow \quad a_a = \frac{a}{1+g_1}(1-g_2)$$

$$25.000 \times 35 = \frac{82.911{,}01}{1{,}0015}(1-0{,}002) \times a_{\overline{24}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 7{,}930019\%$$

b) El tipo efectivo pasivo anual se deduce de la ecuación:

$$25.000 \times 35 = 82.911{,}01 \times a_{\overline{24}|i_p} \quad \Rightarrow \quad i_p = 7{,}971893\%$$

c) El tipo de rendimiento anual de una obligación que se amortiza en el año 10 y recibe lote se deduce de la ecuación de equivalencia entre la cuantía desembolsada por el obligacionista al adquirir el título, o sea el valor de emisión, y la cuantía recibida en el año 10. Ésta viene dada por el importe neto de los intereses acumulados hasta ese momento y el del lote correspondiente al título amortizado, deducido el nominal, pues lo pierde:

$$V = \left[C(1+i)^{10} - C + \frac{L}{20}\right](1-g_2)(1+i_R)^{-10}$$

$$35 = [40(1{,}04^{10}-1)+900](1-0{,}002)(1-i_R)^{-10} \qquad i_R = 38{,}62696427\%$$

3. Se emite un empréstito integrado por 20.000 títulos de nominal 50 € para ser amortizado por sorteo en 20 años, con términos amortizativos anuales constantes y cupón acumulado del 4% anual. Los títulos que resultan amortizados en cada año pierden el cupón correspondiente al mismo. Los gastos periódicos a cargo del emisor son del 0,2% de todas las cantidades entregadas y los gastos a cargo de los obligacionistas son del 0,3% sobre las cuantías recibidas. El valor de emisión de los títulos es de 40 €. Hallar el tipo efectivo activo para el conjunto de obligacionistas.

Resolución

La estructura del término amortizativo del período *s* es:

$$a = [M_s \times C(1+i)^{s-1}](1+g_1)$$

Normalizando:

$$\frac{a \times C(1+i)^s}{(1+g_1) \times C(1+i)^{s-1}} = M_s \times C(1+i)^s$$

© Ediciones Pirámide

Al simplificar, queda:

$$\frac{a(1+i)}{(1+g_1)} = M_s \times C(1+i)^s$$

El primer miembro de la expresión anterior es a', siendo $i' = i$

Hallamos la cuantía del término amortizativo normalizado, planteando la ecuación de equivalencia en el origen:

$$20.000 \times 50 = a' \times a_{\overline{20}|4\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 73.581{,}75$$

A continuación despejamos la cuantía del término amortizativo comercial de la fórmula de conversión de a':

$$a' = \frac{a(1+0{,}04)}{1{,}002} = 73.581{,}75 \quad \Rightarrow \quad a = 70.893{,}19$$

Una vez conocido el importe del término amortizativo comercial, podemos hallar el tipo efectivo activo anual a través de la ecuación de equivalencia entre las cantidades efectivamente entregadas y recibidas por el conjunto de los obligacionistas, siendo:

$$a_a = \frac{a}{1+g_1}(1-g_2)$$

$$20.000 \times 40 = \frac{70.893{,}19(1-0{,}003)}{1{,}002} \times a_{\overline{20}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 6{,}13947\%$$

4. Se emiten 18.000 títulos de nominal 60 € para ser amortizado por sorteo en 12 años con cupones anuales del 6% y con términos amortizativos comerciales constantes. Los títulos se amortizan con una prima variable. Sabemos que la prima de amortización correspondiente al sexto año es de 9,67 € y que el valor de emisión es de 50 €. Los gastos periódicos son del 0,1% para el emisor por las cuantías entregadas y del 0,2% para los obligacionistas sobre las cuantías recibidas. Los obligacionistas obtienen un tipo de rendimiento constante. Se pide la cuantía del término amortizativo comercial.

Resolución

Al ser la prima de amortización variable, el término amortizativo comercial en el período s tiene la siguiente estructura:

$$a = (N_s \times C \times i + M_s \times C'_s)(1+g_1)$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta que conocemos el importe de la prima de amortización del año 6, podemos obtener el tipo de rendimiento anual para un título que se amortiza en dicho año, a través de la ecuación que relaciona el valor de emisión pagado en la compra de la obligación y las cuantías netas recibidas:

$$V = [C \times i \times a_{\overline{6}|i_R} + C'_6(1 + i_R)^{-6}](1 - g_2)$$

$$50 = [3{,}6 \times a_{\overline{6}|i_R} + 69{,}67(1 + i_R)^{-6}](1 - 0{,}002) \quad \Rightarrow \quad i_R = 12\%$$

Como el tipo de rendimiento es constante, coincide con el tipo efectivo activo de la operación. En consecuencia, se verifica la siguiente expresión analítica, de la que obtenemos la cuantía del término amortizativo comercial:

$$18.500 \times 50 = \frac{a(1 - 0{,}002)}{1{,}001} \times a_{\overline{12}|12\%} \quad \Rightarrow \quad a = 145.729{,}88 \text{ €}$$

5. Con el fin de obtener un importe neto de 395 millones de euros, una sociedad emite un empréstito de cupón periódico para ser amortizado por sorteo en 25 años. Las características son las siguientes: nominal de cada título 10.000 €; prima de emisión 100 €; gastos de emisión 604.000 €, incrementados en el 0,1% del valor total emitido; gastos anuales a cargo de los obligacionistas del 0,3% sobre las cuantías que perciben; términos amortizativos comerciales variables, siendo el correspondiente al año 1 de 96.090.450 €. En el año 1 se amortiza el 10% de los títulos emitidos. Los títulos se amortizan con una prima constante P. Anualmente se reparte un lote de cuantía constante L entre los 20 primeros títulos que resulten amortizados, los cuales pierden el último cupón y la prima de amortización. Además, los 5 últimos de dichos 20 títulos son reembolsados por el valor de emisión, incrementado en un 10%. El tipo de interés del empréstito normalizado es el 10% anual. Se sabe que un obligacionista poseedor de 200 títulos, de los cuales 3 son amortizados sin lote en el año 1, percibe un importe total, antes de deducir los gastos a su cargo, y por todos los conceptos inherentes a dichos 3 títulos, de 39.600 €. Determinar la cuantía del lote anual.

Resolución

Considerando la cuantía neta que necesita el emisor, el valor de emisión del empréstito, así como los gastos de emisión del mismo, se verifica:

$$395.000.000 = N_1 \times V - 604.000 - 0{,}001 \times N_1 \times V \quad \Rightarrow \quad N_1 = 40.000$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las características comerciales del empréstito, la estructura del término amortizativo comercial para el período s es:

$$a_s = N_s \times C \times i \times M_s(C + P) + L - 20(C \times i + P) - 5 \times C + 5 \times V \times 1{,}1$$

© Ediciones Pirámide

Aplicando el proceso de normalización:

$$[a_s - L + 20(C \times i + P) + 5 \times C - 5 \times V \times 1{,}1]\frac{C}{C+P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C+P} + M_s \times C$$

En consecuencia, las fórmulas de conversión son:

$$i' = \frac{C \times i}{C+P} = 0{,}1;\ a'_s = [a_s - L + 20(C \times i + P) + 5 \times C - 5 \times V \times 1{,}1]\frac{C}{C+P}$$

Conocemos la cuantía a percibir por tres títulos que se amortizan en el año 1 y no reciben lote, por lo que se verifica:

$$39.600 = 3 \times C \times i + 3(C + P)$$

De la expresión anterior sólo conocemos la cuantía del nominal, con lo que tenemos una ecuación con dos incógnitas: el tipo de interés anual y la prima de amortización. Son las mismas que aparecen en la fórmula del tipo de interés normalizado. Resolviendo el sistema de ecuaciones, resulta: $P = 2.000$; $i = 0{,}12$.

Conocemos la cuantía del primer término amortizativo comercial y que el número de títulos que se amortizan en este primer período es el 10% de los emitidos. En consecuencia, de la estructura de este primer término amortizativo comercial podemos obtener la cuantía del lote:

$$96.090.450 = 40.000 \times 10.000 \times 0{,}12 + 4.000 \times 12.000 + L - 20(1.200 + 2.000) -$$
$$- 50.000 + 9.900 \times 5 \times 1{,}1 \quad \Rightarrow \quad L = 150.000\ €$$

6. Se emite un empréstito integrado por 30.000 títulos de 1.000 € nominales, con cupón anual de 120 € por título y a amortizar por sorteo en 15 años. La amortización se realiza mediante anualidad comercial constante, existiendo una prima de amortización por título de 100 €. Anualmente se reparten dos lotes. El primero de ellos entre los 10 primeros títulos que resulten amortizados en cada sorteo y el segundo entre los 20 siguientes. Los títulos que perciben el primer lote pierden la prima de amortización, y los que perciban el segundo pierden el último cupón. El importe total anual del primer lote, antes de gastos, es igual al de los intereses, sin considerar gastos, que se abonan en el período siguiente, teniendo en cuenta los títulos que no percibirán cupón. La cuantía anual total del segundo lote, sin considerar gastos, es el 10% de término amortizativo comercial. Gastos anuales a cargo del emisor del 0,1% de todas las cuantías satisfechas, y gastos anuales a cargo de los obligacionistas del 0,2% de todas las cuantías que perciben. Determinar el tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Planteamos la estructura del término amortizativo comercial para el período s, teniendo en cuenta que los lotes verifican las siguientes igualdades:

$$L_s^{(1)} = N_{s+1} \times C \times i - 20 \times C \times i;\ L_s^{(2)} = 0{,}1 \times a$$

$$a_s = a = [N_s \times C \times i \times M_s(C + P) + N_{s+1} \times C \times i - 20 \times C \times i - 10 \times \\ \times P + 0{,}1 \times a - 20 \times C \times i] \times 1{,}001$$

Teniendo en cuenta que $N_{s+1} = N_s - M_s$ y aplicando el proceso de normalización, resulta la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{a}{1{,}001} + 40 \times C \times i + 10 \times P - 0{,}1 \times a\right)\frac{C}{C + P - C \times i} = \\ = N_s \times C\frac{2C \times i}{C + P - C \times i} + M_s \times C$$

En consecuencia, las fórmulas de conversión son:

$$i' = \frac{2C \times i}{C + P - C \times i} = \frac{240}{1.100 - 120} = 0{,}244897959$$

$$a' = \left(\frac{a}{1{,}001} + 40 \times C \times i + 10 \times P - 0{,}1 \times a\right)\frac{C}{C + P - C \times i}$$

La cuantía del término amortizativo normalizado podemos calcularla de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$30.000 \times 1.000 = a' \times a_{\overline{15}|0{,}244897959} \quad \Rightarrow \quad a' = 7.632.473{,}53$$

A continuación, despejamos la cuantía del término amortizativo comercial de la fórmula de conversión que relaciona éste con el término normalizado y resulta: $a = 8.313.699{,}39$.

Una vez conocido el importe del término amortizativo comercial, podemos hallar el tipo efectivo activo anual a través de la ecuación de equivalencia entre las cantidades efectivas entregadas y recibidas por el conjunto de obligacionistas, siendo:

$$a_a = \frac{a}{1 + g_1}(1 - g_2)$$

$$30.000 \times 1.000 = \frac{8.313.699{,}39(1 - 0{,}002)}{1{,}001} \times a_{\overline{15}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 26{,}8493665\%$$

© Ediciones Pirámide

7. Se emite un empréstito de 25.000 títulos de nominal 90 €, para ser amortizado por sorteo con términos amortizativos anuales constantes y con cupón acumulado del 5% anual. Los títulos se emiten con un valor de emisión de 80 €. El empréstito tiene una duración de 30 años. Los obligacionistas obtienen un tipo de rendimiento constante del 6% anual. El emisor paga unos gastos periódicos del 0,1% sobre las cuantías entregadas, y los obligacionistas del 0,2% sobre las cuantías recibidas. Determinar el número de títulos que se amortizan en el año 20 y la prima de amortización del año 15.

Resolución

Al ser un empréstito de tanto de rendimiento constante, éste coincide con el tanto efectivo activo, verificándose:

$$25.000 \times 80 = \frac{a(1 - 0{,}002)}{1{,}001} \times a_{\overline{30}|6\%} \quad \Rightarrow \quad a = 145.734{,}59$$

Con el fin de obtener el número de títulos amortizados en el período 20, necesitamos conocer el importe del valor de reembolso de dicho período, para lo cual planteamos la ecuación del tanto de rendimiento para un título que resulte amortizado en el período indicado:

$$80 = C'_{20} \times 1{,}06^{-20}(1 - 0{,}002) \quad \Rightarrow \quad C'_{20} = 257{,}09$$

Conocido el valor de reembolso, planteamos la estructura del término amortizativo comercial para el período 20, lo que nos permite hallar el número de títulos solicitado:

$$145.734{,}59 = M_{20} \times 257{,}09 \times 1{,}001 \quad \Rightarrow \quad M_{20} = 566{,}30$$

Para el cálculo de la prima de amortización del período 15, planteamos la ecuación del tanto de rendimiento de un título que se amortice en dicho período, lo que nos permite obtener su valor de reembolso y a partir de éste la prima indicada:

$$80 = C'_{15} \times 1{,}06^{-15}(1 - 0{,}002) \quad \Rightarrow \quad C'_{15} = 192{,}11$$

$$192{,}11 = 90 \times 1{,}05^{15} + P_{15} \quad \Rightarrow \quad P_{15} = 5{,}01$$

8. Una empresa emite 100.000 títulos que serán amortizados con anualidad comercial constante y por sorteo en 10 años. Los títulos son de nominal 600 €, valor de emisión 550 € y prima de amortización constante. El cupón anual es el 5,76%. Existen unos gastos de emisión de 530.903,64 €. Se pide: *a*) importe de la

© Ediciones Pirámide

prima anual de amortización si el tanto efectivo pasivo es el 8,90% anual; *b*) número de títulos en circulación al inicio del año 4; *c*) si la empresa decidiera emitir con una prima de amortización de 50 € por título, en lugar de la calculada previamente, ¿cuál sería el tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas?, y *d*) en la hipótesis precedente, ¿cuántos títulos se amortizarían en el año 6 y cuál sería su tanto de rendimiento?

Resolución

a) La estructura del término amortizativo comercial constante para el período *s* es:

$$a' = a = N_s \times C \times i + M_s(C + P)$$

Aplicando el proceso de normalización, resulta la siguiente igualdad:

$$\frac{a \times C}{C + P} = N_s \times C\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

En consecuencia, las fórmulas de conversión son:

$$i' = \frac{C \times i}{C + P} = \frac{34{,}56}{600 + P}$$

$$a' = \frac{600 \times a}{600 + P}$$

El término amortizativo comercial se deduce de la siguiente ecuación del tipo efectivo pasivo:

$$100.000 \times 550 - 530.903{,}64 = a \times a_{\overline{10}|8{,}90\%} \quad \Rightarrow \quad a = 8.450.057{,}98$$

Para el empréstito normalizado, la ecuación de equivalencia en el origen verifica:

$$100.000 \times 600 = a' \times a_{\overline{10}|i'}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de conversión, así como el valor de $a_{\overline{10}|i'}$, tenemos:

$$100.000 \times 600 = \frac{600 \times a}{600 + P}\left[\frac{1 - (1 + i')^{-10}}{i'}\right]$$

© Ediciones Pirámide

Simplificando y sustituyendo el tipo de interés normalizado por su valor, queda:

$$100.000 = \frac{a}{600 + P}\left[\frac{1 - (1 + i')^{-10}}{\frac{34,56}{600 + P}}\right]$$

Al simplificar y sustituir a por su valor, queda:

$$100.000 \times 34,56 = 8.450.057,98[1 - (1 + i')^{-10}]$$

De donde se llega al tipo de interés anual del empréstito:

$$0,5910087235 = (1 + i')^{-10} \quad \Rightarrow \quad i' = 0,054$$

Y por tanto:

$$i' = 0,054 = \frac{34,56}{600 + P} \quad \Rightarrow \quad P = 40\ €$$

b) Para hallar N_4 necesitamos conocer a':

$$a' = \frac{600 \times a}{600 + P} = \frac{600 \times 8.450.057,98}{600 + 40} = 7.921.929,36$$

La ecuación que permite determinar el número teórico de títulos vivos al principio del año 4 es:

$$N_4 \times 600 = a' \times a_{\overline{7}|i'} \quad \Rightarrow \quad N_4 = 75.303,48$$

c) Para una prima de amortización de 50 €, el tipo de interés normalizado anual es:

$$i' = \frac{34,56}{600 + 50} = 0,05316923$$

En consecuencia, el nuevo término amortizativo normalizado verifica:

$$100.000 \times 600 = a' \times a_{\overline{10}|0,05316923} \quad \Rightarrow \quad a' = 7.890.314,15$$

El nuevo término amortizativo comercial se obtiene de la fórmula de conversión:

$$a' = \frac{600 \times a}{600 + 50} = 7.890.314,15 \quad \Rightarrow \quad a = 8.547.840,33$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, la ecuación del tipo efectivo activo anual verifica:

$$100.000 \times 550 = 8.547.840{,}33 \times a_{\overline{10}|i_a} \quad \Rightarrow \quad i_a = 8{,}940943\%$$

d) El número teórico de títulos amortizados en el año 1 y en el 6, es:

$$M_1 = \frac{100.000}{s_{\overline{10}|0{,}05316923}} = 7.833{,}60$$

$$M_6 = 7.833{,}60 \times 1{,}05316923^5 = 10.149{,}68$$

La ecuación de equivalencia para determinar el tipo de rendimiento anual de un título que se amortice en el sexto año es:

$$550 = 34{,}56 \times a_{\overline{6}|i_R} + 650(1 + i_R)^{-6} \quad \Rightarrow \quad i_R = 8{,}717638\%$$

9. Una empresa emite un empréstito formado por 50.000 títulos de nominal 1.000 €, amortizables sin cancelación escalonada por el método francés en 10 años al 2% anual. Los gastos de emisión ascienden a 120.000 €, soportándose anualmente, y sobre todas las cuantías satisfechas, unos gastos del 0,1% de las mismas. La prima de reembolso de los títulos es 20 € y ofrecen un tanto de rendimiento del 2,49983123% anual. Determinar el tanto efectivo pasivo.

Resolución

Cada obligación representa un préstamo francés de 10 años de duración, de cuantía 1.000 € y amortizable al 2% anual, por lo que la cuantía constante del término amortizativo anual verifica:

$$1.000 = a' \times a_{\overline{10}|2\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 111{,}33$$

Cada título percibe diez términos de cuantía 111,33 € y además 20 € al final del año 10. Por tanto, el tanto de rendimiento de un título cualquiera verifica la siguiente ecuación, de la que obtenemos como valor de emisión 990 €:

$$V = 111{,}33 \times a_{\overline{10}|2{,}49983123\%} + 20 \times 1{,}0249983123^{-10}$$

Teniendo en cuenta los gastos periódicos, el emisor abona por los 50.000 títulos las siguientes cuantías anuales:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_9 = 111{,}33 \times 50.000 \times 1{,}001 = 5.572.066{,}50$$

$$a_{10} = (111{,}33 + 20) \times 50.000 \times 1{,}001 = 6.573.066{,}50$$

© Ediciones Pirámide

Sabiendo que el emisor soporta unos gastos iniciales de 120.000 €, el tanto efectivo pasivo anual es el 2,565283%, obtenido de la siguiente ecuación:

$$50.000 \times 990 - 120.000 = 5.572.066{,}50 \times a_{\overline{9}|i_p} + 6.573.066{,}50(1 + i_p)^{-10}$$

20.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una sociedad necesita financiación por importe neto de 1.005.000 €, para lo cual decide emitir un empréstito de 30.000 títulos de nominal 40 €, para ser amortizado mediante sorteo, con términos amortizativos comerciales constantes y cupón anual del 6%. La duración de la operación es 25 años. Los títulos son reembolsados con prima constante de 5 €. Además, anualmente se reparte un lote entre los 50 primeros títulos que resulten amortizados, los cuales pierden el valor de reembolso y el último cupón. Los gastos de emisión son de 15.000 €. Existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,2% sobre todas las cuantías entregadas y a cargo de los obligacionistas del 0,3% sobre las cuantías recibidas. Sabiendo que el tipo efectivo activo es del 10,451133% anual, hallar el tipo de rendimiento de una obligación que se amortiza en el año 12 y que recibe lote.

2. Sea un empréstito de 15.000 títulos de nominal 45 € que se emite para ser amortizado por sorteo y con términos amortizativos anuales comerciales constantes. Los cupones tienen un vencimiento cuatrimestral y son de cuantía 2,25 € por título. La duración de la operación es de 12 años. Los títulos se amortizan con una prima de 5 €. Los gastos periódicos a cargo del emisor son del 0,2% sobre todas las cuantías entregadas. Hallar el importe de los intereses cuatrimestrales a pagar en el sexto año.

3. Se emite un empréstito de 15.000 títulos de nominal 60 € para ser amortizado por sorteo en 24 años. Los cupones anuales son de cuantía 4,8 € por título. Se sabe que el término amortizativo comercial anual es de cuantía 117.156,99 € y que las obligaciones se emiten con tipo de rendimiento constante del 15% anual. Los gastos periódicos para el emisor son del 0,2% sobre las cuantías entregadas y para los obligacionistas del 0,3% sobre las cuantías recibidas. Hallar la prima de amortización del año 15.

4. Una sociedad emite un empréstito a amortizar por sorteo en 20 años mediante anualidad comercial constante y cupón periódico. El nominal de cada obligación es de 50 €. El valor de emisión de las obligaciones es 45 € y existe una prima de amortización por obligación de 25 €. Anualmente se reparte un lote constante de 1.000 € entre las 20 primeras obligaciones amortizadas, las cuales se reembolsarán por su valor de emisión. El emisor soporta unos gastos anuales del 0,1% sobre todas las cuantías abonadas. Sabemos que el tipo de rentabilidad efec-

© Ediciones Pirámide

tiva para una obligación que se amortiza en el año 4 y recibe lote es del 24,86409424% anual, y que el importe del término amortizativo comercial asciende a 104.460,63 €. Hallar el número de títulos emitidos.

5. Una sociedad emite un empréstito integrado por 30.000 títulos a amortizar por sorteo en 15 años mediante anualidad comercial constante. Cada título tiene un valor nominal de 4 € y recibe periódicamente un cupón anual de 0,20 €. La prima de amortización es de 1 €. Además, se reparte un lote anual constante entre los 15 primeros títulos amortizados en cada período, los cuales son reembolsados por su valor de emisión. Existen gastos de emisión por importe de 600 €. Los gastos anuales a cargo del emisor son del 0,1% sobre todas las cuantías entregadas. Los obligacionistas soportan unos gastos anuales del 0,2% sobre todas las cuantías recibidas. Se sabe que el emisor desea obtener una cuantía neta de 89.400 €, y que el tipo efectivo activo es el 12,33% anual. Calcular el importe del lote anual.

6. Una sociedad anónima emite un empréstito integrado por 100.000 títulos de 10.000 € nominales, que devengan un cupón anual antes de considerar gastos de 900 €. Otras características del empréstito son las siguientes: tanto de rendimiento constante, una vez considerados los gastos de los obligacionistas, del 10% anual; gastos anuales a cargo del emisor del 0,1% de las cuantías satisfechas; gastos anuales a cargo de los obligacionistas del 0,2% sobre las cuantías entregadas. Durante los 15 primeros años el término amortizativo comercial es de cuantía *a,* y durante los 5 siguientes de cuantía *2a*. Precio de emisión *V*; la prima de amortización del año 3 importa 331 € por título. Determinar la cuantía *a* y el tanto efectivo pasivo.

7. Con el fin de obtener un importe neto de 48 millones de euros, cierta empresa emite un empréstito con prima de emisión, integrado por títulos de 10.000 € y cupón anual del 11%. Los gastos de emisión ascienden a 265.000 € incrementados en el 1,5% del valor total de emisión. Los títulos se amortizan por sorteo en 15 años mediante anualidad comercial constante, percibiendo cada uno una prima de amortización *P*. Anualmente se reparte un lote entre el 5% de los títulos que resultan amortizados. La cuantía del lote anual es igual al importe total de la prima del año correspondiente. El importe del lote del año 1, sin considerar gastos, es de 78.500 €, y el del año 3 asciende a 94.985 €. Gastos anuales a cargo del emisor del 0,1% de todas las cuantías que satisface, y gastos anuales a cargo de los obligacionistas del 0,2% de todas las cuantías que perciben. En las condiciones citadas, el tanto efectivo activo es el 12,05777694% anual. Determinar el número de títulos vivos al principio del año 7.

8. Las características de un empréstito de 35.000 títulos, con cupón acumulado a amortizar por sorteo y con anualidad comercial constante durante 25 años,

© Ediciones Pirámide

son las siguientes: nominal 10.000 €; gastos anuales a cargo del emisor y sobre todas las cuantías que satisface del 0,1%; impuestos anuales a cargo de los obligacionistas y sobre todas las cuantías que perciben del 0,2%; tanto efectivo activo del 10,1049586% anual. La empresa emisora del empréstito propone al principio del año 12 a los obligacionistas poseedores del 50% de los títulos vivos en ese momento, abonarles por los mismos la cantidad, después de impuestos, de 189.039.676 €. En la hipótesis de que acepten tal amortización anticipada de los títulos, ¿cuál es el tanto de rendimiento obtenido por un obligacionista poseedor de un solo título?

© Ediciones Pirámide

21 Valor financiero, usufructo y nuda propiedad de un empréstito

OBJETIVOS

- Conocer, distinguir y calcular el valor financiero total de un empréstito, el valor financiero del usufructo, el de la nuda propiedad y el de sus características comerciales.
- Distinguir y calcular los valores financieros totales para el emisor y para el conjunto de los obligacionistas.
- Determinar los valores financieros para cualquier obligación.

SUMARIO

21.1. Valor financiero de un empréstito puro.
21.2. Valor financiero de un empréstito con características comerciales.
21.3. Ejercicios y problemas resueltos.
21.4. Ejercicios y problemas propuestos.

21.1. VALOR FINANCIERO DE UN EMPRÉSTITO PURO

El emisor o los obligacionistas de un empréstito pueden necesitar, en un determinado momento de la vida del mismo, conocer el valor financiero en las condiciones de mercado de la operación pendiente de vencimiento, bien sea para proceder a su enajenación o, en el caso del emisor, para anticipar el pago total o parcial de la deuda. Por ello, vamos a analizar la valoración de un empréstito al principio del período $s + 1$, en el que están vivos todos los títulos emitidos, si pertenecen a un empréstito sin cancelación escalonada, o N_{s+1} si pertenecen a un empréstito amortizable con cancelación escalonada.

En general, definimos el **valor financiero total** del empréstito al principio del período $s + 1$ como el valor actualizado, a un tipo de interés t, de los términos amortizativos pendientes de vencimiento:

$$V_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + t)^{-h}$$

El valor financiero total indica para el emisor el valor actualizado de sus compromisos futuros. Para el conjunto de los obligacionistas, indica el valor actualizado de sus derechos futuros.

Sabemos que para un período cualquiera, $s + h$, el término amortizativo de cualquier modalidad de empréstito normal se descompone en cuota de interés y en cuota de amortización: $a_{s+h} = I_{s+h} + A_{s+h}$. Por ello, de forma similar a lo expuesto en los préstamos, podemos definir, al principio del período $s + 1$, el **valor financiero del usufructo** como el valor actualizado, al tipo de interés t, de las cuotas de interés pendientes de vencimiento; y el **valor financiero de la nuda**

© Ediciones Pirámide

propiedad como el valor actualizado, a dicho tipo, de las cuotas de amortización pendientes:

$$U_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} I_{s+h}(1+t)^{-h}$$

$$N_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1+t)^{-h}$$

En consecuencia, se verifica: $V_s^T = U_s^T + N_s^T$.

Por otra parte, como todos los títulos de un empréstito comportan idénticos derechos, los conceptos anteriores son también aplicables a cualquier título, referidos lógicamente a los términos amortizativos o a sus componentes que corresponden a un título. De esta forma se determinan los respectivos valores financieros de un título: $\bar{V}_s$, $\bar{U}_s$ y $\bar{N}_s$.

21.1.1. Empréstitos normales sin cancelación escalonada

Sabemos que, en esta modalidad, la relación entre los términos amortizativos del empréstito, a_{s+h}, y los de un título es: $a_{s+h} = N_1 \times a'_{s+h}$. En consecuencia, podemos obtener primero los valores de un título, y después, multiplicando N_1 por los mismos, obtenemos los valores totales:

$$V_s^T = N_1 \times \bar{V}_s$$

$$U_s^T = N_1 \times \bar{U}_s$$

$$N_s^T = N_1 \times \bar{N}_s$$

EJERCICIO 21.1

Una empresa emite un empréstito de 60.000 títulos de nominal 1.000 € para ser cancelados íntegramente dentro de 15 años, percibiendo un cupón anual del 4%. Para un tipo de interés del 5% anual, determinar al principio del año 7 los valores financieros, tanto para un título como para el empréstito.

Resolución

Los títulos perciben periódicamente un cupón de 40 € y se cancelan íntegramente en el año 15, por lo que las 14 primeras cuotas de amortización son nulas. En consecuencia, los 14 primeros términos amortizativos de cualquier título sólo

© Ediciones Pirámide

constan de intereses, y el término del año 15 incluye intereses y la cuota de amortización:

$$a'_1 = a'_2 = ... = a'_{14} = 1.000 \times 0{,}04 = 40$$

$$a'_{15} = 40 + 1.000 = 1.040$$

El valor financiero total de un título al inicio del año 7 es:

$$\bar{V}_6 = 40 \times a_{\overline{8}|5\%} + 1.040 \times 1{,}05^{-9} = 928{,}92 \text{ €}$$

El valor financiero del usufructo es:

$$\bar{U}_6 = 40 \times a_{\overline{9}|5\%} = 284{,}31 \text{ €}$$

Al ser $\bar{V}_6 = \bar{U}_6 + \bar{N}_6$, tenemos:

$$\bar{N}_6 = \bar{V}_6 - \bar{U}_6 = 928{,}92 - 284{,}31 = 644{,}61 \text{ €}$$

También podemos obtener el valor financiero de la nuda propiedad actualizando la única cuota de amortización:

$$\bar{N}_6 = 1.000 \times 1{,}05^{-9} = 644{,}61 \text{ €}$$

Los valores correspondientes al empréstito son:

$$V_6^T = 60.000 \times 928{,}92 = 55.735.200 \text{ €}$$

$$U_6^T = 60.000 \times 284{,}31 = 17.058.600 \text{ €}$$

$$N_6^T = 60.000 \times 644{,}61 = 38.676.600 \text{ €}$$

EJERCICIO 21.2

Se emite un empréstito formado por 100.000 títulos de nominal 1.000 €, a amortizar sin cancelación escalonada en 20 años. El tipo de interés de los títulos es el 3% anual. Determinar los valores financieros de un título y del empréstito, al principio del año 8 y al 4% anual, en los siguientes supuestos: *a*) los títulos son de cupón cero; *b*) los títulos se amortizan de forma progresiva por el método francés.

© Ediciones Pirámide

Resolución

a) Los términos amortizativos correspondientes a un título son:

$$a'_1 = a'_2 = ... = a'_{19} = 0$$

$$a'_{20} = 1.000 \times 1{,}03^{20} = 1.806{,}11$$

Los valores financieros de un título al inicio del año 8 son:

$$\bar{V}_7 = 1.806{,}11 \times 1{,}04^{-13} = 1.084{,}70 \text{ €}$$

$$\bar{U}_7 = (1.806{,}11 - 1.000)\,1{,}04^{-13} = 484{,}13 \text{ €}$$

$$\bar{N}_7 = \bar{V}_7 - \bar{U}_7 = 600{,}57 \text{ €}$$

Los valores correspondientes del empréstito son:

$$V_7^T = 100.000 \times 1.084{,}70 = 108.470.000 \text{ €}$$

$$U_7^T = 100.000 \times 484{,}13 = 48.413.000 \text{ €}$$

$$N_7^T = 100.000 \times 600{,}57 = 60.057.000 \text{ €}$$

b) Como cada título representa un préstamo francés, el término amortizativo constante que le corresponde se obtiene de la ecuación:

$$1.000 = a' \times a_{\overline{20}|3\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 67{,}22$$

En consecuencia, el valor financiero total de un título es:

$$\bar{V}_7 = 67{,}22 \times a_{\overline{13}|4\%} = 671{,}24 \text{ €}$$

Para determinar el usufructo utilizamos la fórmula de Achard:

$$\bar{U}_7 = \frac{3\%}{4\%}(C_7 - \bar{N}_7)$$

El saldo de un título al principio del año 8 lo podemos calcular por el método prospectivo, verificándose: $C_7 = 67{,}22 \times a_{\overline{13}|3\%} = 714{,}88$. Teniendo en cuenta que $\bar{V}_7 = \bar{U}_7 - \bar{N}_7$, al sustituir el valor del usufructo por la expresión de la fórmula de Achard, tenemos:

$$671{,}24 = \frac{3\%}{4\%}(714{,}88 - \bar{N}_7) + \bar{N}_7 \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_7 = 540{,}32 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

El usufructo es: $\bar{U}_7 = \bar{V}_7 - \bar{N}_7 = 130{,}92$ €.

Los valores correspondientes al empréstito son:

$$V_7^T = 100.000 \times 671{,}24 = 67.124.000 \text{ €}$$

$$U_7^T = 100.000 \times 130{,}92 = 13.092.000 \text{ €}$$

$$N_7^T = 100.000 \times 540{,}32 = 54.032.000 \text{ €}$$

21.1.2. Empréstitos normales amortizables por sorteo

En estos empréstitos, sabemos que al principio del período $s + 1$ quedan N_{s+1} títulos vivos, los cuales se amortizarán mediante la entrega de $n - s$ términos futuros. En la hipótesis particular de que el tipo de interés del empréstito sea constante, las estructuras de los términos amortizativos del período $s + h$ para empréstitos con abono periódico de intereses y para aquellos con pago acumulado de cupones son, respectivamente, las siguientes:

$$a_{s+h} = N_{s+h} \times C \times i + M_{s+h} \times C$$

$$a_{s+h} = M_{s+h} \times C(1 + i)^{s+h}$$

Sustituyendo ambas estructuras en la expresión analítica del valor financiero del empréstito, tenemos:

$$V_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} (N_{s+h} \times C \times i + M_{s+h} \times C)(1 + t)^{-h}$$

$$V_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} [M_{s+h}\, C(1 + i)^{s+h}](1 + t)^{-h}$$

En consecuencia, situados al principio del período $s + 1$, el valor financiero del usufructo para un empréstito con abono periódico de intereses es:

$$U_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} N_{s+h} \times C \times i(1 + t)^{-h}$$

Además, en esta modalidad de empréstito podemos utilizar la fórmula de Achard analizada en los préstamos, verificándose:

$$U_s^T = \frac{i}{t}\,(N_{s+1} \times C - N_s^T)$$

© Ediciones Pirámide

Si el empréstito es de cupón cero, el usufructo viene dado por la siguiente expresión:

$$U_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} M_{s+h} \times C[(1+i)^{s+h} - 1](1+t)^{-h}$$

El valor financiero de la nuda propiedad al principio del período $s+1$, tanto para los empréstitos de cupón periódico como los de cupón acumulado, es:

$$N_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} M_{s+h} \times C(1+t)^{-h}$$

Por otra parte, como todos los títulos comportan idénticos derechos, para calcular el valor financiero de uno de ellos se divide el correspondiente valor total entre el número de títulos en circulación en el momento de valoración:

$$\bar{V}_s = \frac{V_s^T}{N_{s+1}}; \quad \bar{U}_s = \frac{U_s^T}{N_{s+1}}; \quad \bar{N}_s = \frac{N_s^T}{N_{s+1}}$$

EJERCICIO 21.3

Se emite un empréstito de 20.000 títulos de 60 € nominales para ser amortizados por sorteo en 20 años con términos amortizativos comerciales constantes y cupón anual de 3,60 €. Para un tipo de interés del 6,5% anual, hallar al principio del año 16: *a*) los valores financieros del empréstito; *b*) los valores financieros de un título.

Resolución

a) La cuantía del término amortizativo anual es:

$$20.000 \times 60 = a \times a_{\overline{20}|6\%} \quad \Rightarrow \quad a = 104.621{,}47$$

El valor financiero total del empréstito al principio del período 16 es:

$$V_{15}^T = 104.621{,}47 \times a_{\overline{5}|6{,}5\%} = 434.773{,}29 \text{ €}$$

Con el fin de aplicar la fórmula del Achard para el cálculo del usufructo, determinamos el saldo de la operación al principio del período 16, que por el método prospectivo es:

$$N_{16} \times 60 = 104.621{,}47 \times a_{\overline{5}|6\%} = 440.703{,}69$$

© Ediciones Pirámide

Dado que el valor del empréstito se compone del usufructo y de la nuda propiedad, se verifica:

$$V_{15}^{T} = \frac{i}{t}\,(N_{16} \times C - N_{15}^{T}) + N_{15}^{T}$$

$$434.773{,}29 = \frac{0{,}06}{0{,}065}\,(440.703{,}69 - N_{15}^{T}) + N_{15}^{T} \quad \Rightarrow \quad N_{15}^{T} = 363.608{,}49\ €$$

Por tanto, el usufructo es:

$$U_{15}^{T} = 434.773{,}29 - 363.608{,}49 = 71.164{,}80\ €$$

b) Hemos calculado anteriormente el importe del empréstito vivo al inicio del año 16, verificándose: $N_{16} \times 60 = 440.703{,}69$. Por tanto: $N_{16} = 7.345{,}06$.

De acuerdo con lo expuesto, los valores financieros correspondientes a un título vivo al principio del año 16 son:

$$\bar{V}_{15} = \frac{V_{15}^{T}}{N_{16}} = \frac{434.773{,}29}{7.345{,}06} = 59{,}19\ €$$

$$\bar{U}_{15} = \frac{U_{15}^{T}}{N_{16}} = \frac{71.164{,}80}{7.345{,}06} = 9{,}69\ €$$

$$\bar{N}_{15} = \frac{N_{15}^{T}}{N_{16}} = \frac{363.608{,}49}{7.345{,}06} = 49{,}50\ €$$

EJERCICIO 21.4

Un empréstito de 15.000 títulos de 50 € nominales se emite para ser amortizado mediante sorteo en 15 años, con términos amortizativos comerciales de cuantía *a* durante los diez primeros años y de cuantía *2a* en los cinco últimos, y con cupón acumulado del 4% anual. Al principio del año 11 se decide valorar el empréstito a un tipo de interés del 5% anual. Hallar el valor financiero, el usufructo y la nuda propiedad del empréstito y de un título.

Resolución

En primer lugar hallamos las cuantías de los términos amortizativos partiendo de la ecuación de equivalencia financiera de la operación en el origen:

$$15.000 \times 50 = a \times a_{\overline{10}|4\%} + 2a \times a_{\overline{5}|4\%} \times 1{,}04^{-10} \quad \Rightarrow \quad a = 53.094{,}04$$

$$2a = 106.188{,}08$$

© Ediciones Pirámide

El valor financiero total del empréstito al principio del año 11 es:

$$V_{10}^{T} = 106.188{,}08 \times a_{\overline{5}|5\%} = 459.738{,}82 \text{ €}$$

Para determinar el valor financiero de la nuda propiedad hemos de hallar el valor actualizado de las cuotas de amortización futuras, por lo que es preciso conocer el número de títulos que se amortizan en cada período futuro. Ahora bien, sabemos que en esta modalidad de empréstitos con cupón acumulado, en los períodos en los que tanto el término amortizativo como el tipo de interés son constantes, se verifica la siguiente relación: $M_s = M_{s-1}(1 + i)^{-1}$. En consecuencia, su valor actual es el de una renta de términos variables en progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$, y de primer término $M_{11} \times C$.

El número teórico de títulos que se amortizan en el año 11 lo deducimos de la estructura del término amortizativo de dicho período, verificándose en consecuencia:

$$a_{11} = 106.188{,}08 = M_{11} \times 50 \times 1{,}04^{11} \quad \Rightarrow \quad M_{11} = 1.379{,}56$$

Por tanto, la nuda propiedad total es:

$$N_{10}^{T} = 1.379{,}56 \times 50 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}04} \right)^{5} 1{,}05^{-5}}{1{,}05 - 1{,}04^{-1}} \right] = 277.590{,}38 \text{ €}$$

El valor total del usufructo se obtiene al detraer del valor financiero del empréstito el valor de la nuda propiedad:

$$U_{10}^{T} = 459.738{,}82 - 277.590{,}38 = 182.148{,}44 \text{ €}$$

Una vez calculados los valores totales podemos determinar los correspondientes para un título vivo al principio del período 11. Para ello determinamos, a través del saldo por el método prospectivo, el número teórico de títulos vivos en el momento de la valoración:

$$N_{11} \times 50 \times 1{,}04^{10} = 106.188{,}08 \times a_{\overline{5}|4\%} = 472.730{,}47 \quad \Rightarrow \quad N_{11} = 6.387{,}20$$

© Ediciones Pirámide

En consecuencia, los valores financieros al principio del período 11 para un título son:

$$\bar{V}_{10} = \frac{459.738,82}{6.387,20} = 71,98 \text{ €}$$

$$\bar{N}_{10} = \frac{277.590,38}{6.387,20} = 43,46 \text{ €}$$

$$\bar{U}_{10} = \frac{182.148,44}{6.387,20} = 28,52 \text{ €}$$

21.2. VALOR FINANCIERO DE UN EMPRÉSTITO CON CARACTERÍSTICAS COMERCIALES

Sabemos que las características comerciales pueden ser bilaterales, afectando a ambos sujetos del empréstito, emisor y conjunto de obligacionistas; y unilaterales, cuando afectan sólo a uno de ellos, siendo la más destacada la existencia de gastos periódicos sobre las cuantías entregadas o recibidas. Por ello, a efectos de la valoración de un empréstito, es posible diferenciar entre términos amortizativos bilaterales y términos amortizativos unilaterales.

Los términos amortizativos bilaterales representan las cuantías comunes que se intercambian ambos sujetos, mientras que los términos amortizativos unilaterales corresponden a las cuantías de cada sujeto. Por tanto, en la valoración de los compromisos y derechos futuros totales y en su desagregación distinguimos entre los **valores financieros bilaterales** y los **valores financieros unilaterales.**

Los valores bilaterales son idénticos para ambos sujetos y representan el valor financiero correspondiente de los términos amortizativos bilaterales pendientes de vencimiento, es decir, de aquellos importes que serán desembolsados por el emisor y percibidos por el conjunto de los obligacionistas o, lo que es lo mismo, los intereses, las cuotas de amortización y las características comerciales bilaterales.

Los valores unilaterales para el emisor, y los correspondientes para el conjunto de los obligacionistas, representan el valor financiero de los términos amortizativos unilaterales respectivos, por lo que incluyen la valoración financiera tanto de las cuantías bilaterales pendientes como de las que afectan exclusivamente a cada sujeto.

Sabemos que, en general, y en cualquier modalidad de empréstito, el término amortizativo comercial unilateral que debe abonar el emisor en el período $s + h$ tiene la siguiente estructura: $a_{s+h} = (I_{s+h} + A_{s+h} + T_{s+h})(1 + g_1)$, representando T_{s+h}

© Ediciones Pirámide

el conjunto de características comerciales bilaterales correspondientes al período señalado. Partiendo de la citada estructura, vamos a efectuar las valoraciones.

a*) *Valores bilaterales

Hemos de valorar exclusivamente las cuantías que desembolsará el emisor y percibirá íntegramente el conjunto de los obligacionistas, es decir, los términos amortizativos bilaterales. Teniendo en cuenta la estructura del término amortizativo, tales cuantías para cualquier período $s + h$ verifican:

$$a_{b,s+h} = \frac{a_{s+h}}{1 + g_1} = I_{s+h} + A_{s+h} + T_{s+h}$$

El término amortizativo $a_{b,s+h} = I_{s+h} + A_{s+h} + T_{s+h}$ recoge exclusivamente las cuantías bilaterales de ambos sujetos. Por tanto, para cualquiera de ellos, al inicio del período $s + 1$, el valor financiero total, el del usufructo, el de la nuda propiedad y el de las características comerciales bilaterales es, respectivamente:

$$V_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} a_{b,s+h}(1 + t)^{-h}$$

$$U_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} I_{s+h}(1 + t)^{-h}$$

$$N_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}(1 + t)^{-h}$$

$$Z_s^T = \sum_{h=1}^{n-s} T_{s+h}(1 + t)^{-h}$$

En consecuencia: $V_s^T = U_s^T + N_s^T + Z_s^T$.

Dividiendo los valores anteriores entre el número de títulos vivos al inicio del citado período, obtenemos los correspondientes valores de un título.

b*) *Valores unilaterales

Es preciso valorar los términos amortizativos unilaterales de cada sujeto; es decir, por una parte las cuantías futuras totales que desembolsará el emisor, incluyendo los gastos a su cargo, y por otra las correspondientes cuantías netas que percibirán los obligacionistas una vez detraídos los gastos a su cargo.

© Ediciones Pirámide

b*.1) *Valores para el emisor

De acuerdo con lo expuesto, los términos amortizativos unilaterales, a_{s+h}, que ha de desembolsar el emisor, verifican la siguiente relación con los términos bilaterales: $a_{s+h} = a_{b,s+h}(1 + g_1)$. En consecuencia, cualquier valor financiero del empréstito para el emisor se obtiene multiplicando el correspondiente valor bilateral por el factor $(1 + g_1)$, verificándose:

$$V_{p,s}^{T} = V_{s}^{T}(1 + g_1)$$

$$U_{p,s}^{T} = U_{s}^{T}(1 + g_1)$$

$$N_{p,s}^{T} = N_{s}^{T}(1 + g_1)$$

$$Z_{p,s}^{T} = Z_{s}^{T}(1 + g_1)$$

Al dividir los valores anteriores entre el número de títulos vivos al inicio del citado período, obtenemos los correspondientes valores de un título.

b*.2) *Valores para el conjunto de los obligacionistas

Sabemos que del término amortizativo periódico total que desembolsará el emisor, $a_{s+h} = (I_{s+h} + A_{s+h} + T_{s+h})(1 + g_1)$, los obligacionistas sólo percibirán la suma: $I_{s+h} + A_{s+h} + T_{s+h} = \dfrac{a_{s+h}}{1 + g_1}$. Además, si soportasen unos gastos periódicos g_2 sobre todas las cuantías que percibiesen, los términos amortizativos unilaterales netos a recibir serán:

$$a_{a,s+h} = \frac{a_{s+h}}{1 + g_1}(1 - g_2) = a_{b,s+h}(1 - g_2)$$

En consecuencia, cualquier valor financiero del empréstito para el conjunto de los obligacionistas, o valor financiero neto, se obtiene multiplicando el correspondiente valor bilateral por el factor $(1 - g_2)$, verificándose:

$$V_{a,s}^{T} = V_{s}^{T}(1 - g_2)$$

$$U_{a,s}^{T} = U_{s}^{T}(1 - g_2)$$

$$N_{a,s}^{T} = N_{s}^{T}(1 - g_2)$$

$$Z_{a,s}^{T} = Z_{s}^{T}(1 - g_2)$$

© Ediciones Pirámide

De igual forma a lo señalado, si dividimos los valores anteriores entre el número de títulos vivos al inicio del citado período obtenemos los correspondientes valores de un título.

EJERCICIO 21.5

Determinada empresa emite un empréstito de 100.000 títulos a amortizar sin cancelación escalonada en 20 años. Los títulos son de nominal 1.000 €, perciben un cupón anual del 2% y una prima de amortización de 100 €. El emisor soporta unos gastos sobre todas las cuantías que satisface del 0,25% de las mismas, y los obligacionistas un 0,20% sobre todas las cuantías que perciben. Determinar los valores financieros del empréstito y de un título al inicio del año 12 para un tipo de interés del 3% anual.

Resolución

Los términos amortizativos que abona el emisor son:

$$a_1 = a_2 = ... = a_{19} = N_1 \times C \times i(1 + g_1) = 100.000 \times 1.000 \times 0{,}02 \times 1{,}0025 =$$

$$= 2.005.000$$

$$a_{20} = [N_1 \times C \times i + N_1(\mathrm{C} + P)](1 + g_1) =$$

$$= [100.000 \times 1.000 \times 0{,}02 + 100.000\,(1.000 + 100)]\,1{,}0025 = 112.280.000$$

a) Valores bilaterales. Los términos amortizativos bilaterales son:

$$a_{b,1} = a_{b,2} = ... = a_{b,19} = \frac{2.005.000}{1{,}0025} = 2.000.000$$

$$a_{b,20} = \frac{112.280.000}{1{,}0025} = 112.000.000$$

En consecuencia, el valor financiero total del empréstito, para cualquiera de los sujetos, es:

$$V_{11}^{T} = 2.000.000 \times a_{\overline{8}|3\%} + 112.000.000 \times 1{,}03^{-9} = 99.878.058{,}40\ €$$

© Ediciones Pirámide

El valor financiero del usufructo es:

$$U_{11}^{T} = 100.000 \times 1.000 \times 0{,}02 \times a_{\overline{9}|3\%} = 2.000.000 \times a_{\overline{9}|3\%} = 15.572.217{,}84 \text{ €}$$

La prima de amortización total es $N_1 \times P = 100.000 \times 100 = 10.000.000$. Por tanto, el valor financiero de las características comerciales bilaterales es:

$$Z_{11}^{T} = 10.000.000 \times 1{,}03^{-9} = 7.664.167{,}32 \text{ €}$$

En consecuencia, el valor financiero de la nuda propiedad es:

$$N_{11}^{T} = V_{11}^{T} - U_{11}^{T} - Z_{11}^{T} = 76.641.673{,}24 \text{ €}$$

También se verifica: $N_{11}^{T} = 100.000 \times 1.000 \times 1{,}03^{-9} = 76.641.673{,}23$ €.

Teniendo en cuenta que todos los títulos están vivos en el momento de la valoración, los valores de un título son:

$$\bar{V}_{11} = \frac{99.878.058{,}40}{100.000} = 998{,}78 \text{ €}$$

$$\bar{U}_{11} = \frac{15.572.217{,}84}{100.000} = 155{,}72 \text{ €}$$

$$\bar{N}_{11} = \frac{76.641.673{,}24}{100.000} = 766{,}42 \text{ €}$$

$$\bar{Z}_{11} = \frac{7.664.167{,}32}{100.000} = 76{,}64 \text{ €}$$

b) Valores unilaterales para el emisor. De acuerdo con lo expuesto, los valores para el emisor se obtienen multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 + g_1) = 1{,}0025$, llegándose a:

$$V_{p,11}^{T} = 100.127.753{,}50 \text{ €}$$

$$U_{p,11}^{T} = 15.611.148{,}38 \text{ €}$$

$$N_{p,11}^{T} = 76.833.277{,}42 \text{ €}$$

$$Z_{p,11}^{T} = 7.683.327{,}74 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

Al dividir los valores anteriores entre el número de títulos vivos en el momento de la valoración, 100.000, se obtienen los correspondientes valores de un título para el emisor:

$$\bar{V}_{p,11} = 1.001{,}28\ €; \quad \bar{U}_{p,11} = 156{,}11\ €; \quad \bar{N}_{p,11} = 768{,}33\ €; \quad \bar{Z}_{p,11} = 76{,}83\ €$$

c) Valores unilaterales para el conjunto de los obligacionistas. De acuerdo con lo expuesto, los valores para el conjunto de los obligacionistas se obtienen multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 - g_2) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$, llegándose a los siguientes resultados:

$$V^T_{a,11} = 99.678.302{,}28\ €$$

$$U^T_{a,11} = 15.541.073{,}40\ €$$

$$N^T_{a,11} = 76.488.389{,}89\ €$$

$$Z^T_{a,11} = 7.648.838{,}99\ €$$

Dividiendo los valores anteriores entre el número de títulos vivos en el momento de la valoración se obtienen los correspondientes valores netos de un título para el conjunto de los obligacionistas:

$$\bar{V}_{a,11} = 996{,}78\ €; \quad \bar{U}_{a,11} = 155{,}41\ €; \quad \bar{N}_{a,11} = 764{,}88\ €; \quad \bar{Z}_{a,11} = 76{,}49\ €$$

EJERCICIO 21.6

Cierto empréstito está formado por 80.000 títulos de nominal 1.000 €, emitidos a 990 €, para ser amortizados por sorteo en 20 años con cupón periódico del 4% anual y términos amortizativos anuales constantes. Anualmente se reparte un lote de 10.000 € entre los cien primeros títulos amortizados en el respectivo sorteo, los cuales, en lugar del nominal, cobran el valor de emisión. El emisor soporta unos gastos anuales del 0,1% sobre todas las cuantías que satisface. Los obligacionistas tienen unos gastos periódicos del 0,2% de todas las cuantías que perciben. Efectuar al 5% anual la valoración del empréstito y la de un título al principio del año 7.

Resolución

La estructura del término amortizativo comercial que abona el emisor es:

$$a_s = a = [N_s \times C \times i + M_s \times C + L - 100(C - V)](1 + g_1)$$

© Ediciones Pirámide

Al normalizar llegamos a un empréstito normalizado tipo I con las siguientes fórmulas de conversión:

$$a' = \frac{a}{1 + g_1} - L + 100(C - V); \quad i' = i$$

En consecuencia, se verifica:

$$80.000 \times 1.000 = a' \times a_{\overline{20}|4\%}$$

$$a' = 5.886.540{,}03; \quad a = 5.901.435{,}57$$

Como vamos a valorar al inicio del año 7, calculamos el número teórico de títulos vivos en dicho momento, verificándose:

$$N_7 \times 1.000 = a' \times a_{\overline{14}|4\%} \quad \Rightarrow \quad N_7 \times 1.000 = 62.180.245{,}97; \quad N_7 = 62.180{,}25$$

a) Valores bilaterales. Los términos amortizativos bilaterales son:

$$a_b = \frac{a}{1 + g_1} = \frac{5.901.435{,}57}{1{,}001} = 5.895.540{,}03$$

Por tanto, el valor total del empréstito es:

$$V_6^T = 5.895.540{,}03 \times a_{\overline{14}|5\%} = 58.357.833{,}90 \text{ €}$$

El valor financiero de las características comerciales bilaterales es:

$$Z_6^T = [L - 100(C - V)]\, a_{\overline{14}|5\%} = 89.087{,}77 \text{ €}$$

Aplicando la fórmula de Achard, se verifica:

$$U_6^T = \frac{i}{t}(N_7 \times C - N_6^T) = \frac{4\%}{5\%}(62.180.245{,}97 - N_6^T)$$

Y por tanto, en la ecuación del valor total tenemos:

$$V_6^T = U_6^T + N_6^T + Z_6^T$$

$$58.357.833{,}90 = \frac{4\%}{5\%}(62.180.245{,}97 - N_6^T) + N_6^T + 89.087{,}77$$

Al realizar operaciones, obtenemos:

$$N_6^T = 42.622.746{,}77 \text{ €}; \quad U_6^T = 15.645.999{,}36 \text{ €}.$$

© Ediciones Pirámide

Sabiendo que al inicio del año 7 el número teórico de títulos en circulación es 62.180,25, los valores correspondientes a un título son:

$$\bar{V}_6 = \frac{58.357.833,90}{62.180,25} = 938,53\ €$$

$$\bar{U}_6 = \frac{15.645.999,36}{62.180,25} = 251,62\ €$$

$$\bar{N}_6 = \frac{42.622.746,77}{62.180,25} = 685,47\ €$$

$$\bar{Z}_6 = \frac{89.087,77}{62.180,25} = 1,43\ €$$

b) Valores unilaterales para el emisor. De acuerdo con lo expuesto, los valores para el emisor se obtienen multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 + g_1) = 1,001$, obteniéndose los siguientes resultados:

$$V_{p,6}^{T} = 58.416.191,73\ €$$

$$U_{p,6}^{T} = 15.661.645,36\ €$$

$$N_{p,6}^{T} = 42.665.369,52\ €$$

$$Z_{p,6}^{T} = 89.176,86\ €$$

Al dividir los valores anteriores entre el número teórico de títulos vivos en el momento de la valoración, 62.180,25, se obtienen los correspondientes valores de un título para el emisor:

$$\bar{V}_{p,6} = 939,47\ €; \quad \bar{U}_{p,6} = 251,87\ €; \quad \bar{N}_{p,6} = 686,16\ €; \quad \bar{Z}_{p,6} = 1,43\ €$$

c) Valores unilaterales para el conjunto de los obligacionistas. De acuerdo con lo expuesto, los valores para el conjunto de los obligacionistas se obtienen multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 - g_2) = 1 - 0,002 = 0,998$, llegándose a los siguientes resultados:

$$V_{a,6}^{T} = 58.241.118,23\ €$$

$$U_{a,6}^{T} = 15.614.707,36\ €$$

$$N_{a,6}^{T} = 42.537.501,28\ €$$

$$Z_{a,6}^{T} = 88.909,59\ €$$

© Ediciones Pirámide

Dividiendo los valores anteriores entre el número teórico de títulos vivos en el momento de la valoración, 62.180,25, se obtienen los correspondientes valores netos de un título para el conjunto de los obligacionistas:

$$\bar{V}_{a,6} = 936{,}65\ €; \quad \bar{U}_{a,6} = 251{,}12\ €; \quad \bar{N}_{a,6} = 684{,}10\ €; \quad \bar{Z}_{a,6} = 1{,}43\ €$$

EJERCICIO 21.7

Se emite un empréstito de 50.000 títulos de nominal 40 €, para ser amortizados por sorteo en 20 años con términos amortizativos comerciales anuales constantes. La prima de amortización es de 10 € por título y el cupón anual del 4%. Además, se reparte un lote anual de 20.000 € entre los diez primeros títulos que resulten amortizados en cada año, los cuales pierden el último cupón. Existen gastos periódicos a cargo del emisor del 0,1% sobre todas las cantidades entregadas, y a cargo de los obligacionistas del 0,15% sobre todas las cantidades recibidas. Hallar al principio del año 16 y para un 6% anual los valores financieros del empréstito para el emisor y para el conjunto de los obligacionistas, así como los correspondientes a un título.

Resolución

Para la valoración de este empréstito es necesario conocer la cuantía del término amortizativo comercial. Para ello partimos de la estructura de dicho término:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L - 10 \times C \times i](1 + g_1)$$

Normalizando:

$$\left[\frac{a}{(1 + g_1)} - L + 10 \times C \times i\right]\frac{C}{C + P} = N_s \times C\,\frac{C \times i}{C + P} + M_s \times C$$

El primer miembro de la expresión anterior se corresponde con el término amortizativo normalizado de un empréstito tipo I, siendo $i' = \dfrac{C \times i}{C + P} = \dfrac{1{,}6}{50} =$ $= 0{,}032$.

El término amortizativo normalizado lo obtenemos de la ecuación de equivalencia en el origen de la operación:

$$50.000 \times 40 = a' \times a_{\overline{20}|0{,}032} \quad \Rightarrow \quad a' = 136.929{,}44$$

© Ediciones Pirámide

El término amortizativo comercial se obtiene de la relación entre éste y el término normalizado:

$$a' = \left[\frac{a}{1{,}001} - 20.000 + 10 \times 1{,}6\right]\frac{40}{40+10} = 136.929{,}44 \quad \Rightarrow \quad a = 191.336{,}95$$

Como vamos a efectuar la valoración al inicio del año 16, calculamos el número teórico de títulos vivos en dicho momento, verificándose:

$$N_{16} \times 40 = 136.929{,}44 \times a_{\overline{5}|0{,}032} = 623.531{,}71 \quad \Rightarrow \quad N_{16} = 15.588{,}29$$

a) Valores bilaterales. Los términos amortizativos bilaterales son:

$$a_b = \frac{a}{1+g_1} = \frac{191.336{,}95}{1{,}001} = 191.145{,}80$$

Por tanto, el valor total del empréstito es:

$$V_{15}^{T} = 191.145{,}80 \times a_{\overline{5}|6\%} = 805.175{,}65 \text{ €}$$

El valor de la nuda propiedad se obtiene actualizando las cuotas de amortización pendientes de vencimiento, siendo la primera de ellas $M_{16} \times C$. Sabiendo que en el caso de los empréstitos normalizados tipo I, los títulos amortizados en cada año varían en progresión geométrica de razón $(1 + i')$, calculamos el número teórico de títulos a amortizar en el período 16:

$$M_{16} = M_1(1+i')^{15} \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i'}} = \frac{50.000}{s_{\overline{20}|0{,}032}} = 1.823{,}24 \quad \Rightarrow \quad M_{16} = 2.924{,}42$$

De acuerdo con lo expuesto, el valor de la nuda propiedad es el valor al inicio del año 16 de una renta variable en progresión geométrica de 5 términos valorada al 6% anual:

$$N_{15}^{T} = 2.924{,}42 \times 40\,\frac{1 - 1{,}032^5 \times 1{,}06^{-5}}{1{,}06 - 1{,}032} = 523.386{,}75 \text{ €}$$

Podemos calcular el usufructo a través de la fórmula de Achard, verificándose:

$$U_{15}^{T} = \frac{i}{t}\,(N_{16} \times C - N_{15}^{T}) = \frac{4\%}{6\%}\,(623.531{,}71 - 523.386{,}75) = 66.763{,}31 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

En consecuencia, de la expresión del valor financiero total podemos obtener el valor financiero de las características comerciales:

$$V_{15}^{T} = U_{15}^{T} + N_{15}^{T} + Z_{15}^{T}$$

$$Z_{15}^{T} = 805.175{,}65 - 66.763{,}31 - 523.386{,}75 = 215.025{,}59\ €$$

También podemos determinar el valor financiero de las características comerciales a través de los razonamientos que se exponen en los párrafos siguientes.

De acuerdo con la estructura del término amortizativo comercial, las características comerciales bilaterales de cualquier período futuro son:

$$T_{15+h} = M_{15+h} \times P + L - 10 \times C \times i$$

El valor financiero al principio del año 16 de tales características verifica:

$$Z_{15}^{T} = \sum_{h=1}^{5} (M_{15+h} \times P + L - 10 \times C \times i)\, 1{,}06^{-h} =$$

$$= \sum_{h=1}^{5} M_{15+h} \times P \times 1{,}06^{-h} + \sum_{h=1}^{5} (L - 10 \times C \times i)\, 1{,}06^{-h}$$

Si en el primer sumando de la última expresión anterior extraemos P fuera del sumatorio y multiplicamos y dividimos por el nominal C, queda:

$$Z_{15}^{T} = \frac{P}{C} \sum_{h=1}^{5} M_{15+h} \times C \times 1{,}06^{-h} + (L - 10 \times C \times i)\, a_{\overline{5}|6\%}$$

Ahora bien, la expresión $\sum_{h=1}^{5} M_{15+h} \times C \times 1{,}06^{-h}$ es la del valor financiero de la nuda propiedad. Por tanto, al sustituir todos los valores conocidos, tenemos:

$$Z_{15}^{T} = \frac{P}{C} N_{15}^{T} + (20.000 - 10 \times 40 \times 0{,}04)\, a_{\overline{5}|6\%} =$$

$$= \frac{10}{40} 523.386{,}75 + 19.984 \times a_{\overline{5}|6\%} = 215.026{,}57\ €$$

Como puede observarse, la pérdida de cupón de los títulos que perciben lote la hemos incluido entre las características comerciales bilaterales, y no como un menor valor del usufructo.

© Ediciones Pirámide

Al dividir los valores totales anteriores entre el número teórico de títulos vivos al inicio del año 16, 15.588,29, obtenemos los valores de un título:

$$\bar{V}_{15} = 51{,}65\ €; \quad \bar{U}_{15} = 4{,}28\ €; \quad \bar{N}_{15} = 33{,}58\ €; \quad \bar{Z}_{15} = 13{,}79\ €$$

b) Valores unilaterales para el emisor. De acuerdo con lo expuesto, los valores para el emisor se calculan multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 + g_1) = 1{,}001$, obteniéndose los siguientes resultados:

$$V^{T}_{p,15} = 805.980{,}83\ €$$

$$U^{T}_{p,15} = 66.830{,}07\ €$$

$$N^{T}_{p,15} = 523.910{,}14\ €$$

$$Z^{T}_{p,15} = 215.240{,}62\ €$$

Al dividir los valores anteriores entre el número teórico de títulos vivos en el momento de la valoración, 15.588,29, se obtienen los correspondientes valores de un título para el emisor:

$$\bar{V}_{p,15} = 51{,}70\ €; \quad \bar{U}_{p,15} = 4{,}29\ €; \quad \bar{N}_{p,15} = 33{,}61\ €; \quad \bar{Z}_{p,15} = 13{,}81\ €$$

c) Valores unilaterales para el conjunto de los obligacionistas. De acuerdo con lo expuesto, los valores para el conjunto de los obligacionistas se obtienen multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 - g_2) = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$, llegándose a:

$$V^{T}_{a,15} = 803.967{,}89\ €$$

$$U^{T}_{a,15} = 66.663{,}17\ €$$

$$N^{T}_{a,15} = 522.601{,}67\ €$$

$$Z^{T}_{a,15} = 214.703{,}05\ €$$

Dividiendo los valores anteriores entre el número de títulos en circulación al inicio del año 16 se obtienen los valores financieros correspondientes a un título:

$$\bar{V}_{a,15} = 51{,}58\ €; \quad \bar{U}_{a,15} = 4{,}28\ €; \quad \bar{N}_{a,15} = 33{,}53\ €; \quad \bar{Z}_{a,15} = 13{,}77\ €$$

© Ediciones Pirámide

21.3. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se emiten 12.000 títulos de cupón cero para ser amortizados por sorteo en 12 años. El nominal de cada título es de 30 €, amortizándose anualmente la misma cantidad de títulos. El tipo de interés de la operación es el 5% anual. Si al principio del noveno período se valora el empréstito al 5,5% anual, calcular el valor financiero de dicho empréstito, el del usufructo y el de la nuda propiedad.

Resolución

El término amortizativo del período s tiene la siguiente estructura:

$$a_s = M \times C(1 + i)^s$$

Sabemos que el número de títulos amortizados cada año es constante, pero no conocemos la ley de variación de los términos amortizativos. La misma se obtiene de la relación entre las estructuras de los términos amortizativos de dos períodos consecutivos, s y $s + 1$:

$$a_s = M \times C(1 + i)^s$$

$$a_{s+1} = M \times C(1 + i)^{s+1}$$

Dividiendo miembro a miembro, resulta:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{M \times C(1 + i)^{s+1}}{M \times C(1 + \mathrm{i})^s} \quad \Rightarrow \quad a_{s+1} = a_s(1 + i)$$

Por tanto, los términos amortizativos varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

Para hallar el valor financiero del empréstito al principio del noveno período, necesitamos conocer la cuantía del primer término amortizativo. Ésta se obtiene de la equivalencia financiera en el origen entre prestación y contraprestación.

$$N_1 \times C = \sum_{s=1}^{n} a_s(1 + i)^{-s} = A_{(a_1, q=1+i)\overline{n}|i}$$

Al actualizar la contraprestación nos encontramos con un caso particular de valoración de rentas, en el que la razón coincide con $(1 + i)$. Recordemos que en este tipo de rentas, el valor actual se obtiene según la expresión:

$$A_{(a_1, q=1+i)\overline{n}|i} = a_1 \times n(1 + i)^{-1}$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, la ecuación de equivalencia en el origen es:

$$N_1 \times C = a_1 \times n(1+i)^{-1} \quad \Rightarrow \quad 12.000 \times 30 = a_1 \times 12(1+0{,}05)^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 31.500$$

Al variar los términos amortizativos en progresión geométrica, se verifica:

$$a_9 = a_1(1+i)^8 = 31.500 \times 1{,}05^8 = 46.539{,}85$$

Por tanto, el valor financiero del empréstito al principio del noveno período es el valor actualizado de los términos amortizativos futuros, variables en progresión geométrica de razón 1,05 y valorados a un tipo del 5,5% anual:

$$V_8^T = 46.539{,}85 \frac{1 - 1{,}05^4 \times 1{,}055^{-4}}{1{,}055 - 1{,}05} = 175.203{,}95 \text{ €}$$

En cuanto a la nuda propiedad, considerando que anualmente se amortizan 1.000 títulos, se verifica:

$$N_8^T = 1.000 \times 30 \times a_{\overline{4}|5{,}5\%} = 105.154{,}50 \text{ €}$$

Para finalizar, hallamos el valor del usufructo mediante la diferencia entre el valor total y el de la nuda propiedad:

$$U_8^T = 175.203{,}95 - 105.154{,}50 = 70.049{,}45 \text{ €}$$

2. Se emite un empréstito de 120.000 títulos de nominal 30 €, para ser amortizado por sorteo con términos amortizativos anuales constantes y con cupón anual del 4%. El empréstito tiene una duración de 25 años. La prima de amortización es de 10 €. Anualmente se reparte un lote de 2.000 € entre los primeros 20 títulos que resultan amortizados. El emisor paga unos gastos periódicos del 0,1% sobre las cuantías entregadas y los obligacionistas el 0,2% sobre las cuantías recibidas. Hallar el valor financiero total neto y el de sus componentes para una obligación al principio del período 16, valorando al 5% anual.

Resolución

Dado que el empréstito tiene características comerciales, procedemos a su normalización partiendo de la estructura del término amortizativo del período *s*:

$$a = [N_s \times C \times i + M_s(C + P) + L](1 + g_1)$$

© Ediciones Pirámide

Una vez normalizado, nos queda la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{a}{1+g_1} - L\right)\frac{C}{C+P} = N_s \times C\,\frac{C \times i}{C+P} + M_s \times C$$

Haciendo el siguiente cambio de variables, tenemos un empréstito normalizado tipo I:

$$i' = \frac{C \times i}{C+P} = \frac{30 \times 0{,}04}{30+10} = 0{,}03$$

$$a' = \left(\frac{a}{1+g_1} - L\right)\frac{C}{C+P} = \left(\frac{a}{1{,}001} - 2.000\right)\frac{30}{40}$$

Hallamos el término amortizativo normalizado a través de la ecuación de equivalencia:

$$N_1 \times C = a' \times a_{\overline{n}|i'} \quad \Rightarrow \quad 120.000 \times 30 = a' \times a_{\overline{25}|3\%} \quad \Rightarrow \quad a' = 206.740{,}34$$

En consecuencia, el término amortizativo comercial es: $a = 277.931{,}44$.

Para determinar los valores financieros netos pedidos de una obligación al inicio del año 16, calculamos el número de títulos vivos y los valores bilaterales. Después podemos hallar los valores unilaterales correspondientes al conjunto de los obligacionistas, y finalmente los valores por título.

El número teórico de títulos vivos al comienzo del año 16 se obtiene de la ecuación:

$$N_{16} \times C = a' \times a_{\overline{n-s}|i'} \quad \Rightarrow \quad N_{16} \times 30 = 206.740{,}34 \times a_{\overline{10}|3\%} = 1.763.537{,}04 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_{16} = 58.784{,}57$$

La cuantía constante de los términos bilaterales es:

$$a_b = \frac{a}{1+g_1} = \frac{277.931{,}44}{1{,}001} = 277.653{,}79$$

Por tanto, el valor total del empréstito es:

$$V_{15}^{T} = 277.653{,}79 \times a_{\overline{10}|5\%} = 2.143.968{,}97$$

Sabemos que el valor total del empréstito verifica:

$$V_{15}^{T} = U_{15}^{T} + N_{15}^{T} + Z_{15}^{T}$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, si determinamos el valor de Z_{15}^{T} y el de N_{15}^{T} podremos, sustituyéndolos en dicha ecuación, calcular el de U_{15}^{T}.

Como en este empréstito las únicas características comerciales bilaterales son la prima de amortización y el lote, la suma de sus correspondientes valores futuros actualizados nos da el valor financiero total de las características comerciales bilaterales:

$$Z_{15}^{T} = P_{15}^{T} + L_{15}^{T}$$

Recordemos que, tal y como hemos demostrado, el valor actualizado de las primas de amortización pendientes de pago verifica la siguiente relación con el valor financiero de la nuda propiedad:

$$P_{15}^{T} = \frac{P}{C} N_{15}^{T} = \frac{10}{30} N_{15}^{T}$$

Como el importe del lote es constante, se verifica:

$$L_{15}^{T} = 2.000 \times a_{\overline{10}|5\%} = 15.443,47$$

En consecuencia:

$$Z_{15}^{T} = \frac{10}{30} N_{15}^{T} + 15.443,47$$

Podemos expresar el usufructo por la fórmula de Achard:

$$U_{15}^{T} = \frac{0,04}{0,05} (N_{16} \times C - N_{15}^{T}) = \frac{0,04}{0,05} (1.763.537,04 - N_{15}^{T})$$

Sustituyendo en la ecuación del valor total, tenemos:

$$V_{15}^{T} = 2.143.968,97 = \frac{0,04}{0,05} (1.763.537,04 - N_{15}^{T}) + N_{15}^{T} + \frac{10}{30} N_{15}^{T} + 15.443,47$$

Al realizar operaciones, obtenemos: $N_{15}^{T} = 1.345.679,75$. En consecuencia:

$$U_{15}^{T} = 334.285,83$$

$$Z_{15}^{T} = 464.003,39$$

© Ediciones Pirámide

De acuerdo con lo expuesto, los valores netos para el conjunto de los obligacionistas se obtienen multiplicando los correspondientes valores bilaterales por el factor $(1 - g_2) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$, obteniéndose los siguientes resultados:

$$V^T_{a,\,15} = 2.139.681{,}03$$

$$U^T_{a,\,15} = 333.617{,}26$$

$$N^T_{a,\,15} = 1.342.988{,}39$$

$$Z^T_{a,\,15} = 463.075{,}38$$

Dividiendo los valores anteriores entre el número teórico de títulos vivos en el momento de la valoración, 58.784,57, se obtienen los correspondientes valores netos de un título para el conjunto de los obligacionistas:

$$\bar{V}_{a,\,15} = 36{,}40\ €; \quad \bar{U}_{a,\,15} = 5{,}68\ €; \quad \bar{N}_{a,\,15} = 22{,}85\ €; \quad \bar{Z}_{a,\,15} = 7{,}88\ €$$

3. Se emite un empréstito integrado por 30.000 obligaciones de 1.000 € de nominal a amortizar por sorteo con cupón acumulado del 10% anual. La duración del empréstito es 10 años, y en cada período se desea amortizar el mismo número de títulos. Además, cada año se reparte un lote de 200.000 € entre los diez primeros títulos amortizados. Cada título recibe una prima de amortización de 500 €. Los títulos premiados con lote cobrarán única y exclusivamente la cuantía que por tal concepto les corresponda. Suponiendo un tipo de valoración del 12%, determinar el valor de un título para un obligacionista al principio del año 10.

Resolución

Para calcular el valor financiero del empréstito al principio del año 10 necesitamos conocer la cuantía del término amortizativo comercial de dicho año, cuya estructura es:

$$a_{10} = M \times C(1 + i)^{10} + L + M \times P - 10[C(1 + i)^{10} + P]$$

Como en cada año se amortizan 3.000 títulos, la cuantía del término amortizativo del año 10 es 9.450.289,96 €.

El valor financiero del empréstito al principio del período 10 es:

$$V^T_9 = 9.450.289{,}96 \times 1{,}12^{-1} = 8.437.758{,}89$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta que al principio del año 10 quedan vivos 3.000 títulos, el valor de uno es:

$$\bar{V}_9 = \frac{8.437.758,89}{3.000} = 2.812,59 \text{ €}$$

4. Un empréstito de 35.000 títulos de 60 € nominales se emite para ser amortizado mediante sorteo en 35 años con términos amortizativos comerciales constantes y cupón acumulado del 3,5% anual. Anualmente se reparte un lote de 15.000 € entre los 25 primeros títulos amortizados en cada año. Para un título vivo al principio del año 28, y con tipo de interés del 4% anual, determinar el valor financiero total, el del usufructo, el de la nuda propiedad y el correspondiente a las características comerciales.

Resolución

La estructura del término amortizativo comercial es:

$$a = M_s \times C(1 + i)^s + L$$

Aplicamos el proceso de normalización y realizamos el cambio de variables:

$$a - L = M_s \times C(1 + i)^s$$

$$a' = a - L; \quad i' = i$$

El término amortizativo normalizado verifica:

$$N_1 \times C = a' \times a_{\overline{n}|i'} \quad \Rightarrow \quad 35.000 \times 60 = a' \times a_{\overline{35}|0,035} \quad \Rightarrow \quad a' = 104.996,53$$

El término amortizativo comercial vale $a = 119.996,53$.
El valor financiero total del empréstito al principio del período 28 es:

$$V_{27}^{T} = 119.996,53 \times a_{\overline{8}|4\%} = 807.906,02$$

Para determinar el valor financiero de la nuda propiedad hemos de actualizar las cuotas de amortización futuras. Recordemos que en la modalidad de empréstitos con cupón acumulado, las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$.

El número teórico de títulos que se amortizan en el año 28 lo deducimos de la estructura del término amortizativo de dicho período:

$$a_{28} = 119.996,53 = M_{28} \times 60 \times 1,035^{28} + 15.000 \quad \Rightarrow \quad M_{28} = 667,87$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, la nuda propiedad total es:

$$N_{27}^{T} = 667{,}87 \times 60 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}035} \right)^{8} 1{,}04^{-8}}{1{,}04 - 1{,}035^{-1}} \right] = 241.631{,}22$$

La única característica comercial bilateral es el lote, cuyo valor actualizado es:

$$L_{27}^{T} = Z_{27}^{T} = 15.000 \times a_{\overline{8}|4\%} = 100.991{,}17$$

Sabemos que se verifica:

$$V_{27}^{T} = U_{27}^{T} + N_{27}^{T} + Z_{27}^{T}$$

Por tanto, el valor financiero del usufructo es:

$$U_{27}^{T} = 807.906{,}02 - 241.631{,}22 - 100.991{,}17 = 465.283{,}63$$

Una vez calculados los valores totales podemos determinar los correspondientes a un título en circulación al principio del período 28 dividiendo el valor total entre el número de títulos vivos al inicio del citado período. Para ello determinamos el número teórico de títulos vivos al principio del período mencionado:

$$N_{27} \times 60 \times 1{,}035^{27} = 104.996{,}53 \times a_{\overline{8}|0{,}035} \quad \Rightarrow \quad N_{27} = 4.751{,}61$$

En consecuencia, los valores financieros al principio del período 28, para un título son:

$$\bar{V}_{27} = \frac{807.906{,}02}{4.751{,}61} = 170{,}03 \text{ €}$$

$$\bar{N}_{27} = \frac{241.631{,}22}{4.751{,}61} = 50{,}85 \text{ €}$$

$$\bar{U}_{27} = \frac{465.283{,}63}{4.751{,}61} = 97{,}92 \text{ €}$$

$$\bar{Z}_{27} = \frac{100.911{,}17}{4.751{,}61} = 21{,}25 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

5. Una empresa emite un empréstito cupón cero formado por títulos de nominal 100 €, para ser amortizado por sorteo en 20 años con términos amortizativos comerciales anuales constantes. El tipo de interés es el 3% anual, repartiéndose anualmente un lote de cuantía constante entre los cien primeros títulos amortizados en cada sorteo, los cuales pierden el nominal correspondiente. Los gastos periódicos anuales son para el emisor el 0,15% sobre todas las cuantías desembolsadas, y del 0,2% para el conjunto de los obligacionistas sobre todas las cuantías percibidas. Se sabe que valorando el empréstito al 4% anual, el valor total neto de un título al principio del año 12 para el conjunto de los obligacionistas es 133,88 €. Determinar el importe del lote anual y el número de títulos emitidos, ambos redondeados a unidades de mil, así como el valor financiero bilateral total del usufructo al inicio del año 12, sabiendo que en dicho año el número teórico de títulos a amortizar es 4.714,37.

Resolución

La estructura del término amortizativo comercial verifica:

$$a_s = a = [M_s \times C(1 + i)^s + L - 100 \times C](1 + g_1)$$

Al normalizar queda:

$$a' = \frac{a}{1 + g_1} - L + 100C\,; \quad i' = i = 3\%$$

Se trata de un empréstito normalizado tipo I.
Como $M_{12} = 4.714{,}37$, se verifica:

$$a' = M_{12} \times C(1 + i')^{12} = 4.714{,}37 \times 100 \times 1{,}03^{12} = 672.156{,}44$$

De la ecuación de equivalencia financiera en el origen obtenemos el número de títulos emitidos:

$$N_1 \times 100 = 672.156{,}44 \times a_{\overline{20}|3\%} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 100.000$$

Para conocer el valor de un título al inicio del año 12 hemos de determinar el número teórico de títulos vivos en dicho momento, verificándose:

$$N_{12} \times C(1 + i')^{11} = a' \times a_{\overline{9}|i'} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_{12} \times 100 \times 1{,}03^{11} = 672.156{,}44 \times a_{\overline{9}|3\%} \quad \Rightarrow \quad N_{12} = 37.807{,}80$$

Por tanto, para el valor neto de un título se cumple:

© Ediciones Pirámide

$$133{,}88 = \frac{V^T_{a,\,11}}{37.807{,}80} \quad \Rightarrow \quad V^T_{a,\,11} = 5.061.708{,}26$$

Sabemos que la relación entre el valor total del empréstito para el conjunto de los obligacionistas y el valor bilateral es: $V^T_{a,\,11} = V^T_{11}(1 - g_2)$. Al sustituir y despejar obtenemos el valor total bilateral del empréstito: $V^T_{11} = \dfrac{5.061.708{,}26}{1 - 0{,}002} =$ $= 5.071.851{,}96$. Como además se verifica: $V^T_{11} = a_b \times a_{\overline{9}|4\%} \quad \Rightarrow \quad a_b = 682.128{,}55$.

De la relación entre el término amortizativo bilateral y el unilateral del emisor obtenemos la cuantía de éste:

$$a_b = \frac{a}{1 + g_1} \quad \Rightarrow \quad a = 683.151{,}74$$

Al sustituir en el término amortizativo normalizado obtenemos la cuantía constante del lote:

$$a' = \frac{a}{1 + g_1} - L + 100C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 672.156{,}44 = \frac{683.151{,}74}{1{,}0015} - L + 100 \times 100 \quad \Rightarrow \quad L = 20.000\ €$$

Para determinar el valor financiero total bilateral del usufructo es preciso conocer los restantes valores bilaterales. Así, como en esta modalidad de empréstito se verifica $M_s = M_{s-1}(1 + i')^{-1}$, el valor financiero de la nuda propiedad es el valor en 11 de una renta de términos variables en progresión geométrica de razón $(1 + i')^{-1}$, valorada al 4% anual, de primer término $M_{12} \times C = 4.714{,}37 \times 100 =$ $= 471.437$:

$$N^T_{11} = A_{(471.437,\,q = 1{,}03^{-1})\overline{9}|4\%} = 471.437\,\frac{1 - 1{,}03^{-9} \times 1{,}04^{-9}}{1{,}04 - 1{,}03^{-1}} = 3.147.580{,}54$$

El valor financiero de las características comerciales bilaterales es:

$$Z^T_{11} = (L - 100C)\,a_{\overline{9}|4\%} = 10.000 \times a_{\overline{9}|4\%} = 74.353{,}32$$

Por tanto:

$$U^T_{11} = V^T_{11} - N^T_{11} - Z^T_{11} =$$

$$= 5.071.851{,}96 - 3.147.580{,}54 - 74.353{,}32 = 1.849.918{,}10\ €$$

© Ediciones Pirámide

21.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se emite un empréstito de 45.000 títulos de nominal 50 € a amortizar por sorteo en 10 años mediante anualidad comercial constante y cupón anual a razón del 6%. Se sabe que los títulos reciben una prima de amortización de 10 € por título. Hallar al principio del noveno año el valor financiero de un título, usufructo, nuda propiedad y características comerciales, siendo el tipo de valoración el 6,5% anual.

2. Se emiten 25.000 títulos de nominal 60 € para ser amortizados en 30 años, mediante sorteo con términos amortizativos comerciales constantes y con cupón periódico del 6% anual. Además, anualmente se entrega un lote de importe 20.000 €, a repartir entre los 20 primeros títulos que resultan amortizados en cada período, los cuales pierden el nominal. Existe un prima de amortización de 20 € por título. Los gastos periódicos para el emisor son del 0,2% sobre todas las cuantías entregadas. Hallar el valor total del empréstito para el emisor y para el conjunto de obligacionistas, al principio del período 21, siendo el tipo de valoración el 7% anual.

3. Un empréstito de 75.000 títulos de nominal 80 € es amortizado por sorteo con términos amortizativos anuales constantes y cupón periódico de 4 €. El empréstito tiene una duración de 40 años. Existe una prima de amortización de 20 € por título. Anualmente se reparte un lote de 40.000 € entre los primeros 20 títulos que resultan amortizados en cada período. Hallar el valor financiero del usufructo, nuda propiedad y características comerciales de una obligación, al principio del período 23, valorándola al 6,5% anual.

4. Una sociedad emite un empréstito integrado por 200.000 títulos de nominal C, valor de emisión V (redondeado a enteros), y cupón anual pospagable de cuantía, sin considerar gastos ni impuestos, 1.100 € por título. La duración de la emisión es de 20 años y en cada período se desea amortizar 1.000 títulos más que en el anterior. El tipo de interés es el 11% anual y se desea que los títulos tengan un rendimiento constante del 12% anual. Gastos anuales a cargo del emisor: 0,1% sobre todas las cuantías que satisface. Impuestos anuales a cargo de los obligacionistas: 0,2% sobre las primas de amortización y los cupones. Se sabe que la prima de amortización total pagada en el año 15, incluyendo gastos a cargo del emisor, pero antes de considerar los impuestos a cargo de los obligacionistas, asciende a 52.223.171 €. Calcular, al principio del año 20, el valor de un título para un obligacionista, una vez deducidos los impuestos y valorando al 13% anual.

5. Un empréstito de 65.000 títulos de 80 € nominales se emite para ser amortizado mediante sorteo en 40 años con términos amortizativos comerciales cons-

© Ediciones Pirámide

tantes y cupón acumulado del 6% anual. Existen gastos periódicos para el emisor del 0,1% sobre todas las cuantías entregadas y para el conjunto de obligacionistas del 0,2% sobre todas las cuantías recibidas. Al principio del año 26 se decide valorar el empréstito a un tipo de interés del 7% anual. Hallar los valores financieros netos para el conjunto de obligacionistas del empréstito total, del usufructo y de la nuda propiedad al principio de dicho período.

© Ediciones Pirámide

Soluciones de los ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 1

1. $(210,15) \succ (208,17)$

2. $(310,37) \succ (300,38) \succ (290,38)$

3. $C_{11} = 1.600.000$ €

4. Para el acreedor es: $[(8.000,10) + (12.000,13)] \succ (20.000,15)$. No la aceptará.

5. $$A(t; p) = \frac{1}{1 - k(t - p)} = \frac{1}{1 + h(t - p)} \begin{cases} h = -k \\ k < 0 \\ 0 < p < t \end{cases}$$

6. $X = 12.615,38$, alternativa *a*

7. $X = 215.625$

Capítulo 2

1. $X = -3.100$, alternativa *b*

2. $X = 800;\ Y = 1.177,27$

3. 10.000, alternativa *c*

4. $Z = 500.000;\ X = 100.000;\ Y = 917.808,22$

5. $X = 39.460$, alternativa *b*

© Ediciones Pirámide

Capítulo 3

1. $X = 0{,}1818$, alternativa *d*

2. $X = 1$, alternativa *b*

3. $r(t_1 = 6,\ t_2 = 8;\ p) = 0{,}1667$

4. $p(t_1 = 4,\ t_2 = 6;\ p) = 1{,}36$

5. 0,0141509

Capítulo 4

1. *a*) $i^{(m)} = 2{,}6755163\%$ cuatrimestral
b) $i' = 27{,}0237051\%$ trienal
c) $j_{(m)} = 6{,}0602\%$ semestral convertible trimestralmente
d) $j_{(m)} = 24{,}36\%$, bienal pagadero semestralmente

2. $u(0{,}6;\ p) = 1{,}015$; $r(0{,}6;\ p) = 0{,}015$; $\rho(0{,}6;\ p) = 0{,}0025$

3. $n = 48$ meses

4. $I_1 = 2.126{,}25$ €; $I_2 = 2.200{,}67$ €; $I_3 = 2.277{,}69$ €; $I_4 = 2.357{,}41$ €

5. $C_0 = 2.800{,}06$ €

6. $C_0 = 72.000{,}08$ €

7. $i^* = 0{,}04$ anual

8. $C_0 = 5.960$ €

9. $C_n = 10.000$ €

10. 35.222,49 €

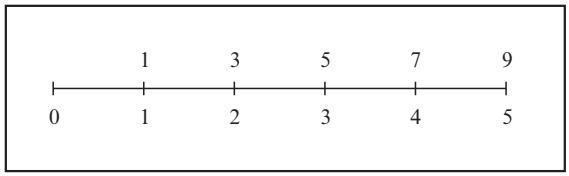
11. 33.554.167 €

Capítulo 5

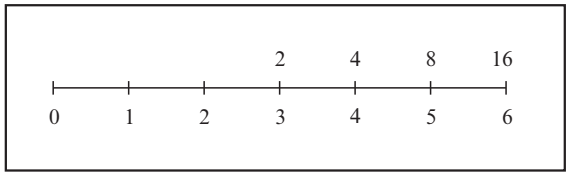
1. *a*) Renta cierta, discreta, constante, temporal de 4 términos pospagables y diferida en 2 períodos.
b) Renta cierta, discreta, constante, temporal de 4 términos prepagables y diferida en 3 períodos.

© Ediciones Pirámide

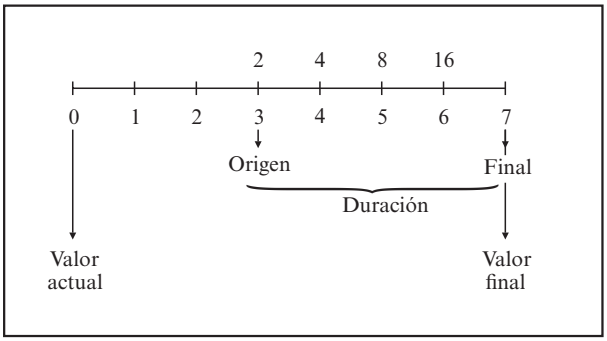
2.



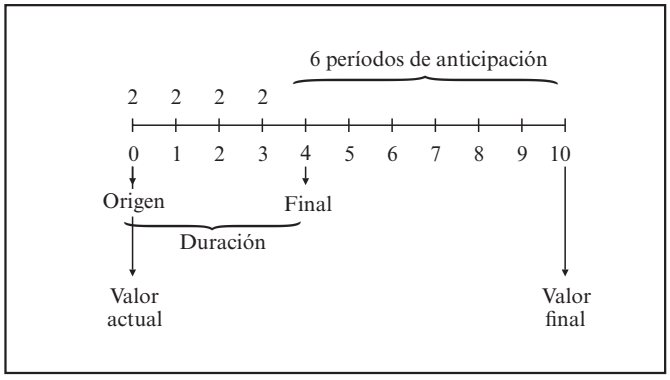
3.



4.



5.



Es una renta prepagable, constante, discreta, temporal, de 4 términos, cierta y anticipada 6 períodos.

© Ediciones Pirámide

6. $V_{12} = 1.328,57$

7. $X = 200$

Capítulo 6

1. *a*) Valor actual: 129,26 €; Valor final: 190,96 €
b) Valor actual: 135,73 €; Valor final: 200,53 €
c) Valor actual: 106,35 €; Valor final: 190,96 €
d) Valor actual: 111,66 €; Valor final: 200,53 €
e) Valor actual: 129,26 €; Valor final: 232,11 €
f) Valor actual: 135,73 €; Valor final: 243,75 €

2. 300 €

3. Le interesa la alternativa *a*, porque el valor actual es menor que el de la *b*, siendo: $V_{0a} = 12.032,25$ € y $V_{0b} = 13.339,66$ €

4. 6.179,29 €

5. Valor actual de cada alternativa: 230.000 y 260.000. Le interesa la alternativa *a.*

6. 39.999,88 €

Capítulo 7

1. 2.000 €

2. *a*) 600.000 €, *b*) 624.000 €

3. *a*) Valor actual: 3.292,65 €; Valor final: 4.873,93 €
b) Valor actual: 3.424,36 €; Valor final: 5.068,89 €
c) Valor actual: 2.927,15 €; Valor final: 4.873,93 €
d) Valor actual: 3.044,24 €; Valor final: 5.068,89 €
e) Valor actual: 3.292,65 €; Valor final: 5.482,51 €
f) Valor actual: 3.424,36 €; Valor final: 5.701,81 €

4. 26.172,74 €

5. 33.114,70 €

© Ediciones Pirámide

Capítulo 8

1. $V_0 = 1.162.827{,}06$ €; $V_{20} = 3.729.343{,}91$ €

2. $V_0 = 13.546{,}63$ €; $V_f = 28.414{,}97$ €

3. $V_{10} = 94.574{,}34$ €

4. 600 €

5. 1.610,20 €

Capítulo 9

1. $I_{10}^{-} = 6.851{,}53$ €

2. $\Delta_{16}^{-} = 4.125{,}98$ €

3. $a_6 = 10.000$ €

4. $\Delta_9^{-} = 19.830{,}43$ €

5. $a_{15} = 1.267{,}20$ €

6. $C_7^{-} = 56.923{,}20$ €

7. $a = 103{,}86$ €

8. $\Delta_{21}^{-} = 688{,}91$ €

Capítulo 10

1. 4.608 €

2.

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	70.000,00
1	0,05	8.000,00	3.500,00	4.500,00	4.500,00	65.500,00
2	0,06	23.549,97	3.930,00	19.619,97	24.119,97	45.880,03
3	0,065	23.549,97	2.982,20	20.567,77	44.687,74	25.312,26
4	0,07	14.000,00	1.771,86	12.228,14	56.915,88	13.084,12
5	0,07	14.000,00	915,88	13.084,12	70.000,00	0,00

© Ediciones Pirámide

3. 8.145,06 €

4. $M^{e}_{[5,\ 10]}$ = 79.389,25 €; C_{10} = 94.750 €

5. 19 años

6. 39.415,27 €

7. 8.424,19 €

Capítulo 11

1. *a*) 70.318,62 €; *b*) 45.219,43 €; *c*) 6.735,23 €

2. 5.939,03 €

3. 39.250,17 €

4. 112.000 €

5. 95.000 €

6. 12 años

7. *a*) 6.260,74 €; *b*) 94.000 €

8. 4.200,01 €

Capítulo 12

1. 10 años

2. 90.000,02 €

3. 4.251,49 €

4. 692,69 €

5. 300 €

6. 8 años

Capítulo 13

1. a_5 = 1.726,88 €

2. a_{10} = 29.671,94 €

© Ediciones Pirámide

3. $C_{24} = 123.481,86$ €

4. $M_3^e = 14.496,41$ €

5. $a_4 = 14.831,75$ €

6. $I_{32} = 56,05$ €

7. $A_{25} = 1.915,96$ €

Capítulo 14

1. $C_0 = 3.600,08$ €

2. $V_7 = 3.568,46$ €

3. $i' = 8\%$ anual

4. $U_4 = 1.725,68$ €

5. $C_0 = 120.000,03$ €

6. $U_7 = 1.267,08$ €

7. $V_3 = 15.803,22$ €

Capítulo 15

1. $i_m = 7,2591\%$ anual

2. $i_p = 8,5534\%$; $i_a = 8,2075\%$; $i_{TAE} = 8,4031\%$ anual

3. $i_{pg} = 7,7066\% < i_{p1} = 8,1735\%$, por lo que sí interesa la subrogación

4. $i_{TAE} = 3,9317\%$

5. $i_a = 6,4835\%$; $i_p = 7,0418\%$; $i_{TAE} = 6,4835\%$

6. 161,15 €

Capítulo 16

1. $S = -551,33$ €

2. $S = 100,58$ €

3. $S = 352,58$ €

© Ediciones Pirámide

4. $S = -9.167{,}44$ €; $i_p = 27{,}694\%$ anual

5. *a*) $S = -8.495{,}30$ €; *b*) $i_{TAE} = 9{,}00\%$; *c*) $i'_{TAE} = 8{,}73\%$

6. $S = 4.274{,}89$ €.

7. 1.601,39 €

Capítulo 17

1. 10,2974%

2. 8,5128% anual

3. 30 días

4. 3% anual

5. 9.382,48 €

6. $d_c = 14{,}80\%$ anual; $d_B = 12\%$ anual; $i_p = 16{,}52\%$ anual; $i_a = 13{,}15\%$ anual

7. $d_c = 8{,}483\%$ anual; $d_B = 7{,}241\%$ anual

8. 16.000 €

9. *a*) $d_c = 14{,}60\%$ anual; *b*) $d'_c = 15{,}80\%$ anual

10. 57,36 €

11. $d_c = 18{,}81\%$ anual; $i_p = 21{,}54\%$ anual; TAE = 7,15%

Capítulo 18

1. $I_8 = 12$ €

2. *a*) $M_6^e = 6.043{,}88$; *b*) $M_8 = 367{,}06$; *c*) $N_{6+\frac{1}{4}} = 5.956{,}12$

3. $M_{12} = 803{,}84$

4. $N_1 = 25.000$; $M_{12} = 1.117{,}05$

5. $M_6 = 1.146{,}58$; $N_{12} \times C \times i_3 = 19.852{,}17$ €

6. *a*) $N_{20} = 5.547{,}41$; *b*) $M_{10} = 1.175{,}18$

7. $N_{11} = 3.436{,}30$; $M_4^e = 4.684{,}48$

© Ediciones Pirámide

Capítulo 19

1. $P = 10$ €; $N_7 = 5.268{,}91$

2. $L_1 = 1.999{,}38$ €

3. $N_{10} = 49.043{,}26$

4. $V = 50$ €

5. $a = 135.369.374{,}20$ €

6. $N_1 = 20.200$

7. $L = 20.000$ €

Capítulo 20

1. $i_r^{(12)} = 25{,}7693\%$ anual

2. $N_6 \times C \times i^{(m)} = 25.632{,}55$ €

3. $P_{15} = 119{,}69$ €

4. $N_1 = 20.000$

5. $L = 13{,}58$ €

6. $a = 106.251.449{,}60$ €; $i_p = 10{,}038876\%$ anual

7. $N_7 = 3.785{,}80$

8. $i_r = 13{,}001646\%$ anual

Capítulo 21

1. $\bar{V}_8 = 58{,}75$ €; $\bar{N}_8 = 45{,}48$ €; $\bar{U}_8 = 4{,}17$ €; $\bar{P}_8 = 9{,}10$ €

2. $V^T_{p,\,20} = 996.409{,}17$ €; $V^T_{a,\,20} = 994.420{,}31$ €

3. $\bar{V}_{22} = 91{,}11$ €; $\bar{N}_{22} = 43{,}41$ €; $\bar{Z}_{22} = 19{,}55$ €; $\bar{U}_{22} = 28{,}14$ €

4. $\bar{V}_{19} = 15.996{,}20$ €

5. $V^T_{a,\,25} = 3.141.399{,}60$ €; $U^T_{a,\,25} = 2.633.132{,}08$ €; $N^T_{a,\,25} = 508.267{,}51$ €

© Ediciones Pirámide

Bibliografía

Alegre Escolano, P. et al. (1989). *Ejercicios resueltos de Matemática de las operaciones financieras*. Madrid: AC.

Baquero López, M. J. y Maestro Muñoz, M. L. (2003). *Problemas resueltos de Matemática de las Operaciones Financieras*. Madrid: AC.

Córdoba Bueno, M. (2004). *La práctica de los mercados financieros*. Madrid: Dykinson.

Cruz Rambaud, S. y Valls Martínez, M. C. (2003). *Introducción a las matemáticas financieras*. Madrid: Pirámide.

García Boza, J. (1989). *La tasa efectiva de coste en las operaciones bancarias activas*; Actualidad financiera, n.º 39, pp. 2.557-2.580.

García Boza, J. y Cáceres Apolinario, R. M. (1998). *Préstamos hipotecarios: Análisis financiero*; Actualidad Financiera, n.º 11, pp. 35-49.

García Boza, J. et. al. (2002). *Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras*. Madrid: Pirámide.

Gil Luezas, M. A. y Gil Peláez, L. (1987). *Matemáticas de las operaciones financieras*. Madrid: Ed. UNED.

Gil Peláez, L. (1987a). *Matemática de las operaciones financieras*. Madrid: AC.

Gil Peláez, L. (1987b). *Matemática de las operaciones financieras. Problemas resueltos*. Madrid: AC.

González Catalá, V. T. (1992a). *Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera*. Madrid: Ciencias Sociales.

González Catalá, V. T. (1992b). *Análisis de las operaciones financieras, bancarias y bursátiles*. Madrid: Ciencias Sociales.

González Catalá, V. T. (1993). *Operaciones financieras, bancarias y bursátiles. Curso práctico*. Madrid: Ciencias Sociales.

González Velasco, M. C. (2007). *Análisis de las Operaciones Financieras*. Navarra: Aranzadi.

Meneu Ferrer, V., Jordá Durá, M. y Barrera, M. T. (1994). *Operaciones financieras en el mercado español*. Barcelona: Ariel.

Miralles Marcelo, J. L. y Miralles Quirós, M. M. (2010). *Matemáticas de las operaciones financieras.* Badajoz: Universitas.

© Ediciones Pirámide

Navarro, E. y Nave, J. M. (2001). *Fundamentos de matemáticas financieras*. Barcelona: Antoni Bosch.
Pablo López, A. de (1998). *Valoración Financiera*. Madrid: Ed. Ramón Areces.
Pablo López, A. de (2000). *Matemática de las operaciones financieras*. Madrid: UNED.
Pablo López, A. de (2001). *Manual práctico de matemática comercial y financiera*.Madrid: Ed. Ramón Areces.
Prieto Pérez, E. (1982). *Análisis financiero de los empréstitos obligaciones*. Madrid: ICE.
Prieto Pérez, E. (2010). *Matemática Financiera, tomo I*; Madrid, Ed. Gabinete Financiero.
Rodríguez Rodríguez, A. (1984). *Matemática de la financiación*. Barcelona: Romargraf.
Valls Martínez, M. C. y Cruz Rambaud, S. (2004). *Introducción a las matemáticas financieras. Problemas resueltos*. Madrid: Pirámide.

© Ediciones Pirámide

TÍTULOS RELACIONADOS

Casos prácticos de dirección financiera, *M. Martín Fernández y P. Martínez Solano.*

Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa, *A. S. Suárez Suárez.*

Dirección financiera II. Medios de financiación empresarial, *C. Lassala Navarré, A. Medal Bartual, V. Navarro Miquel, V. Sanchis Berenguer y A. Soler Movilla.*

Dirección financiera de la empresa, *A. Partal Ureña, F. Moreno Bonilla, M. Cano Rodríguez y P. Gómez Fernández-Aguado.*

Dirección financiera de la empresa. Teoría y práctica, *J. L. Jiménez Caballero, C. Pérez López y A. de la Torre Gallegos.*

Dirección financiera del riesgo de interés, *L. Ferruz Agudo (coord.), M.ª P. Portillo Tarragona y J. L. Sarto Marzal.*

Economía y gestión bancaria, *J. López Pascual y A. de F. Sebastián González.*

Financiación del proceso emprendedor, *J. Hoyos Iruarrizaga y A. Blanco Mendialdua.*

Finanzas aplicadas al marketing, *D. Ruiz Palomo.*

Finanzas corporativas, *S. Durbán Oliva.*

Finanzas internacionales para la empresa, *J. J. Durán Herrera y F. Gallardo Olmedo.*

Gestión financiera en el sector turístico. Inversión y financiación a largo plazo, *R. García Villanueva, C. Pérez López y M.ª J. Piñas Azpitarte.*

Gestión patrimonial y banca privada. Manual del asesor financiero, *B. Vallejo Alonso y M. Solórzano García (Coords.).*

Gestión de riesgos financieros en la banca internacional, *A. Partal Ureña y P. Gómez Fernández-Aguado (coords.).*

Impuestos para todos los públicos, *F. J. Delgado Rivero y R. Fernández Llera.*

Introducción a las finanzas, *M.ª del C. Valls Martínez (Coord.).*

Introducción a las finanzas empresariales, *A. Partal Ureña, F. Moreno Bonilla, M. Cano Rodríguez y P. Gómez Fernández-Aguado.*

Inversiones financieras: selección de carteras. Teoría y práctica, *J. García Boza.*

Matemáticas financieras, *J. García Boza (coord.).*

Matemáticas financieras en el nuevo PGC, *E. Bustos Contell.*

Opciones financieras, *M. Casanovas Ramón.*

Operaciones financieras avanzadas, *M.ª del C. Valls Martínez y S. Cruz Rambaud.*

Planes de previsión social, *J. I. de la Peña Esteban.*

Planificación financiera en la práctica empresarial, *S. Durbán Oliva, A. I. Irimia Diéguez, M.ª D. Oliver Alfonso y M.ª J. Palacín Sánchez.*

Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras, *J. García Boza, A. Déniz Tadeo, L. Jordán Sale, R. M.ª Cáceres Apolinario y O. Maroto Santana.*

Supuestos prácticos de dirección financiera, *J. F. Rosario Díaz, M.ª del M. Sánchez Cañadas y J. E. Trinidad Segovia.*

Teoría de la financiación II. OPT, estructura de capital y dividendos, *A. R. Gómez Calvet, J. A. Piñol Espasa, A. Reig Pérez y A. Rodrigo González.*

Teoría de la inversión, *F. Blanco Ramos, M. Ferrando Bolado y M.ª F. Martínez Lobato.*

Valoración de empresas y análisis bursátil, *A. de la Torre Gallegos y F. Jiménez Naharro.*

www.edicionespiramide.es